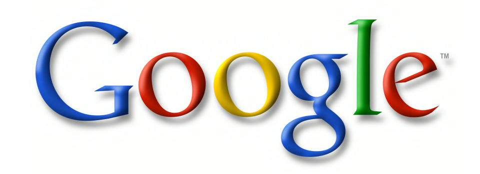
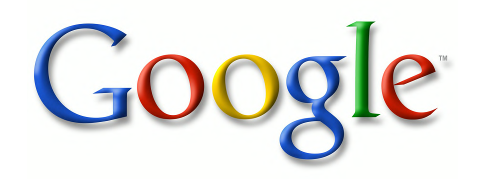
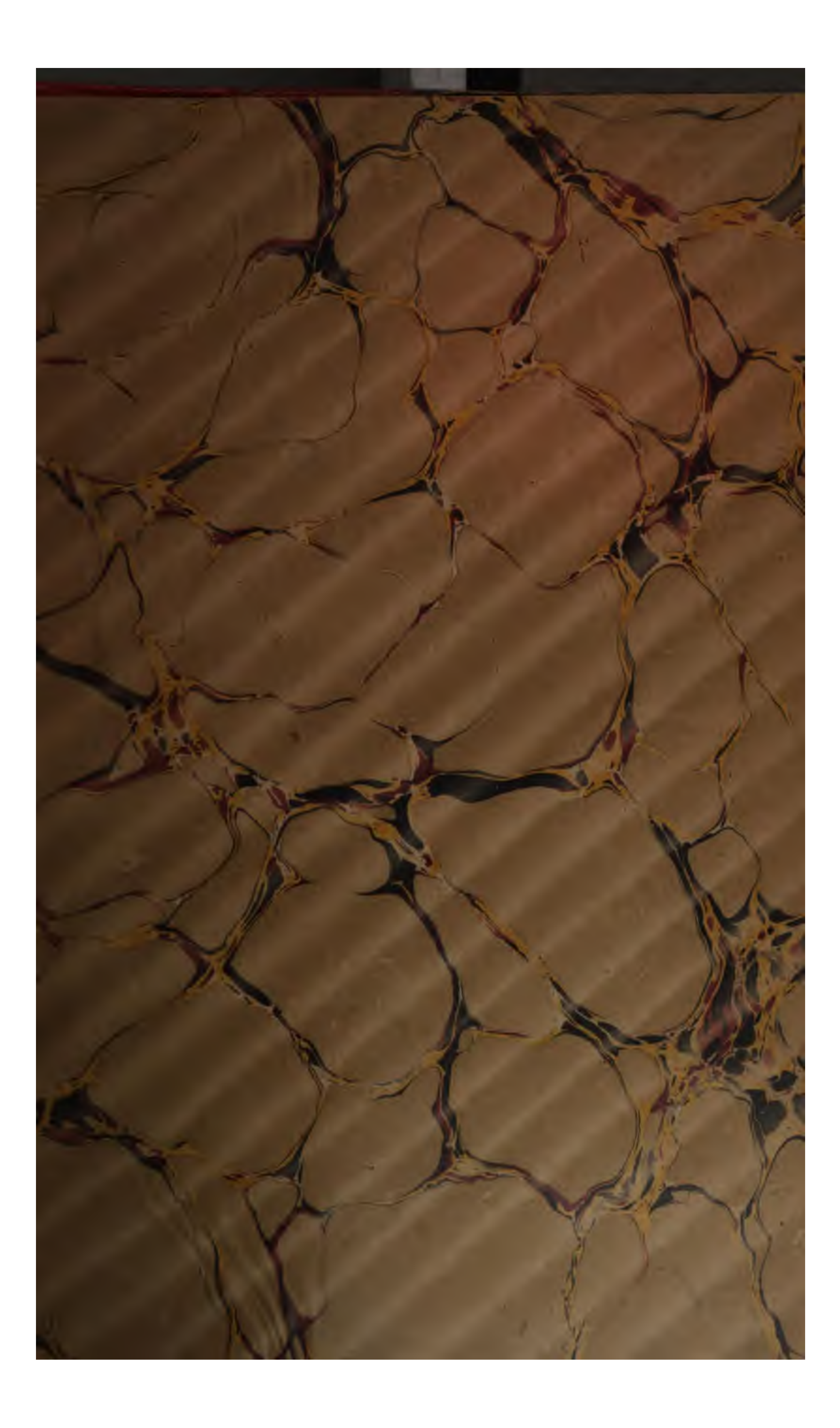






anford University Libraries
05 027 441 323





BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

21061 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XIX. — ANNÉE 1895.

(TOME XXIX DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GASTON MILHAUD. — Leçons sur les origines de la Science grecque. 306 p. in-8°. Paris, Félix Alcan, 1893.

L'auteur a réuni en un Volume une série de conférences faites par lui aux étudiants des Facultés de Montpellier et dont le sujet embrasse le développement de la pensée scientifique et philosophique en Grèce avant le siècle de Platon. Il nous prévient au reste qu'il n'apporte aucun document inédit; il ne s'agit donc véritablement que de leçons ayant pour objet de faire connaître l'état actuel des connaissances touchant l'histoire de l'esprit humain pendant cette période. M. Milhaud s'est acquitté avec un réel talent de la tâche qu'il avait entreprise; la sûreté de ses informations, la clarté de son style, la largeur de ses aperçus mettent réellement son livre hors de pair; espérons qu'il obtiendra le succès qu'il mérite et que ce premier essai de l'auteur sur un terrain trop négligé en France sera suffisamment encouragé pour qu'il poursuive ses travaux dans la même voie.

Je ne veux au reste signaler ici que la partie qui concerne les Mathématiques proprement dites, à savoir : la troisième leçon et la huitième. M. Milhaud a exposé dans l'une ce que l'on sait des connaissances de l'Orient et de l'Égypte en Arithmétique et en

Géométrie; il a montré que ces connaissances, que se plaisent encore à exagérer ceux qui n'ont pas étudié la question, ont pu servir de point de départ aux Grecs, mais qu'elles n'avaient point un véritable caractère scientifique; dans la dernière leçon, il a résumé les progrès accomplis aux VIe et Ve siècles avant notre ère, en particulier par l'École de Pythagore.

Ces deux leçons, nourries de faits, suffisent pour apprendre, en une soixantaine de pages d'une lecture aisée, ce qu'il y a de véritablement intéressant dans l'histoire des Mathématiques de cette époque; je me bornerai à quelques remarques incidentes.

Après avoir exposé le principe de la table à calculs (abaque) et du boulier, M. Milhaud remarque que cette façon de représenter les nombres impliquait déjà la reconnaissance de la valeur de position. Il est étrange, ajoute-t-il, que ce dernier principe n'ait pas été dégagé dans l'antiquité, et il insiste sur la simplicité du progrès qui n'a été réalisé que bien plus tard, par les Hindous.

Le fait ne me paraît pas aussi inexplicable, si l'on réfléchit à deux circonstances. D'un côté, on n'avait pas à manier, dans la pratique, des nombres qui, pour nous, exigeraient plus de trois à quatre figures; les unités métriques ne procédant pas suivant l'échelle décimale, on n'opérait même le plus souvent que sur des nombres inférieurs à 100; d'autre part on ne calculait guère la plume à la main (1), mais avec les jetons sur l'abaque, ou encore de tête, en se servant des doigts pour marquer les résultats (2). Les symboles numériques dont le système, chez les Phéniciens, les Égyptiens, les Chaldéens et les Grecs, était alors à peu près aussi imparfait que celui des chiffres romains, servaient pour écrire les nombres d'une façon plus abrégée qu'en toutes lettres, non pour calculer; on ne sentait donc pas encore le besoin de les simplifier.

Lorsque ce besoin apparut, au IIIe siècle avant notre ère, il est certainement singulier que les Grecs aient adopté leur système littéral au lieu d'imaginer celui que nous devons aux Hindous.

---

(1) A cet égard, le célèbre papyrus égyptien de Rhind doit être considéré comme une exception; c'est bien un manuel pour le calcul avec la plume, surtout pour le calcul des fractions; mais ce qu'il enseigne n'était guère pratique et, en tout cas, suppose l'habitude du calcul de tête.

(2) Suivant un procédé qui permettait d'aller jusqu'à 10000 et qui s'est perpétué jusqu'au moyen âge.

Mais ce n'est pas le seul exemple qui montre l'homme épuisant ce qui est compliqué et absurde, avant d'arriver à ce qui est simple et logique.

Le fait véritablement étrange et sur lequel M. Milhaud insiste à bon droit, c'est l'existence chez les Chaldéens, dès cette époque, du système sexagésimal, avec une numération écrite analogue, comme je l'ai dit, à celle des Romains pour les nombres inférieurs à 60. Les Chaldéens, qui ont créé l'Astronomie, étaient le seul peuple chez lequel une classe instruite avait à faire réellement des calculs compliqués. Mais comment opéraient-ils en réalité? avec l'abaque ou avaient-ils des tables de multiplication (¹) allant jusqu'à 60? Pour les calculs astronomiques de l'âge classique, la même question se pose sans que l'on puisse répondre par aucun document précis; la persistance, jusqu'à une époque relativement rapprochée de nous, de l'habitude d'effectuer tous les calculs astronomiques en opérant sur des nombres complexes (²) de degrés, minutes, secondes, etc., est enfin un fait des plus singuliers, alors surtout que, dans les traités spéciaux, il n'est jamais fait allusion aux moyens de simplifier ces calculs fastidieux. L'histoire de l'Arithmétique pratique semble avoir une face encore inconnue ou à peine soupçonnée, en ce qui concerne les procédés transmis traditionnellement, mais qui n'ont jamais été écrits, ou ne l'ont été que de longs siècles après le commencement de leur emploi.

PAUL TANNERY.

SOPHUS LIE. — VORLESUNGEN ÜBER CONTINUIERLICHE GRUPPEN, mit geometrischen und anderen Anwendungen, bearbeitet und herausgegeben, von Dr *Georg Scheffers*. Leipzig, Teubner, 1893.

Le nouvel Ouvrage de MM. Lie et Scheffers est, en quelques points, une suite de leurs *Vorlesungen über Differentialglei-*

(¹) On a trouvé, en écriture cunéiforme, des tables de carrés et de cubes, qui ont précisément prouvé l'existence de la numération sexagésimale.

(²) C'est seulement au XVe siècle que Georg de Peurbach calcula une table de sinus d'après le système décimal (en prenant d'ailleurs 600 000 pour le rayon du cercle).

chungen, bien qu'il en soit indépendant. Comme les leçons précédentes, il est destiné à la vulgarisation de la théorie des groupes finis et continus de transformations, but qui sera facilement atteint d'ailleurs, car cette vaste théorie, si attrayante par bien des côtés, exposée dans l'œuvre savante de MM. Lie et Engel, est devenue rapidement classique. Il n'y en a pas moins dans ce Livre une part d'originalité considérable, car, s'il prend le lecteur à la simple notion de rapport anharmonique, il le conduit, par une suite toute naturelle d'idées, à des théories bien moins élémentaires, telles que celles de la structure des groupes, des nombres complexes à n unités, et des systèmes d'équations différentielles à solutions fondamentales.

Le volume est divisé en deux Parties. La première, plus élémentaire, et sur laquelle j'insisterai moins, développe, en prenant comme types les groupes projectifs du plan, les principes fondamentaux de la théorie des groupes : c'est, en même temps, un exposé complet de la Géométrie projective du plan et de la droite, et de la théorie des groupes finis du plan. La deuxième Partie traite des groupes en général; elle se termine par des applications qui forment les pages les plus originales de l'Ouvrage.

Première Partie. — Considérons les transformations suivantes : *transformation projective d'une droite,* c'est-à-dire qui n'altère pas le rapport anharmonique de quatre points; *transformation projective du plan,* c'est-à-dire, comme le montre M. Scheffers, la transformation la plus générale qui change une droite en droite, ou encore, qui n'altère pas l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; *transformation linéaire* du plan, c'est-à-dire transformation projective qui laisse fixe la droite de l'infini; *transformation linéaire spéciale,* c'est-à-dire transformation linéaire qui conserve les aires; *transformation des mouvements,* c'est-à-dire transformation linéaire qui conserve les longueurs; chacune d'elles forme un ensemble connu aujourd'hui sous le nom de *groupe fini et continu,* avec transformation identique et transformations deux à deux inverses.

Chacun d'eux, et, plus généralement, tout groupe fini et continu contient une ou plusieurs *transformations infinitésimales*

linéairement indépendantes, en nombre égal à celui des paramètres du groupe, ou à l'*ordre du groupe;* et l'une quelconque d'entre elles, répétée à l'infini, engendre à son tour un *groupe à un paramètre* de transformations finies qui appartiennent manifestement au groupe proposé. Le fait s'établit facilement sur tous nos exemples, en vérifiant que la solution obtenue a la forme d'une transformation du groupe; et, dans le cas général, il suffit, pour l'établir élégamment, de faire un changement de variables qui réduit la transformation infinitésimale à être une simple translation, et, comme conséquence, amène en même temps le groupe à contenir les translations finies qu'elle engendre. Enfin, que ce mode de génération reproduise toutes les transformations finies du groupe, c'est ce qui résulte immédiatement de l'évaluation du nombre de paramètres distincts que contient la transformation générale ainsi obtenue.

On arrive à la notion de *sous-groupe g*, à un ou plusieurs paramètres, d'un groupe donné G, et de *sous-groupes homologues,* déduits d'un même *type* par des transformations de G lui-même. Par exemple, pour les transformations projectives d'une droite, on a deux types de groupes à un paramètre, les uns laissant fixes deux points distincts, les autres deux points confondus, et un seul type de groupes à deux paramètres, lesquels laissent toujours fixe un seul point.

On en déduit immédiatement les divers types de groupes de transformations linéaires homogènes du plan, lesquelles ne sont que des transformations projectives d'une droite en coordonnées homogènes.

Pareillement, dans le plan, il y a cinq types de groupes projectifs à un paramètre, caractérisés par la disposition de leurs droites et points invariants : chacun d'eux laissant fixe au moins un point et au moins une droite, puis, passant par chacun de ces points, au moins une droite, et, sur chacune de ces droites, au moins un point.

La détermination, dans le plan, des autres groupes projectifs, aussi bien que celle des différents types de groupes finis quelconques, devient plus difficile. D'abord, la condition nécessaire et suffisante pour que r transformations infinitésimales distinctes, $U_1 f$, $U_2 f$, ..., $U_r f$, projectives ou non, soient celles d'un groupe

à r paramètres, est que leurs crochets satisfassent à des relations de la forme

$$(U_i U_k) = \sum_s c_{iks} U_s f,$$

où les c_{iks} sont des constantes. La démonstration, très élégante, donnée d'abord pour les groupes projectifs, puis pour les groupes quelconques en x et y, repose sur les mêmes idées. Soit, en effet, un groupe donné à r paramètres, et soit une courbe quelconque, n'admettant pas de transformation du groupe et soumise à ses transformations : elle engendrera un faisceau de ∞^r courbes, défini par une équation différentielle; celle-ci, à son tour, admettra les r transformations infinitésimales du groupe, et par suite aussi leurs crochets, ce qui établit que la condition est nécessaire. Inversement, si elle est satisfaite, on peut former une équation différentielle d'ordre r, ayant comme solution particulière une courbe arbitraire et admettant les transformations infinitésimales données et, par suite, leurs transformations finies. Il en résulte que ces dernières, si elles sont projectives, forment nécessairement un groupe : dans le cas d'un groupe quelconque en x et y, il suffit, pour étendre la démonstration, de remarquer qu'une équation différentielle d'ordre r supérieur à un, admettant un groupe fini, l'ordre de celui-ci ne peut surpasser une limite fixe ($r+4$, sauf pour $r=2$, où cette limite est 8); car, si l'on fixe convenablement certains éléments, en nombre fini, on arrive à une transformation qui se réduit nécessairement à la transformation identique.

La classification des groupes projectifs se fait alors par une méthode très rationnelle, reposant sur la considération des *élations* que contient chacun d'eux, c'est-à-dire des transformations homologues d'une translation, caractérisées par une droite, dont elle laisse fixes tous les points, et par un point de cette droite, toutes les droites passant par ce point étant aussi invariantes. On étudie les figures formées par les éléments qui définissent ces élations, et on en conclut qu'il n'existe pas de groupe à sept paramètres; qu'un groupe à six paramètres est déterminé ou par un point, ou par une droite qu'il laisse fixe; et que les groupes à cinq paramètres se partagent en trois types, chacun d'eux étant

un sous-groupe d'un groupe à six paramètres. Quant au cas d'un nombre de paramètres au plus égal à quatre, on remarque d'abord qu'à chaque point du plan, le groupe fait correspondre une direction au moins, bien déterminée, de telle sorte qu'il y a une équation invariante du premier ordre, au moins, c'est-à-dire *imprimitivité* du groupe. Il en résulte l'invariance soit d'un point, soit d'une droite, soit d'une conique : il n'y a d'ailleurs qu'un seul groupe, à trois paramètres, laissant invariante une conique et cette conique seulement. Reste donc alors à déterminer tous les groupes ayant une droite invariante, et à prendre leurs dualistiques, pour obtenir ceux qui ont un point invariant.

Passons à la détermination des groupes à une et deux variables. Dans le cas d'une seule variable x, il suffit d'ordonner les transformations infinitésimales suivant les puissances de $x - x_0$, x_0 étant arbitraire, pour établir, en formant les crochets, qu'il ne peut y avoir de transformation d'ordre supérieur à deux et, par suite, de groupe à plus de trois paramètres. Un changement de variables donne alors au groupe, suivant son ordre, l'une des formes projectives suivantes

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad x' = ax + b, \qquad x' = x + b.$$

Cette remarque est fondamentale pour la construction des groupes à deux variables. Ceux-ci se partagent en *groupes primitifs,* qui ne laissent invariant aucun faisceau de courbes, et en *groupes imprimitifs*. Les premiers se distinguent en ce que, si l'on fixe un point du plan, ils transforment projectivement les directions passant par ce point, sans en laisser aucune invariante, ou encore, en ce qu'ils n'ont pas d'équation invariante du premier ordre.

Les groupes imprimitifs eux-mêmes se classent facilement. Si, en effet, on met leur faisceau invariant de courbes sous la forme $x =$ const., ces droites se transforment entre elles d'après un groupe à une seule variable x et, sur chacune d'elles, les ordonnées y sont à leur tour transformées d'après un groupe à une seule variable y, mais dépendant de x. Si le groupe en x est d'ordre zéro, le groupe en x, y est *intransitif,* et leurs types peuvent dépendre de fonctions arbitraires; dans les autres cas, pour les *groupes*

transitifs, les types ne dépendent plus que de constantes arbitraires, et les coefficients de leurs transformations infinitésimales sont des fonctions entières en x et y, pouvant en outre contenir linéairement des exponentielles en e^{ax}.

Quant aux groupes primitifs, on établit, comme dans le cas d'un groupe à une seule variable, qu'ils ne peuvent contenir de transformations infinitésimales d'ordre supérieur au second. Un tel groupe est semblable, soit au groupe projectif général, soit au groupe linéaire général, soit au groupe linéaire spécial.

Signalons enfin les notions suivantes qui ont été rencontrées au cours de ces Chapitres : celles de groupes formés de plusieurs faisceaux *discrets,* tels que l'ensemble des transformations projectives et dualistiques du plan, celles d'*équations invariantes* et d'*invariants différentiels* d'un groupe, et en particulier la proposition suivante : un groupe d'ordre r en x et y contient toujours un invariant et un seul J_{r-1}, d'ordre au plus égal à $r-1$, puis un invariant d'ordre r, J_r, un invariant d'ordre $r+1$,

$$J_{r+1} = \frac{dJ_r}{dJ_{r-1}},$$

et, plus généralement, un d'ordre $r+k$ qui est

$$J_{r+k} = \frac{dJ_{r+k-1}}{dJ_{r-1}}.$$

Deuxième Partie. — La deuxième Partie débute par l'étude des propriétés générales des groupes. Le lecteur étant déjà familiarisé avec la théorie, M. Lie donne des démonstrations analytiques, et surtout des démonstrations synthétiques des propositions fondamentales. C'est un des Chapitres les plus intéressants de ce Livre.

Pour arriver à la première proposition, considérons deux transformations consécutives T_a et T_b

$$x' = f(x, a), \qquad x'' = f(x', b),$$

donnant par leur produit

$$T_c = T_a T_b.$$

Les paramètres a et b étant essentiels, on peut arriver encore

à T_c par deux transformations voisines $T_{a+\delta a}$ et $T_{b+\delta b}$, de sorte que l'on a

$$T_a T_b = T_{a+\delta a} T_{b+\delta b}$$

ou

$$T_a^{-1} T_{a+\delta a} = T_b T_{b+\delta b}^{-1},$$

c'est-à-dire deux expressions d'une même transformation infinitésimale, la première qui donne

$$\delta x' = \sum \frac{\partial x'}{\partial a} \delta a,$$

la seconde

$$\delta x' = \Sigma \xi(x', b) \delta b,$$

et cela pour des δb de la forme

$$\delta b = \Sigma \psi(a, b) \delta a,$$

d'où les identités fondamentales

$$\frac{\partial x'}{\partial a} = \Sigma \xi(x', b) \psi(a, b),$$

où l'on peut d'ailleurs faire abstraction des b, qui ont des valeurs arbitraires.

Inversement, si les transformations

$$x' = f(x, a)$$

satisfont à des identités de cette forme et comprennent la transformation identique, elles comprennent aussi les transformations infinitésimales

$$\delta x = \Sigma e \xi(x) \delta t,$$

et, par suite, leurs groupes à un paramètre. Ces derniers forment un ensemble qui coïncide nécessairement avec l'ensemble de transformations proposées, lequel forme donc un groupe.

Pour la seconde proposition, il y a une démonstration tout aussi originale. Elle repose sur le nombre des positions distinctes que prend, suivant les valeurs de m, un *m-èdre,* c'est-à-dire un système de m points distincts d'un espace à n dimensions, lorsqu'on le soumet aux transformations d'un faisceau à r paramètres. Partant de ce que les conditions nécessaires et suffisantes pour

que le faisceau précédent forme groupe sont qu'il contienne la transformation identique et que le produit de deux quelconques de ses transformations forme un nouvel ensemble ne dépendant que de r paramètres essentiels, cette dernière condition s'interprète en disant que le faisceau des $T_a T_b$ doit donner à un $(r+1)$-*èdre*, ∞^r positions seulement. Ceci signifie, appliqué aux transformations finies engendrées par un système de r transformations infinitésimales distinctes, $X_1 f, \ldots, X_r f$, qu'un système quelconque de $r+1$ points, $x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(r+1)}$ admet des invariants par rapport à ces transformations; et le nombre de ces invariants est tel que les équations linéaires

$$U_j f = X_j^{(1)} f + X_j^{(2)} f + \ldots + X_j^{(r+1)} f = 0$$

forment un système complet. Les relations

$$(U_i U_k) = \sum_s \varphi_{iks}(x_i^{(1)}, \ldots, x_i^{(r+1)}) U_s f$$

conduisent alors aux suivantes :

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s f,$$

où les c_{iks} sont constants, et qui donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour que les transformations $X_1 f, \ldots, X_r f$ engendrent un groupe.

Enfin, troisième et dernière proposition fondamentale, les constantes c_{iks} satisfont aux deux systèmes suivants de relations :

$$c_{iks} + c_{kis} = 0,$$
$$\sum_s (c_{iks} c_{slt} + c_{kls} c_{sit} + c_{lis} c_{skt}) = 0,$$

la dernière se déduisant de l'identité de Jacobi :

$$((X_i X_k) X_l) + ((X_k X_l) X_i) + ((X_l X_i) X_k) = 0;$$

et inversement, un système de c_{iks} satisfaisant à ces relations définit la *structure* d'un groupe. La démonstration de cette seconde partie est la reproduction, réduite aux éléments essentiels à ce cas

particulier, du magistral théorème des groupes de fonctions donné dans le second Volume des *Transformationsgruppen*.

Ces principes établis, nous retrouvons, avec plus de précision, les propriétés générales des groupes, et d'abord leur distinction en groupes *transitifs* et *intransitifs*, avec la détermination des multiplicités invariantes d'un groupe, et la classification de celles-ci suivant le nombre des déplacements de directions linéairement distinctes, que les transformations infinitésimales du groupe impriment à un de leurs points.

Viennent ensuite la notion de *groupes semblables* à un autre qui s'en déduisent par des changements de variables, et les criterium nécessaires et suffisants pour la similitude de deux groupes. L'un de ceux-ci est que l'on puisse mettre, par des combinaisons linéaires, les transformations infinitésimales de l'un des groupes sous une forme telle que les deux groupes aient *même structure;* et cette condition est suffisante dans le cas de *groupes simplement transitifs*, ou groupes transitifs ayant même nombre de paramètres que de variables. En particulier, on peut, dans ce cas, étudier les transformations qui changent un groupe en lui-même, et l'on arrive à ce résultat remarquable que ces nouvelles transformations dépendent d'arbitraires et forment, à leur tour, un groupe qui est aussi simplement transitif; ce groupe peut être considéré comme formé par les transformations échangeables avec celles du groupe proposé. Les deux groupes sont donc *réciproques;* de plus, ils ont même structure et, par suite, sont semblables.

Dans un cas particulier, si l'on transforme un groupe par un changement de variables qui soit lui-même une transformation du groupe, l'opération ne fait qu'altérer la forme suivant laquelle figurent les paramètres dans les transformations du groupe. Si l'on opère sur une transformation infinitésimale $\sum_k e_k X_k f$, on obtient, relativement aux e_k, une transformation linéaire homogène qui appartient à un groupe, le *groupe adjoint* du groupe proposé.

Ce groupe adjoint est d'une importance capitale, car il permet de trouver sous quelles conditions deux transformations ou deux sous-groupes du groupe proposé sont *homologues,* ce qui revient à les classer en divers *types*. Le problème se ramène, en représen-

tant une transformation $\sum_k e_k X_k f$ par un point de coordonnées homogènes $e_1, e_2, \ldots, e_r$ d'un espace à $r-1$ dimensions, à la détermination des multiplicités invariantes du groupe adjoint; il est d'ailleurs simple, car, la structure du groupe étant donnée, les transformations infinitésimales du groupe adjoint en résultent immédiatement. Parmi celles-ci, plusieurs peuvent se réduire à la transformation identique : ce sont celles qui correspondent aux *transformations distinguées* du groupe, c'est-à-dire échangeables avec toutes les autres; si un groupe d'ordre r a q transformations distinguées, son groupe adjoint est d'ordre $r-q$.

Ce qui précède fait ressortir l'utilité de l'étude des *Groupes linéaires homogènes*. M. Lie revient sur cette étude, commencée déjà dans la première Partie; il détermine les divers types de groupes linéaires homogènes à trois variables à l'aide de ceux des groupes projectifs du plan. Puis, dans un espace à $n-1$ dimensions, il étudie, en coordonnées homogènes, les points et plans invariants pour une transformation linéaire homogène donnée, et montre que les deux problèmes se ramènent l'un à l'autre, les points invariants en particulier, formant plusieurs multiplicités planes qui, deux à deux, n'ont aucun point commun. De plus, toute transformation laisse au moins un point invariant, puis, passant par ce point, au moins une droite; d'une façon générale, toute multiplicité plane invariante de p dimensions, étant contenue dans au moins une multiplicité invariante de $p+1$ dimensions. Cette propriété s'étend à certains groupes linéaires homogènes dont les transformations peuvent se mettre sous une forme $X_1 f, \ldots, X_r f$, telle que, pour p quelconque, $X_1 f, \ldots, X_p f$ forment un *sous-groupe invariant* de $X_1 f, \ldots, X_p f$, $X_{p+1} f$; et ceci, appliqué au groupe adjoint d'un groupe quelconque, conduit à la considération des *groupes intégrables,* dont le caractère est que leurs transformations infinitésimales peuvent se disposer comme les précédentes, et dont la propriété essentielle est que l'on peut, par une seconde simplification, les mettre sous une nouvelle forme $\overline{X}_1 f, \ldots, \overline{X}_r f$, telle que, pour p quelconque, $\overline{X}_1 f, \ldots, \overline{X}_p f$ soit maintenant un *sous-groupe invariant* du groupe total. On reconnaît qu'un groupe est intégrable en construisant son *groupe dérivé* formé par les $(X_i X_k)$, puis le groupe

dérivé du précédent, et ainsi de suite : si les ordres de ces groupes décroissent constamment et arrivent à zéro, le groupe est intégrable, et réciproquement.

Ces notions, *groupe intégrable, groupe dérivé,* sont très utiles dans l'étude des *structures.* Ainsi, l'on voit facilement que tout groupe à deux paramètres peut se mettre sous une forme ayant l'une des structures suivantes :

$$(X_1 X_2) = X_1 f \quad \text{ou} \quad (X_1 X_2) = 0;$$

puis, que toute transformation infinitésimale d'un groupe appartient à au moins un sous-groupe à deux paramètres; que tout sous-groupe à deux paramètres, à son tour, appartient à au moins un sous-groupe à trois paramètres et qu'en général tout sous-groupe intégrable à p paramètres appartient à au moins un sous-groupe à $p+1$ paramètres.

Les structures des groupes à trois paramètres s'obtiennent simplement : elles résultent d'une corrélation établie, par le crochet de deux transformations, entre les points et les droites du plan du groupe adjoint. Si la corrélation n'est pas évanouissante, le groupe adjoint laisse invariante, dans son plan, une conique et le groupe peut se mettre sous la forme

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f.$$

Dans tout autre cas, le groupe dérivé a deux paramètres au plus, et le groupe considéré est intégrable.

De même, pour les groupes à quatre paramètres, il y a lieu de distinguer entre les groupes non intégrables, lesquels contiennent un sous-groupe invariant non intégrable à trois paramètres, et peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{array}{lll} (X_1 X_2) = X_1 f, & (X_2 X_3) = X_3 f, & (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \\ (X_1 X_4) = 0, & (X_2 X_4) = 0, & (X_3 X_4) = 0, \end{array}$$

et les groupes intégrables, parmi lesquels il y a encore lieu de distinguer ceux qui contiennent des sous-groupes à trois paramètres *en involution* [de la forme $(X_1 X_2) = (X_2 X_3) = (X_1 X_3)(X_1 X_3)] = 0$.

Enfin, ces Chapitres se terminent par la théorie des invariants du groupe adjoint. Ces invariants peuvent toujours se mettre sous forme homogène, l'un d'eux, qui existe toujours, étant du premier

degré, de sorte que deux transformations finies engendrées par une même transformation infinitésimale ne sont jamais homologues; quant aux autres invariants, on peut les supposer d'ordre zéro : s'il n'y en a pas, deux transformations infinitésimales quelconques du groupe sont en général homologues.

Applications. Nombres complexes. — La première des applications qui terminent l'Ouvrage, avec laquelle nous ne quittons pas les groupes linéaires homogènes, est consacrée aux nombres complexes. Par définition, un *nombre complexe* est un symbole de la forme

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des nombres ordinaires, et les e de simples indices; l'*addition* satisfait aux lois *associative* et *commutative*

$$x + (y + z) = (x + y) + z \quad \text{et} \quad x + y = y + x;$$

la *multiplication* est définie par les produits

$$e_i e_k = \sum_s \gamma_{iks} e_s,$$

où les γ_{iks} sont des constantes; elle satisfait à la *loi distributive*

$$(x + y)(z + t) = xz + yz + xt + yt$$

et à la *loi associative*

$$x(yz) = (xy)z,$$

ce qui exige que les γ_{iks} satisfassent à certaines conditions. Elle ne satisfait pas nécessairement à la loi commutative.

Alors les simples formules

$$x' = xa, \quad x'' = x'b, \quad \text{d'où} \quad x'' = x(ab),$$

et

$$x' = ax, \quad x'' = bx', \quad \text{d'où} \quad x'' = (ba)x',$$

montrent qu'à tout système de nombres complexes sont associés deux *groupes linéaires homogènes et par rapport aux variables et par rapport aux paramètres,* ces groupes étant en outre *simplement transitifs* et identiques à leurs propres *groupes de paramètres.* Ces deux groupes sont *réciproques.*

Inversement, étant donné un groupe simplement transitif, li-

néaire et homogène en variables et paramètres, un simple changement de variables le rend identique à son groupe de paramètres : on a alors en évidence son groupe réciproque, lequel jouit des mêmes propriétés, et un système de nombres complexes qui leur correspond. C'est là une proposition due à M. Poincaré.

De son côté, M. Study, prenant deux groupes réciproques, simplement transitifs, linéaires et homogènes, a établi que l'on peut choisir des paramètres, tels qu'ils figurent sous forme linéaire et homogène, de sorte qu'il correspond encore à ces deux groupes un système de nombres complexes. Ces deux propositions, que rattache M. Scheffers, et dont il nous donne une démonstration fort élégante, ramènent la recherche des systèmes de nombres complexes à celle de certains groupes. En particulier, M. Scheffers nous donne le Tableau des systèmes de nombres complexes à deux et à trois unités.

Invariants. — Une seconde application, celle des *invariants différentiels,* se présente dans l'étude des familles de multiplicités obtenues en effectuant les transformations d'un groupe sur une multiplicité donnée. Par exemple, une courbe plane, soumise à tous les mouvements de son plan, engendre une famille définie par une équation différentielle où ne figurent que la courbure de la courbe et sa dérivée par rapport à l'arc, cela sauf deux cas particuliers, celui d'une circonférence ou d'une droite, et celui des *droites minima.*

Il en est de même, dans l'espace, relativement à une courbe gauche, pour ses rayons de courbure et de torsion, et leurs dérivées par rapport à l'arc. Ces éléments constituent une suite illimitée d'*invariants différentiels* de la courbe et sont reproduits par un élégant calcul, qui consiste dans la détermination des invariants de trois fonctions x, y, z d'une même variable arbitraire, λ, suivie de celle des fonctions de ces invariants qui constituent les invariants cherchés, c'est-à-dire qui ne changent pas par une transformation infinitésimale dépendant d'une fonction arbitraire $\alpha(\lambda)$

$$\delta\lambda = \alpha(\lambda)\,\delta t.$$

Deux classes particulières de courbes se mettent en évidence,

les *droites* et les *courbes minima*

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2=0.$$

Ces dernières exigent une étude spéciale qui conduit à des résultats véritablement nouveaux. Une telle courbe, ou mieux sa développable, étant définie par une relation entre deux paramètres, s et F, le premier fixant un point du cercle de l'infini, et le deuxième un plan tangent à ce cercle en ce point, on est ramené à chercher les invariants différentiels d'un groupe en s et F. Apparaissent alors plusieurs classes de développables minima : 1° les *cônes minima,* qui, en tant que courbes, ne donnent que les points de l'espace; 2° les *hélices minima,* tracées sur un cylindre circulaire droit, admettant une transformation du groupe, et dont une variété évanouissante est formée des *courbes minima du troisième ordre;* 3° et enfin les courbes minima générales, celles d'une même famille étant définies par une relation entre deux invariants différentiels J_5 et J_6 :

$$J_6=\varphi(J_5).$$

De la même manière, une surface quelconque engendre, par ses mouvements dans l'espace, une famille définie par un système d'équations, de forme variable suivant les cas, entre les rayons de courbure de la surface et leurs dérivées par rapport aux arcs des lignes de courbure.

D'une façon générale, le *problème de l'équivalence* de deux multiplicités, par rapport à un groupe fini et continu, est résolu par un nombre fini de criteriums, obtenus en formant les équations différentielles invariantes et les invariants différentiels du groupe. Toutes les multiplicités d'une même famille sont définies par un système d'équations entre les invariants; certaines familles sont formées de *multiplicités singulières :* elles satisfont à des équations invariantes et exigent une étude spéciale. Quant aux invariants, M. Lie indique un procédé remarquable qu'il donne depuis longtemps dans son enseignement, permettant, par la simple formation de déterminants fonctionnels, d'en obtenir de nouveaux, lorsqu'on en connaît quelques-uns; et, dans le cas au moins d'un groupe fini, ce procédé suffit pour les déduire tous d'un nombre limité d'entre eux.

Dans ce Chapitre, M. Lie montre encore comment la théorie des invariants et covariants des formes, en particulier des formes binaires, n'est autre chose qu'une étude des invariants d'un groupe, ce groupe étant obtenu en cherchant comment les coefficients de ces formes se transforment quand on effectue sur x et y une transformation linéaire et homogène. Partant de cette idée, on retrouve facilement, par exemple, tous les invariants et covariants, ainsi que leur signification, soit d'une forme quadratique, cubique ou biquadratique, soit d'un système de deux formes quadratiques.

Équations à solutions fondamentales. — Le dernier Chapitre du Volume, le plus intéressant peut-être, dans lequel on retrouve tout l'attrait qu'il y a à suivre M. Lie dans le développement de ses diverses théories, est consacré aux équations différentielles ordinaires dont la solution générale se déduit d'un nombre fini de solutions particulières. L'exemple le plus simple en est l'*équation de Riccati*

$$\frac{d\omega}{dz} = A(z) + \omega B(z) + \omega^2 C(z),$$

et pour tout lecteur familiarisé avec nos théories, la raison en est toute naturelle. Si l'on considère, en effet, dans un plan, ω comme une ordonnée sur une des droites $z =$ const., l'équation établit entre les points de deux de ces droites une correspondance qui est projective, la correspondance entre deux droites infiniment voisines définissant, de par la forme de l'équation, une transformation infinitésimale projective. De cette remarque résultent et la forme de la solution générale, et les simplifications connues apportées dans l'intégration par la connaissance d'une ou de deux solutions.

De là résulte aussi que, dans toute question où l'on a affaire à une simple infinité de multiplicités à une dimension, dont les éléments soient liés par une correspondance projective, la recherche des trajectoires de ces éléments dépend d'une équation de Riccati : c'est le cas des lignes asymptotiques des surfaces réglées.

Les mêmes considérations s'appliquent soit au système

$$\frac{dx}{dz} = A + Bx + Cy + x(Hx + Ky),$$
$$\frac{dy}{dz} = D + Ex + Fy + y(Hx + Ky),$$

à coefficients fonctions de z, et à ses cas particuliers où les équations sont linéaires ou linéaires et homogènes, soit au système

$$\frac{dx_1}{dz} = \alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 x_3,$$
$$\frac{dx_2}{dz} = \alpha_2 x_1 + \beta_2 x_2 + \gamma_2 x_3,$$
$$\frac{dx_3}{dz} = \alpha_3 x_1 + \beta_3 x_2 + \gamma_3 x_3,$$

à coefficients fonctions de z. Chacun de ces systèmes établit une correspondance projective entre les plans $z = \text{const.}$, x et y étant, dans le premier cas, les coordonnées absolues d'un point de ce plan, et, dans le second cas, x_1, x_2, x_3 ses coordonnées homogènes.

La solution générale est, dans le premier cas,

$$x = \frac{a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1}{a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3}, \qquad y = \frac{a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2}{a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3},$$

et, dans le second,

$$x_1 = A_1 x_{10} + B_1 x_{20} + C_1 x_{30},$$
$$x_2 = A_2 x_{10} + B_2 x_{20} + C_2 x_{30},$$
$$x_3 = A_3 x_{10} + B_3 x_{20} + C_3 x_{30},$$

où x_0, y_0, x_{10}, x_{20}, x_{30} sont les constantes arbitraires.

La connaissance, soit d'une *courbe intégrale,* soit d'une *surface intégrante,* engendrée par des courbes intégrales, c'est-à-dire d'une relation entre x_1, x_2, x_3, permet de simplifier l'intégration. Il y a lieu, dans le cas d'une surface intégrante, de distinguer plusieurs cas, suivant que ses intersections par les plans $z = \text{const.}$ sont des courbes admettant ou n'admettant pas de transformation projective. Ce dernier cas se présente, en particulier, lorsque la relation en x_1, x_2, x_3 est linéaire ou du second degré : parmi les simplifications alors obtenues se trouvent entre autres celles établies par M. Darboux ([1]). Si les courbes n'admettent pas de transformation projective, la correspondance entre tous les plans est complètement déterminée, et une seule quadrature permet d'effectuer l'intégration.

Ces problèmes conduisent au suivant : Rechercher pour quels

([1]) DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. I, Liv. I, Chap. II.

systèmes d'équations différentielles ordinaires

$$(1)\qquad \frac{dx_i}{dz} = \eta_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, z),$$

la solution générale peut se déduire de m solutions particulières par les formules

$$(2)\qquad x = \varphi(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, a_1, a_2, \ldots, a_n),$$

les a étant des constantes arbitraires. Mettant ces relations (2) sous la forme

$$(2')\qquad J_i(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}, \ldots, x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}, x_1, \ldots, x_n) = a_i,$$

les n fonctions J, formées avec $m+1$ intégrales *quelconques* sont des constantes, et, par suite, satisfont à l'équation

$$Uf = \sum \eta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(1)}} + \ldots + \sum_i \eta_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial x_i^{(m)}} + \sum_i \eta_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = 0;$$

ou encore, la transformation infinitésimale Uf, à $(m+1)n$ variables, et dépendant d'un paramètre z, doit admettre n invariants J, indépendants de z, et réciproquement la condition est suffisante. Ceci exprime, d'après la forme de Uf, que la transformation infinitésimale

$$Yf = \sum_i \eta_i(x_1, \ldots, x_n, z) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

appartient, quel que soit z, à un groupe $X_1 f, \ldots, X_r f$, à r paramètres en $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$X_k f = \sum_i \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

de sorte que l'on a

$$Yf = \sum_{k=1}^{k=r} Z_k(z) X_k f,$$

ou encore que le système (1) est de la forme

$$\frac{dx_i}{dz} = \sum_{k=1}^{k=r} \xi_{ki}(x_1, x_2, \ldots, x_n) Z_k(z),$$

à coefficients fonctions de z. On a ainsi une dernière application

de la théorie des groupes, et dans la recherche de ces systèmes, et dans leur intégration.

En résumé, les deux Livres publiés par M. Scheffers, sous l'inspiration de M. Lie, initient le lecteur sur presque tous les points de la théorie des groupes, et peuvent même lui suffire en vue des applications; mais ils ne le dispenseront pas cependant d'avoir recours au vaste et patient travail de MM. Lie et Engel (¹) et surtout, et c'est peut-être là leur principal mérite, ils lui permettront d'en apprécier toute la portée et toutes les qualités.

A. Tresse.

MÉLANGES.

SUR LE PROBLÈME DE L'INVERSION DE JACOBI;

Par M. E. GOURSAT.

Le théorème d'Abel permet de démontrer directement, sans avoir recours à la théorie générale des équations différentielles, que le problème de l'inversion des intégrales abéliennes, connu sous le nom de *problème de Jacobi,* conduit à des fonctions *uniformes* de p variables.

Soient

$$F(x, y) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe algébrique de degré m et de genre p, et $w_1(x, y)$, ..., $w_p(x, y)$ les p intégrales normales de première espèce attachées à cette courbe. Prenons deux groupes de q points analytiques (α_1, β_1), ..., (α_q, β_q) et (γ_1, δ_1), ..., (γ_q, δ_q), que nous supposerons, pour fixer les idées, à distance finie et distincts des points de ramification. Le théorème d'Abel, appliqué aux intégrales de première espèce, peut s'énoncer ainsi : *pour qu'il*

(¹) *Theorie der Transformationsgruppen*, unter Mitwirkung von Dr F. Engel, bearbeitet von Sophus Lie, 3 vol. *Voir* dans le *Bulletin* les comptes rendus qui en ont été publiés par MM. Vessiot et de Tannenberg, pour le vol. I (t. XIV, 1890) et par M. Vessiot pour les deux autres (t. XV, 1891, et t. XVIII, 1894).

existe une fonction rationnelle $\Phi(x, y)$ du point analytique (x, y), admettant les points (α_i, β_i) pour zéros et les points (γ_i, δ_i) pour pôles du premier ordre, il faut et il suffit que l'on ait

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{p} w_h(\alpha_i, \beta_i) \equiv \sum_{i=1}^{p} w_h(\gamma_i, \delta_i), \qquad (h = 1, 2, \ldots, p);$$

le signe $\equiv$ indique l'égalité à des multiples près des périodes.

Cela posé, considérons le système d'équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} dw_1 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} dw_1 + \ldots + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_p, y_p)} dw_1 = v_1, \\ \displaystyle\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} dw_2 + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} dw_2 + \ldots + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_p, y_p)} dw_2 = v_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \displaystyle\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} dw_p + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} dw_p + \ldots + \int_{(x_0, y_0)}^{(x_p, y_p)} dw_p = v_p; \end{array}\right.$$

le point essentiel à établir, c'est qu'à un système de valeurs *arbitraires* pour $v_1, v_2, \ldots, v_p$, il ne peut correspondre plusieurs systèmes de points analytiques $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$. Supposons, en effet, que deux systèmes de points analytiques (x_i, y_i) et (x'_i, y'_i) $(i = 1, 2, \ldots, p)$ donnent les mêmes valeurs pour $v_1, v_2, \ldots, v_p$. On aurait les p relations

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{p} w_h(x'_i, y'_i) = \sum_{i=1}^{p} w_h(x_i, y_i), \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

qui expriment les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction rationnelle $\Phi(x, y)$ admettant pour pôles du premier ordre les p points $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$ et pour zéros les p points $(x'_1, y'_1), \ldots, (x'_p, y'_p)$. Or, si une fonction rationnelle ne devient infinie du premier ordre qu'en p points seulement, on sait qu'on peut faire passer par ces p pôles une courbe adjointe de degré $m - 3$. Cette courbe adjointe rencontre la courbe proposée en $p - 2$ autres points simples $(\alpha_1, \beta_1), \ldots, (\alpha_{p-2}, \beta_{p-2})$, et l'on voit que $v_1, v_2, \ldots, v_p$ devraient être de la forme

$$(5)\qquad v_1 = 2K_1 - \sum_{h=1}^{p-2} w_1(\alpha_h, \beta_h), \qquad \ldots, \qquad v_p = 2K_p - \sum_{h=1}^{p-2} w_p(\alpha_h, \beta_h),$$

$2K_i$ désignant la somme constante des valeurs de l'intégrale de première espèce $w_i(x, y)$ aux $2p-2$ points d'intersection, différents des points doubles, de la courbe donnée avec une courbe adjointe de degré $m-3$. Par conséquent, *si les valeurs de* v_1, $v_2, \ldots, v_p$ *ne sont pas de la forme* (5), *il ne peut y avoir plus d'un système de points analytiques vérifiant les équations* (3). Mais, si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont de la forme (5), il y a une infinité de systèmes de p points analytiques répondant à la question. En effet, si l'on fait passer par les $p-2$ points (α_h, β_h) une courbe adjointe d'ordre $m-3$, elle rencontre la courbe proposée en p autres points, distincts des points doubles, qui, d'après le théorème d'Abel, satisfont bien aux équations (3). En résumé, lorsqu'on fait décrire aux variables indépendantes $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des contours fermés dans leurs plans respectifs, les p points analytiques $(x_1, y_1), \ldots, (x_p, y_p)$ ne peuvent que s'échanger entre eux, sauf pour les valeurs de la forme (5) où il y a indétermination. Toute fonction rationnelle symétrique des coordonnées de ces p points est donc une fonction *uniforme* des p variables indépendantes $v_1, v_2, \ldots, v_p$, devenant indéterminée pour des valeurs de la forme (5).

Si le genre p est égal à un, le raisonnement doit être modifié. Soit $w(x, y)$ l'intégrale de première espèce; si cette intégrale reprenait la même valeur, à une période près, en deux points analytiques différents (α, β) et (γ, δ), il existerait, d'après le théorème d'Abel, une fonction rationnelle du point analytique (x, y) admettant un seul pôle du premier ordre, le point (α, β), et un seul zéro du premier ordre, le point (γ, δ). Soit $\varphi(x, y)$ cette fonction rationnelle; la fonction rationnelle $\varphi(x, y)-\lambda$ aurait aussi, quelle que soit la constante λ, un seul pôle du premier ordre (α, β), et, par suite, un seul zéro. Les cooordonnées de ce zéro seraient donc des fonctions rationnelles du paramètre λ, et la courbe considérée devrait être unicursale.

SUR LA RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE DES ÉQUATIONS DE DEGRÉ PREMIER;

PAR M. J. DOLBNIA.

Nous avons l'intention d'indiquer ici un théorème au moyen duquel on peut résoudre par radicaux les équations de cinquième et septième degré, à l'aide d'un nombre fini d'opérations, si ces équations possèdent le groupe de Galois.

Prenons une équation algébrique irréductible

$$x^n + px^{n-2} + qx^{n-3} + \ldots + rx + s = 0,$$

de degré premier n à coefficients entiers

$$p, \quad q, \quad \ldots, \quad r, \quad s.$$

Formons une fonction linéaire des racines

$$R_1 = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \ldots + \alpha^\rho x_\rho + \ldots + \alpha^{n-1} x_{n-1},$$

où α est une racine imaginaire de l'équation binome

$$\alpha^n - 1 = 0;$$

ρ est une racine primitive du nombre premier n.

Désignons les substitutions fondamentales du groupe linéaire

$$\binom{az+b}{z}$$

par

$$S = \binom{z+1}{z},$$

$$T = \binom{\rho z}{z}.$$

Soit

$$T(R_1) = R_\rho, \qquad T(R_\rho) = R_{\rho^2}, \qquad \ldots.$$

THÉORÈME I. — *Si à la fonction*

$$R_{\rho^k} = x_0 + \alpha x_{\rho^k} + \alpha^2 x_{2\rho^k} + \ldots$$

nous appliquons la substitution

$$S = \binom{z+1}{z},$$

nous aurons

$$S(R_{\rho^k}) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2k}{2}}} R_{\rho^k}.$$

En effet nous avons

$$S(R_{\rho^k}) = x_1 + \alpha x_{\rho^k+1} + \ldots + \alpha^\mu x_{\mu\rho^k+1} + \ldots$$
$$+ \alpha^\nu x_{\nu\rho^k+1} + \ldots + \alpha^\pi x_{\pi\rho^k+1} + \ldots.$$

Soit

$$\mu\rho^k + 1 \equiv \rho^k \quad (\bmod n),$$

alors

$$\mu \equiv \rho^{\frac{n-1-2k}{2}} + 1 \quad (\bmod n).$$

Si nous avons

$$\nu\rho^k + 1 \equiv 2\rho^k,$$

alors

$$\nu \equiv \rho^{\frac{n-1-2k}{2}} + 2;$$

de même

$$\pi \equiv \rho^{\frac{n-1-2k}{2}} + 3,$$

si

$$\pi\rho^k + 1 \equiv 3\rho^k \quad (\bmod n);$$

donc

$$S(R_{\rho^k}) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2k}{2}}} (\alpha x_{\rho^k} + \alpha^2 x_{2\rho^k} + \alpha^3 x_{3\rho^k} + \ldots),$$

donc

$$S(R_{\rho^k}) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1-2k}{2}}} R_{\rho^k}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. — *Si nous changeons α en α^ρ, la série*

$$R_1, \quad R_\rho, \quad R_{\rho^2}, \quad \ldots, \quad R_{\rho^{n-2}}$$

est remplacée par la série

$$R_{\rho^{n-2}}, \quad R_1, \quad R_\rho, \quad \ldots, \quad R_{\rho^{n-3}},$$

c'est-à-dire tous les indices se multiplient par ρ^{n-2}.

En effet, nous avons

$$R_{\rho^k} = x_0 + \alpha x_{\rho^k} \alpha^2 x_{2\rho^k} + \ldots = f(\alpha).$$

En remplaçant ici α par α^ρ, nous aurons

$$f(\alpha^\rho) = x_0 + \alpha^\rho x_{\rho^k} + \alpha^{2\rho} x_{2\rho^k} + \ldots + \alpha^{\mu\rho} x_{\mu\rho^k} + \ldots$$
$$+ \alpha^{\nu\rho} x_{\nu\rho^k} + \ldots + \alpha^{\pi\rho} x_{\pi\rho^k} + \ldots.$$

Si nous avons

$$\begin{array}{ll} \mu\rho \equiv 1 & (\mathrm{mod}\, n), \\ \nu\rho \equiv 2 & \text{»} \\ \pi\rho \equiv 3 & \text{»} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots, \end{array}$$

alors

$$f(\alpha^\rho) = x_0 + \alpha x_{\rho^{k-1}} + \alpha^2 x_{2\rho^{k-1}} + \alpha^3 x_{3\rho^{k-1}} + \ldots$$

ou

$$f(\alpha^\rho) = R_{\rho^{k-1}} = R_{\rho^k \rho^{n-2}},$$

c'est-à-dire du changement de α en α^ρ la fonction R_{ρ^k} se transforme en $R_{\rho^{k-1}}$, c'est-à-dire l'indice ρ^k se multiplie par ρ^{n-2}.

Formons la fonction des racines

$$\zeta_1(\alpha) = R_1 R_{\rho^2} R_{\rho^4} \ldots R_{\rho^{n-3}} + R_\rho R_{\rho^3} \ldots R_{\rho^{n-2}}.$$

Cette fonction ne change pas évidemment par la substitution

$$T = \binom{\rho z}{z}.$$

En appliquant à $\zeta_1(\alpha)$ la substitution

$$S = \binom{z+1}{z},$$

nous obtiendrons

$$S\zeta_1(\alpha) = \alpha^{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_1 \alpha^{\rho^{\frac{n-5}{2}}} R_{\rho^2} \ldots \alpha^{\rho^{\frac{n+3}{2}}} R_{\rho^{n-3}}$$
$$+ \alpha^{\rho^{\frac{n-3}{2}}} R_\rho \alpha^{\rho^{\frac{n-1}{2}}} R_{\rho^3} \ldots \alpha^{\rho^{\frac{n+1}{2}}} R_{\rho^{n-2}}.$$

En remarquant que

$$\left.\begin{array}{l} 1 + \rho^2 + \rho^4 + \ldots + \rho^{n-2} \equiv 0 \\ \rho + \rho^3 + \rho^5 + \ldots + \rho^{n-3} \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, n),$$

nous concluons que

$$\left.\begin{array}{l} \rho^{\frac{n-1}{2}} + \rho^{\frac{n-5}{2}} + \ldots + \rho^{\frac{n+8}{2}} \equiv 0 \\ \rho^{\frac{n-3}{2}} + \rho^{\frac{n-7}{2}} + \ldots + \rho^{\frac{n+1}{2}} \equiv 0 \end{array}\right\} \quad (\mathrm{mod}\, n);$$

par conséquent

$$S\zeta_1(\alpha) = \zeta_1(\alpha).$$

Ainsi $\zeta_1(\alpha)$ ne s'altère pas par les substitutions du groupe

$$\begin{pmatrix} az+b \\ z \end{pmatrix}.$$

De telles fonctions, après Kronecker, se nomment *métacycliques*. En outre, il est facile de prouver que $\zeta_1(\alpha)$ ne dépend pas de α. En effet, en changeant α en α^ρ, nous avons

$$\zeta_1(\alpha^\rho) = R_{\rho^{n-3}} R_\rho R_{\rho^3} \ldots R_{\rho^{n-4}} + R_1 R_{\rho^2} R_{\rho^4} \ldots R_{\rho^{n-3}} = \zeta_1(\alpha).$$

D'où il est clair que

$$\zeta_1(\alpha) = \zeta_1(\alpha^\rho) = \zeta_1(\alpha^{\rho^2}) = \ldots$$

Si l'équation proposée est résoluble par radicaux, $\zeta_1(\alpha)$ est un nombre entier, c'est-à-dire une racine entière de la résolvante de degré

$$1.2.3\ldots(n-2),$$

dont les coefficients sont des nombres entiers connus.

De même il est facile de prouver que

$$(R_1 R_{\rho^2} R_{\rho^4} \ldots R_{\rho^{n-3}} - R_\rho R_{\rho^3} R_{\rho^5} \ldots R_{\rho^{n-2}})^2 = \zeta'_1$$

est un nombre entier connu, par conséquent

$$R_1 R_{\rho^2} R_{\rho^4} \ldots R_{\rho^{n-3}} = \frac{1}{2}(\zeta_1 + \sqrt{\zeta'_1}),$$

$$R_\rho R_{\rho^3} R_{\rho^5} \ldots R_{\rho^{n-2}} = \frac{1}{2}(\zeta_1 - \sqrt{\zeta'_1}).$$

Les fonctions

$$(R_1^n + R_{\rho^2}^n + \ldots + R_{\rho^{n-3}}^n) + (R_\rho^n + R_{\rho^3}^n + \ldots + R_{\rho^{n-2}}^n) = \zeta_2,$$
$$[(R_1^n + R_{\rho^2}^n + \ldots + R_{\rho^{n-3}}^n) - (R_\rho^n + R_{\rho^3}^n + \ldots + R_{\rho^{n-2}}^n)]^2 = \zeta'_2$$

appartiennent aussi à la catégorie des fonctions métacycliques et ne dépendent pas de α; par conséquent elles se trouveront comme les racines entières des résolvantes de degré

$$1.2.3\ldots(n-2).$$

Par cette raison nous aurons

$$R_1^n + R_{\rho^2}^n + \ldots + R_{\rho^{n-3}}^n = \frac{1}{2}(\zeta_2 + \sqrt{\zeta'_2}),$$

$$R_\rho^n + R_{\rho^3}^n + \ldots + R_{\rho^{n-2}}^n = \frac{1}{2}(\zeta_2 - \sqrt{\zeta'_2});$$

ζ_2 et ζ'_2 sont des nombres entiers connus.

Par des considérations semblables nous verrons que les fonctions

$$(R_1^n R_{\rho^2}^n + R_1^n R_{\rho^4}^n + \ldots + R_{\rho^{n-3}}^n R_{\rho^{n-2}}^n)$$
$$+(R_\rho^n R_{\rho^3}^n + R_\rho^n R_{\rho^5}^n + \ldots + R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n) = \zeta_3,$$
$$[(R_1^n R_{\rho^2}^n + \ldots + R_{\rho^{n-3}}^n R_{\rho^{n-2}}^n) - (R_\rho^n R_{\rho^3}^n + \ldots + R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n)]^2 = \zeta_3'$$

sont des nombres entiers connus.

Par conséquent

$$R_1^n R_{\rho^2}^n + R_1^n R_{\rho^4}^n + \ldots + R_{\rho^{n-3}}^n R_{\rho^{n-2}}^n = \frac{1}{2}(\zeta_3 + \sqrt{\zeta_3'}),$$
$$R_\rho^n R_{\rho^3}^n + \ldots + R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n = \frac{1}{2}(\zeta_3 - \sqrt{\zeta_3'}).$$

De même on trouvera

$$R_1^n R_{\rho^2}^n R_{\rho^4}^n + \ldots + R_{\rho^{n-7}}^n R_{\rho^{n-5}}^n R_{\rho^{n-3}}^n = \frac{1}{2}(\zeta_4 + \sqrt{\zeta_4'}),$$
$$R_\rho^n R_{\rho^3}^n R_{\rho^5}^n + \ldots + R_{\rho^{n-6}}^n R_{\rho^{n-4}}^n R_{\rho^{n-2}}^n = \frac{1}{2}(\zeta_4 - \sqrt{\zeta_4'}),$$

....

D'où il est clair que la résolution de l'équation proposée dépend des deux équations suivantes

$$(1) \quad \begin{cases} \xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2}(\zeta_2 + \sqrt{\zeta_2'})\xi^{\frac{n-3}{2}} \\ \quad + \frac{1}{2}(\zeta_3 + \sqrt{\zeta_3'})\xi^{\frac{n-5}{2}} + \ldots \pm \frac{1}{2^n}(\zeta_1 + \sqrt{\zeta_1'})^n = 0, \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \xi^{\frac{n-1}{2}} - \frac{1}{2}(\zeta_2 - \sqrt{\zeta_2'})\xi^{\frac{n-3}{2}} \\ \quad + \frac{1}{2}(\zeta_3 - \sqrt{\zeta_3'})\xi^{\frac{n-5}{2}} - \ldots \pm \frac{1}{2^n}(\zeta_1 - \sqrt{\zeta_1'})^n = 0. \end{cases}$$

Donc nous aurons le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Si l'équation irréductible de degré premier n, à coefficients entiers, est résoluble algébriquement, sa résolution dépend de l'équation du degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients sont des quantités de la forme*

$$a + \sqrt{b},$$

où a et b sont des nombres entiers; ces nombres peuvent toujours être définis à l'aide du nombre fini d'opérations.

Application. — Si l'équation du cinquième degré est résoluble par radicaux, sa résolution dépend des deux équations du deuxième degré

$$\xi^2 - \frac{1}{2}(\zeta_2 + \sqrt{\zeta'_2})\xi + \frac{1}{2^5}(\zeta_1 + \sqrt{\zeta'_1}) = 0,$$

$$\xi^2 - \frac{1}{2}(\zeta_2 - \sqrt{\zeta'_2})\xi + \frac{1}{2^5}(\zeta_1 - \sqrt{\zeta'_1}) = 0.$$

Ici nous aurons

$$\zeta_1 = R_1 R_4 + R_2 R_3 = -5p \text{ (1)},$$

$$\begin{aligned} \zeta'_1 &= (R_1 R_4 - R_2 R_3)^2 \\ &= (\alpha + \alpha^4 - \alpha^2 - \alpha^3)(x_0 x_1 - x_0 x_2 - x_0 x_3 + x_0 x_4 + x_1 x_2 \\ &\qquad - x_1 x_3 - x_1 x_4 + x_2 x_3 - x_2 x_4 + x_3 x_4)^2 = 5\,\mathrm{J}, \end{aligned}$$

où J est la fonction métacyclique connue de *Jacobi* (2). Le calcul de cette fonction a été l'objet des recherches de plusieurs auteurs.

Les fonctions

$$\zeta_2 = (R_1^5 + R_4^5) + (R_2^5 + R_3^5),$$

$$\zeta'_2 = [(R_1^5 + R_4^5) + (R_2^5 + R_3^5)]^2$$

appartiennent aussi à la catégorie des fonctions métacycliques et peuvent être calculées comme la fonction de Jacobi.

Si l'équation du septième degré est résoluble par radicaux, sa résolution dépend des équations du troisième degré dont les coefficients peuvent être définis de la même manière.

---

(1) *Bulletin des Sc. mathém.*, t. XVIII, p. 135.

(2) *Gesammelte Werke*, B. III, p. 276-278.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

D'OCAGNE (M.). — LE CALCUL SIMPLIFIÉ PAR LES PROCÉDÉS MÉCANIQUES ET GRAPHIQUES. Conférences faites au Conservatoire national des Arts et Métiers. 1 vol. in-8°; 118 p., 38 fig. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894.

Les méthodes et les mécanismes que l'on a inventés pour faciliter les calculs numériques offrent souvent, comme on sait, un grand intérêt théorique ou pratique et l'on a, pour les réaliser, dépensé des trésors d'ingéniosité. Si, toutefois, il s'agit d'un mécanisme, ceux-là seuls qui, comme l'on dit, *sont du métier*, sont capables de s'intéresser à tous les détails de transformation de mouvement; c'est le principe seul qui intéresse les autres, et une description détaillée risque de les rebuter. Ces derniers, qui sont, à ce que je crois, fort nombreux, liront avec intérêt le petit Livre de M. Maurice d'Ocagne, dont la clarté et la simplicité les charmeront. L'auteur passe aussi en revue les procédés de simplification, autres que les mécanismes; on sait quelle étude approfondie il a faite naguère des procédés graphiques ([1]). De toutes ces méthodes d'ailleurs, il se borne ici à donner le principe, dans un langage dénué de tout appareil scientifique, qui peut être facilement compris de tout homme cultivé.

L'auteur a adopté la classification suivante :

1° Instruments et machines arithmétiques; 2° Instruments logarithmiques; 3° Tracés graphiques; 4° Tables numériques ou barèmes; 5° Tables graphiques ou abaques.

Dans chacun de ces groupes il a choisi des exemples variés, particulièrement caractéristiques, et en donne une description sommaire, bien que suffisante pour faire nettement ressortir l'économie et l'intérêt de chaque procédé.

Ces descriptions, présentées sous forme d'une causerie dépourvue de tout appareil mathématique, de façon à s'adresser au public en général, sont complétées par de curieuses indications historiques, peu connues pour la plupart.

([1]) Voir *Bulletin*, t. XV_1, p. 297.

Il est fort intéressant, en particulier, de voir par quelles transitions a successivement passé le type primitif de la machine de Pascal pour aboutir à celles de Thomas, de Bollée, de Babbage, de Scheutz, ..., cette dernière *calculant* automatiquement et *imprimant* des Tables de logarithmes!

Le volume contient aussi, sous forme d'une Notice séparée, la première description détaillée qui ait été donnée de la curieuse machine de Tchebichef, à mouvement continu.

Non moins intéressants sont les renseignements fournis sur les instruments (règles, cercles, hélices, cylindres à calcul) fondés sur l'emploi des échelles logarithmiques et que l'auteur ramène à un petit nombre de types bien caractérisés.

On trouve dans la dernière conférence des indications très précises et très détaillées, bien que données sans aucun secours de l'Analyse, sur le mode d'emploi et les avantages des diverses espèces d'abaques dont la théorie générale a été naguère constituée par l'auteur lui-même sous le nom de *Nomographie*.

MÉLANGES.

SUR LE MATHÉMATICIEN FRANÇAIS CHAUVEAU;

PAR M. PAUL TANNERY.

Dans le Tome III de la *Correspondance de Huygens* (La Haye, 1890), figure sous le n° 849 (p. 258-259) une solution par Jacq. Buot d'un problème de Géométrie élémentaire « proposé par M. Chauveau le 10 mars 1661 ». Les savants éditeurs ont mis en note : « Peut-être l'auteur de ce problème est-il François Chauveau, né en 1621 à Paris, où il mourut le 3 février 1676. Il était dessinateur et graveur, et entra à l'Académie en 1663. »

Cette hypothèse me paraît devoir être écartée; il n'y a aucun indice qui permette de croire que François Chauveau ([1]), artiste très fécond (il a gravé plus de trois mille pièces), se soit adonné

([1]) Né le 10 mai 1613, d'après la *Grande Encyclopédie*.

à la Géométrie et en soit venu à proposer des problèmes que les professeurs de Mathématiques ne dédaignaient pas de résoudre. Nous avons au contraire des preuves très nettes de l'existence à Paris, vers le milieu du XVIIe siècle, d'un mathématicien de profession du nom de Chauveau.

Tout d'abord une lettre de Descartes à Mersenne, écrite vers le 28 février 1641 (éd. Clerselier, II, 53, p. 291; éd. Cousin, VIII, p. 491 et suiv.), où on lit ce qui suit :

« J'ay connu autresfois un M. Chauueau à la Flèche, qui estoit de Melun; je seray bien aise de sçauoir si ce ne seroit point celuy-là qui enseigne les Mathematiques à Paris; mais je croy qu'il s'alla rendre Jesuite, et nous estions luy et moy fort grands amis. »

Comme ce nom ne reparaît pas dans la *Correspondance de Descartes,* on peut croire que le professeur n'était pas en fait son ancien condisciple de La Flèche. Quoi qu'il en soit au reste à cet égard, j'ai retrouvé le même nom mentionné dans une lettre inédite adressée par Mylon, le 23 février 1645, à Mersenne alors en Italie et qui demandait à ses amis de Paris des propositions à communiquer. « M. Chauveau propose cette-cy : Estant donnés la superficie et les trois côtés d'un quadrilatère inscriptible dans un cercle, trouver le quadrilatère et donner le plus grand (Bibl. Nat., MS. fr., n. a. 6204, p. 232). »

Il s'agit là d'un problème *solide,* qui, pour l'époque, n'était pas sans intérêt.

Dans la même collection de lettres inédites à Mersenne (MS. fr., n. a. 6205, p. 446), se trouve un billet de Duverdus, l'élève de Roberval auquel on doit la rédaction de la méthode des tangentes (*Anciens Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. VI). Ce billet est curieux en ce qu'il indique une certaine jalousie entre Roberval et Chauveau et qu'il a pu donner à Mersenne l'occasion de parler à Descartes du second de ces mathématiciens. Aussi je serais tenté de dater ce billet de 1640 ou 1641. Le voici in extenso avec son orthographe :

« Mon trez Reuerend Pere,

Je vis l'autre jour M. Chauuot et l'obligé a me promettre quelque explication sur l'algebre de M. Descartes, laquelle je ne manque-

ray pas de vous communiquer dez que je l'auray eüe : mais pource que j'aprehande que sy M. Chauuot venoit à sçavoir que j'ay desia donné cette peine à M. de Roberual, qu'il ne se communiqueroit pas sy librement, soit qu'il ne voulut pas qu'un escolier d'un autre apprit ses secrets, soit qu'il creut que j'en sceusse plus qu'en effect je n'en ay jamais appris, je vous prieray, s'il vous plaist, trez humblement de me faire la faueur de ne parler point à M. de Rob. de M. Chauuot ny à M. Chau. de M. Rob. Pour ce qui est des cartes que je vous avois promis, j'en ay desia taillé une partie et pour ce que je vous les veux donner les plus justes qu'il se pourra, je ne vous les enuoyeray que dans cincq ou six jours que je me donneray l'honneur de vous voir. C'est, mon trez Reuerend Pere,

Vostre trez humble et obéissant
serviteur,

Du Verdus. »

Il n'est peut-être guère à espérer que l'on puisse trouver des indications réellement biographiques sur ce mathématicien Chauveau ; il ne semble avoir composé aucun Ouvrage et son rôle fut évidemment secondaire; cependant c'était sans aucun doute un professeur estimé et jouissant à Paris d'une certaine notoriété (¹). Mais c'est à peu près aussi tout ce que l'on peut dire, par exemple, de Pierre Hérigone, sur lequel M. Gino Loria a récemment appelé l'attention dans ce Bulletin; Hérigone est pourtant, lui, l'auteur d'un Ouvrage réellement remarquable au moins au point de vue pédagogique. Quand on voit les éditeurs de la *Correspondance de Huygens* parvenir à donner des renseignements précis sur presque tous les contemporains hollandais de leur grand compatriote, qui ont été en relations avec lui, on ne peut que regretter de voir combien peu on est, en France, en mesure de faire des recherches fructueuses du même genre. La publication, certainement très désirable, du *Recueil des Lettres de Mersenne,* que possède la

(¹) Dans le *Traité des coniques* de Desargues, qui est de 1639, Chauveau est mentionné (page 225 de l'édition Poudra) comme ayant conçu « depuis peu de jours, un instrument bien simple et d'autant plus gentil » pour le tracé de toutes les coniques.

Bibliothèque Nationale, ne pourrait malheureusement se faire sans poser presque autant de nouveaux points d'interrogation qu'elle permettrait par exemple d'en résoudre pour la *Correspondance de Descartes.*

QUELQUES REMARQUES SUR LES INTÉGRALES PARTIELLES

PAR M. ÉTIENNE DELASSUS,
Professeur au Lycée de Douai.

Dans une fonction dépendant de deux constantes arbitraires α, β, remplaçons β par une fonction arbitraire de α, soit $V(\alpha)$ et intégrons par rapport à α entre deux limites réelles qui peuvent dépendre des variables, nous aurons des symboles que nous appellerons des *intégrales partielles,* et que nous voulons étudier.

THÉORÈME I. — *Si* $F(\alpha, \beta)$ *dépend effectivement de* β, *il est impossible que* $S = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F[\alpha, V(\alpha)]d\alpha$ *ait une valeur indépendante de* $V(\alpha)$.

Supposons que S ne dépende pas de V. Prenons arbitrairement $V_1(\alpha)$ et $\theta(\alpha)$; posons

$$\psi(\alpha) = V_1(\alpha) - \theta(\alpha),$$

et considérons la fonction dépendant d'une constante arbitraire,

$$V(\alpha) = a\,\theta(\alpha) + \psi(\alpha).$$

Si l'on prend cette fonction V, S ne dépendra pas de a, donc

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(\alpha, V)\,\theta(\alpha)\,d\alpha = 0,$$

en posant $\frac{\partial F}{\partial \beta} = \Phi(\alpha, \beta)$. En particulier, faisons $a = 1$, on aura

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Phi(\alpha, V_1)\,\theta(\alpha)\,d\alpha = 0.$$

Mais V_1 et θ ont été choisies arbitrairement, ce qui prouve immé-

diatement que l'on doit avoir

$$\Phi(\alpha, V_1) = 0,$$

quelle que soit la fonction V, ce qui veut dire que F ne contient pas β.

Relations entre des intégrales partielles dépendant de la même fonction arbitraire. — Soient n intégrales

$$S_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_1[\alpha, V(\alpha)]\, d\alpha, \quad \ldots, \quad S_n = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n[\alpha, V(\alpha)]\, d\alpha,$$

dont tous les éléments contiennent V. Admettons qu'il existe entre elles une relation

$$\mathfrak{F}(S_1, S_2, \ldots, S_n) = 0,$$

vérifiée quelle que soit la fonction V.

Posons toujours, pour abréger, $\frac{\partial F_i}{\partial \beta} = \Phi_i(\alpha, \beta)$.

Soient $n+1$ fonctions de α choisies arbitrairement

$$\varphi_1(\alpha), \quad \varphi_2(\alpha), \quad \ldots, \quad \varphi_n(\alpha), \quad \varphi_{n+1}(\alpha),$$

et considérons la fonction V dépendant de n constantes arbitraires

$$V(\alpha) = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_n\varphi_n + \varphi_{n+1};$$

les S deviendront n fonctions des n variables a et il y aura entre elles une relation indépendante de a; de sorte que le déterminant fonctionnel sera nul.

$$\begin{vmatrix} \int \Phi_1\varphi_1\, d\alpha & \ldots & \int \Phi_n\varphi_1\, d\alpha \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \int \Phi_1\varphi_n\, d\alpha & \ldots & \int \Phi_n\varphi_n\, d\alpha \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (A_1\Phi_1 + A_2\Phi_2 + \ldots + A_n\Phi_n)\varphi_1\, d\alpha = 0,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ désignant les mineurs relatifs à la première ligne.

Je dis que la parenthèse doit être nulle quels que soient les a et, pour cela, je vais démontrer qu'elle est nulle pour les valeurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ attribuées aux a, et choisies d'une façon quel-

conque; posons

$$\mu_1\varphi_1+\ldots+\mu_n\varphi_n+\varphi_{n+1}=P(\alpha),$$

et désignons par $\theta(\alpha)$ ce que devient la parenthèse pour ce système de valeurs des a. Soit $\varphi_1^1(\alpha)$ une fonction quelconque de α. Déterminons $\varphi_{n+1}^1(\alpha)$ par l'équation

$$\mu_1\varphi_1^1+\mu_2\varphi_2+\ldots+\mu_n\varphi_n+\varphi_{n+1}^1=P(\alpha).$$

Si nous avions fait le raisonnement précédent en prenant

$$V_1(\alpha)=a_1^1\varphi_1^1+a_2^1\varphi_2+\ldots+a_n^1\varphi_n+\varphi_{n+1}^1.$$

On aurait été conduit à écrire que l'égalité

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(A_1^1\Phi_1+A_2^1\Phi_2+\ldots+A_n^1\Phi_n)\varphi_1^1\,d\alpha=0$$

serait vraie pour toutes les valeurs des a^1; en particulier, faisons $a_1^1=\mu_1$, $a_n^1=\mu_n$, la parenthèse se réduira à $\theta(\alpha)$, de sorte qu'on aura

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\theta(\alpha)\varphi_1^1\,d\alpha=0,$$

Mais φ_1^1 étant arbitraire, il en résulte que

$$\theta(\alpha)=0.$$

Pour éviter les confusions, nous changerons de variables et nous écrirons l'identité

$$A_1\Phi_1[\lambda_1,V(\lambda_1)]+\ldots+A_n\Phi_n(\lambda_1,V(\lambda_1)]=0.$$

On pourra la remettre sous forme de déterminant et recommencer le raisonnement précédent sur sa seconde ligne, parce qu'on pourra, sans changer les mineurs correspondants, remplacer φ_1 et φ_2 par des fonctions arbitraires et ainsi de suite; finalement, on arrivera à l'identité

$$\begin{vmatrix}\Phi_1[\lambda_1,V(\lambda_1)] & \ldots & \Phi_n[\lambda_1,V(\lambda_1)]\\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\ \Phi_1[\lambda_n,V(\lambda_n)] & \ldots & \Phi_n[\lambda_n,V(\lambda_n)]\end{vmatrix}=0,$$

qui doit être vérifiée quelles que soient les variables λ, les fonctions φ et les constantes a.

Dans ces conditions, $V(\lambda_1), \ldots, V(\lambda_n)$ pourront être considérées comme des valeurs arbitraires, absolument indépendantes des λ, et on sera conduit à l'identité

$$\begin{vmatrix} \Phi_1(\lambda_1, \mu_1) & \ldots & \Phi_n(\lambda_1, \mu_1) \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \Phi_1(\lambda_n, \mu_n) & \ldots & \Phi_n(\lambda_n, \mu_n) \end{vmatrix} = 0$$

devant être vérifiée, quelles que soient les valeurs de $\lambda_1 \ldots \lambda_n$, $\mu_1 \ldots \mu_n$. Il est évident qu'une pareille identité exige qu'il existe, entre $\Phi_1(\alpha\beta), \ldots, \Phi_n(\alpha\beta)$, une ou plusieurs relations linéaires et homogènes à coefficients indépendants de α et β. Donc :

Théorème II. — *S'il existe entre* $S_1, S_2, \ldots, S_n$, *une relation indépendante de* ν, *il y a entre* $\Phi_1(\alpha, \beta) \ldots \Phi_n(\alpha, \beta)$ *une ou plusieurs relations linéaires et homogènes à coefficients constants.*

Soit

$$C_1 \Phi_1 + C_2 \Phi_2 + \ldots + C_n \Phi_n = 0$$

une telle relation, on en déduit

$$C_1 F_1 + C_2 F_2 + \ldots + C_n F_n = \theta(\alpha),$$

et, si nous posons $C_{n+1} = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \theta(\alpha)\, d\alpha$, on en conclut

$$C_1 S_1 + C_2 S_2 + \ldots + C_n S_n = C_{n+1}.$$

Il existe donc une relation linéaire à coefficients constants entre les S.

Supposons qu'entre les S existent des relations non linéaires $\mathcal{F}_1 = 0$, $\mathcal{F}_2 = 0$, ... Il y aura forcément des relations linéaires entre les S; supposons qu'il y en ait m distinctes ($m < n$). On pourra en tirer m des S, par exemple $S_1, S_2, \ldots, S_m$, comme fonctions linéaires de $S_{m+1}, \ldots, S_n$ et entre ces $n - m$ dernières quantités, il n'existera aucune relation linéaire et, par suite, aucune relation non linéaire. Il en résulte que, si dans $\mathcal{F}_1 = 0$, $\mathcal{F}_2 = 0$, ..., on remplace $S_1, S_2, \ldots, S_m$ par les expressions trouvées, on obtiendra des identités en $S_{m+1}, \ldots, S_n$, sans quoi les égalités trouvées constitueraient des relations entre $S_{m+1}, \ldots, S_n$. Nous exprimerons ce fait en disant que les relations non

linéaires $\mathcal{F}_1 = 0, \ldots$ sont des conséquences algébriques des relations linéaires qui existent entre les S et, par suite, nous aurons :

THÉORÈME III. — *Il ne peut exister entre* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *que des relations linéaires et les relations non linéaires qui en sont des conséquences algébriques.*

Remarque. — Ces théorèmes subsistent lorsque F et les limites α_1, α_2 dépendent de $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Le seul changement est que les coefficients des relations linéaires peuvent dépendre de $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Cherchons maintenant s'il peut exister des relations indépendantes de ν entre $S_1, S_2, \ldots, S_n$ et les valeurs de V et de ses dérivées aux limites.

Supposons qu'il y ait une relation entre

$$S_1, S_2, \ldots, S_n, \quad V(\alpha_1), V'(\alpha_1), \ldots, V^{(m)}(\alpha_1), \quad V(\alpha_2), V'(\alpha_2), \ldots, V^{(m+\mu)}(\alpha_2);$$

posons

$$n + 2m + \mu = N,$$

et considérons une fonction V dépendant de N constantes arbitraires

$$V = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \ldots + a_N\varphi_N + \varphi_{N+1}.$$

On sera conduit, comme dans le théorème II, à annuler un déterminant dont la première ligne sera

$$\int \Phi_1\varphi_1\,d\alpha, \ldots, \int \Phi_n\varphi_1\,d\alpha,$$

$$\varphi_1(\alpha_1), \varphi_1'(\alpha_1), \ldots, \varphi_1^{(m)}(\alpha_1), \quad \varphi_1(\alpha_2), \varphi_1'(\alpha_2), \ldots, \varphi_1^{(m+\mu)}(\alpha_2).$$

les autres lignes étant formées de la même façon avec $\varphi_2, \ldots, \varphi_N$. En appelant $A_1, A_2, \ldots, A_n$; $B_1^0, B_1^1, \ldots, B_1^m$; $B_2^0, \ldots, B_2^{m+\mu}$ les mineurs relatifs aux éléments de la première ligne, et faisant usage des formules

$$\varphi^{(p)}(\alpha_1) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\alpha - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\varphi^{(p+1)}(\alpha) + \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{\alpha_2 - \alpha_1}\right] d\alpha,$$

$$\varphi^{(p)}(\alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[\frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}\varphi^{(p+1)}(\alpha) + \frac{\varphi^{(p)}(\alpha)}{\alpha_2 - \alpha_1}\right] d\alpha,$$

le développement du déterminant pourra s'écrire

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} [C_0 \varphi_1(\alpha) + C_1 \varphi_1'(\alpha) + \ldots + C_{m+\mu+1} \varphi_1^{(m+\mu+1)}(\alpha)]\, d\alpha.$$

Comme dans le théorème II, on montre que, sans que l'égalité cesse d'être vérifiée et sans changer les C, on peut supposer φ_1 arbitraire. Si tous les C ne sont pas nuls, la quantité entre parenthèses sera une fonction arbitraire de α et, par suite, l'intégrale ne pourra pas être nulle. On a donc

$$C_0 = C_1 = C_2 = \ldots = C_{m+\mu+1} = 0,$$

et cela quelle que soit la valeur de α. En formant les expressions des C et remarquant que $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on en déduit que tous les B sont nuls.

$B_2^{m+\mu}$ est un déterminant analogue à celui que nous venons de considérer, mais contenant en moins une colonne relative à $V_{(\alpha_2)}^{(m+\mu)}$. On démontrera de la même façon que tous ses mineurs relatifs aux termes en V sont nuls, et ainsi de suite. En recommençant $2m + \mu$ fois ce raisonnement, on arrivera à faire disparaître toutes les colonnes relatives aux termes en ν et l'on arrivera à un déterminant, formé uniquement avec des termes de la forme $\int \Phi_{ij}\, d\alpha$, et qui devra être nul identiquement. Il en résultera, comme dans le théorème II, qu'il existera au moins une relation linéaire et homogène entre $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$ et, par suite, une relation linéaire entre $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Désignons, en général, par $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ les valeurs de V et de ses dérivées aux limites. Il est évident que, si V est arbitraire, on pourra considérer les ζ comme des variables indépendantes.

Supposons qu'il y ait des relations $\mathfrak{F} = 0$ indépendantes de V entre les S et les ζ. Il y aura forcément des relations linéaires entre les S; s'il y en a m distinctes, on pourra tirer $S_1, S_2, \ldots, S_m$, par exemple, comme fonctions linéaires de $S_{m+1}, \ldots, S_n$, entre lesquelles n'existera aucune relation. Portons ces valeurs de S_1, $S_2, \ldots, S_m$ dans les équations $\mathfrak{F} = 0$, $S_{m+1}, \ldots, S_n$ devront disparaître identiquement, car s'il n'en était pas ainsi, il en résulterait des relations entre $S_{m+1}, \ldots, S_n$. Il ne reste alors que les ζ; ceux-ci doivent aussi disparaître identiquement puisque, pouvant être considérés comme des variables indépendantes, il ne peut exister aucune relation entre eux. On a donc :

Théorème IV. — *S'il existe entre les* S *et les* ζ *des relations* $\mathfrak{F} = 0$ *indépendantes de* ν, *c'est qu'il y a entre les* S *des relations linéaires dont les équations* $\mathfrak{F} = 0$ *sont des conséquences algébriques, quelles que soient les valeurs des* ζ *considérés comme des variables indépendantes.*

Équations aux dérivées partielles vérifiées par une intégrale S. — Supposons que F et α_1, α_2 dépendent de p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$ et supposons qu'il existe une multiplicité à p dimensions Δ_m pour tous les points de laquelle on puisse prendre les dérivées partielles jusqu'à l'ordre m sous le signe $\int$.

Considérons d'abord le cas où α_1 et α_2 sont des constantes, toutes les dérivées partielles de S jusqu'à l'ordre m seront de même forme que S. Il pourra y en avoir qui ne dépendront pas de V ; désignons-les par $S'_1, S'_2, \ldots$, les autres étant représentées par $S, S_1, S_2, \ldots$. Soient, en outre, $\theta'_1(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $\theta'_2(x_1, x_2, \ldots, x_p), \ldots$ les valeurs des premières.

Soit une équation $\mathfrak{F} = 0$, d'ordre au plus égal à m, vérifiée par S dans Δ_m.

Premier cas. — $\mathfrak{F} = 0$ ne contient aucun S'. On est alors dans le cas du théorème II et $\mathfrak{F} = 0$ est linéaire ou conséquence algébrique d'équations linéaires entre $S, S_1, S_2, \ldots$.

Deuxième cas. — $\mathfrak{F} = 0$ ne contient que des S'. Soit

$$\mathfrak{F}(S'_1, S'_2, \ldots) = 0,$$

les fonctions $\theta'_1, \theta'_2, \ldots$ vérifient la relation

$$\mathfrak{F}(\theta'_1, \theta'_2, \ldots) = 0,$$

et la relation proposée est une conséquence algébrique des équations linéaires

$$S'_1 = \theta'_1, \qquad S'_2 = \theta'_2, \qquad \ldots.$$

Troisième cas. — $\mathfrak{F} = 0$ contient simultanément des S et des S'. Si $\mathfrak{F}(S_1, S_2, \ldots, \theta'_1, \theta'_2, \ldots) = 0$ se réduit à une identité en y considérant $S_1, S_2, \ldots$ comme des variables indépendantes, on peut considérer $\mathfrak{F} = 0$ comme conséquence algébrique des équations linéaires $S'_1 = \theta'_1$, $S'_2 = \theta'_2$, ... Sinon, c'est une conséquence

algébrique du système

$$\mathfrak{F}(S_1, S_2, \ldots, \theta'_1, \theta'_2, \ldots) = 0, \qquad S'_1 = \theta'_1, \qquad S'_2 = \theta'_2, \qquad \ldots;$$

la première de ces relations, étant dans les conditions du premier cas, est une conséquence algébrique de certaines relations linéaires $\mathfrak{F}_1 = 0$, $\mathfrak{F}_2 = 0$, ... entre les S, de sorte que finalement $\mathfrak{F} = 0$ est conséquence algébrique des équations linéaires

$$\mathfrak{F}_1 = 0, \qquad \mathfrak{F}_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad S'_1 = \theta'_1, \qquad S'_2 = \theta'_2, \qquad \ldots.$$

Donc :

Théorème V. — *Si α_1 et α_2 sont des constantes, à l'intérieur de Δ_m,* S *ne peut vérifier, comme équations aux dérivées partielles d'ordre inférieur ou égal à m, que des équations linéaires et leurs conséquences algébriques.*

Supposons maintenant les limites variables et désignons par σ les dérivées prises sous le signe $\int$, comme si α_1 et α_2 étaient des constantes.

Il suffit d'appliquer la règle de dérivation pour voir que toute dérivée de S, d'ordre au plus égal à m, est égale au σ correspondant plus une certaine fonction a des ζ qui s'annule quand on y remplace tous les ζ qui y figurent par des zéros. Il pourra y avoir, en outre, des σ qui ne dépendront pas de V; nous les désignerons par σ' et nous représenterons leurs valeurs par θ'.

On aura donc

$$S_1 = a_1 + \sigma_1, \qquad S_2 = a_2 + \sigma_2, \qquad \ldots, \qquad S'_1 = a'_1 + \sigma'_1 = a'_1 + \theta'_1, \qquad \ldots.$$

Soit

$$\mathfrak{F}(S, S_1, S_2, \ldots, S'_1, S'_2, \ldots) = 0$$

une équation d'ordre au plus égal à m vérifiée par S dans Δ_m. On aura

$$\mathfrak{F}(S, a_1 + \sigma_1, a_2 + \sigma_2, \ldots, a'_1 + \theta'_1, a'_2 + \theta'_2, \ldots) = 0.$$

Cette relation est dans le cas du théorème IV; elle continuera donc à être vérifiée quand on y remplacera tous les ζ par des zéros, ce qui revient à annuler tous les a

$$\mathfrak{F}(S, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \theta'_1, \theta'_2, \ldots) = 0,$$

ou

$$\mathcal{F}(S, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma'_1, \sigma'_2, \ldots) = 0.$$

Donc :

Théorème VI. — *α_1 et α_2 étant variables, si dans Δ_m, S vérifie une équation d'ordre inférieur ou égal à m, cette équation est aussi vérifiée par S et ses dérivées partielles prises comme si α_1 et α_2 étaient des constantes.*

Si $\mathcal{F}$ contient des S′, les σ' étant indépendantes de V, le théorème I montre que la dérivée correspondante de Φ doit être nulle, quels que soient α et β, ce qui constitue une équation linéaire et homogène vérifiée par Φ. Si $\mathcal{F}$ contient des S, la relation

$$\mathcal{F}(S, \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \theta'_1, \theta'_2, \ldots) = 0$$

montre, d'après le théorème II, qu'il doit exister une relation linéaire et homogène entre Φ et celles de ses dérivées qui correspondent à $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$; donc nous obtenons le théorème suivant, qui montre bien la liaison qui existe entre les intégrales partielles et les équations linéaires :

Théorème VII. — *α_1 et α_2 étant constantes ou variables, si, à l'intérieur de Δ_m, S vérifie une équation d'ordre inférieur ou égal à m, $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha, \beta)$, où α et β sont considérés comme des constantes arbitraires, vérifie au moins une équation linéaire et homogène d'ordre au plus égal à m.*

Soit

$$\mathcal{F}(s) = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_p)$$

une équation linéaire vérifiée par S, $\mathcal{F}$ étant une fonction linéaire et homogène de S et de ses dérivées jusqu'à l'ordre *m*.

Cette équation devra être vérifiée par les σ, ce qui conduira à

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mathcal{F}(F)\, d\alpha = \theta;$$

l'intégrale du premier membre étant indépendante de ν, c'est que

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\mathcal{F}(F) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{F}(\Phi) = 0.$$

Donc :

THÉORÈME VIII. — *Si* S *vérifie à l'intérieur de* Δ_m *une équation linéaire d'ordre au plus égal à* m, $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha, \beta)$, *où l'on considère* α *et* β *comme des constantes arbitraires, est solution de l'équation sans second membre.*

Sur le degré de généralité des fonctions S. — Lorsque l'élément de S contient effectivement V, S dépend effectivement de V; peut-il arriver qu'en réalité S ne dépende que d'un nombre limité de constantes arbitraires? Nous allons traiter cette question en supposant α_1 et α_2 constantes.

Supposons que S dépende de n constantes arbitraires

$$S = \theta(x_1, x_2, \ldots, x_p, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n).$$

Prenons arbitrairement $n+1$ systèmes de valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_p$

$$x_1^0, \ldots, x_p^0, x_1^1, \ldots, x_p^1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_p^n.$$

Soient $S_0, S_1, \ldots, S_n$ les valeurs correspondantes de S, $S_0, \ldots, S_n$ seront $n+1$ fonctions des n variables $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

On peut donc dire qu'il existe entre $S_0, S_1, \ldots, S_n$ une relation indépendante de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, c'est-à-dire de V, et cela a lieu quels que soient les systèmes de valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Par l'application du Chapitre II, on aura une identité de la forme

$$\Phi(x_1^0, \ldots, x_p^0, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} X_i(x_1^0, \ldots, x_p^n)\Phi(x_1^i, \ldots, x_p^i, \alpha, \beta).$$

Fixons arbitrairement les n derniers systèmes de valeurs de x. Il restera une identité en $x_1^0, \ldots, x_p^0$ et, en supprimant l'indice o inutile maintenant, on obtiendra

$$\Phi(x_1, \ldots, x_p, \alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x_1, \ldots, x_p)\psi_i(\alpha, \beta).$$

Réciproquement, supposons que Φ soit de cette forme et ne puisse pas se réduire à une forme analogue ayant moins de

n termes. En intégrant par rapport à β, on aura

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha, \beta) = U(x_1, \ldots, x_p, \alpha) + \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x_1, \ldots, x_p)\, \Psi_i(\alpha, \beta),$$

et par suite

$$S = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} U(x_1, \ldots, x_p, \alpha)\, d\alpha + \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x_1, \ldots, x_p) \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \Psi_i[\alpha, V(\alpha)]\, d\alpha;$$

la première intégrale est une fonction déterminée des x et les n dernières sont des constantes. On peut donc écrire

$$S = \varphi_{n+1}(x_1, \ldots, x_p) + \sum_{i=1}^{i=n} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_p).$$

Cette expression dépend effectivement de n constantes arbitraires, car, si l'on pouvait réduire le nombre de ces constantes, on pourrait, d'après la première partie de la démonstration, réduire Φ à une forme analogue à celle que nous avons supposée, mais ayant moins de n termes.

Nous remarquerons que si S dépend d'un nombre limité de constantes arbitraires, il en dépend linéairement.

Dans un grand nombre de cas on a à considérer des fonctions F de la forme $\beta f(x_1, \ldots, x_p, \alpha)$; la condition précédente se simplifie : la forme à laquelle on arrive est

$$f(x_1, \ldots, x_p, \alpha) = \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i(x_1, \ldots, x_p)\, \psi_1(\alpha),$$

et S sera alors fonction linéaire et homogène des n constantes arbitraires dont elle dépendra.

Soient n intégrales partielles

$$S_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_1[\alpha, V(\alpha)]\, d\alpha, \qquad \ldots, \qquad S_n = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F_n[\alpha, V(\alpha)]\, d\alpha.$$

Si nous supposons qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre $\Phi_1(\alpha, \beta), \ldots, \Phi_n(\alpha, \beta)$, il ne pourra exister aucune relation entre $S_1, S_2, \ldots, S_n$ et, par suite $S_1, \ldots, S_n$ pourront être considérées comme des constantes arbitraires indépendantes.

Mais rien ne prouve *a priori* qu'on peut leur faire prendre un système de valeurs choisi sans la moindre restriction. Pour avoir une propriété précise, supposons que tous les F soient de la forme $\beta f(\alpha)$ et qu'il n'existe aucune relation linéaire et homogène entre les f.

Donnons-nous arbitrairement un système $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et voyons si l'on peut déterminer ν satisfaisant aux n équations simultanées

$$S_1 = a_1, \qquad S_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad S_n = a_n.$$

Soient $V_1(\alpha), \ldots, V_n(\alpha)$, n fonctions indéterminées jusqu'à présent. Posons, en général,

$$\sigma_i^k = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f_i V_k \, d\alpha,$$

le déterminant D formé par les σ_i^k ne peut être nul quelles que soient les fonctions V, car il en résulterait par un raisonnement analogue à celui du théorème II, que les f seraient liées par une relation linéaire et homogène. On peut donc choisir des V_k de façon que l'on ait $D \neq 0$; posons

$$V = \lambda_1 V_1 + \ldots + \lambda_n V_n.$$

On aura

$$S_i = \lambda_1 \sigma_i^1 + \lambda_2 \sigma_i^2 + \ldots + \lambda_n \sigma_i^n,$$

et, puisque $D \neq 0$, les équations

$$\lambda_1 \sigma_i^1 + \lambda_2 \sigma_i^2 + \ldots + \lambda_n \sigma_i^n = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

détermineront toujours les λ.

Ceci posé, nous allons étudier d'une façon plus détaillée les intégrales de la forme

$$S = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha) \nu(\alpha) \, d\alpha,$$

α_1, α_2 étant des constantes.

D'après les théorèmes donnés au début, on voit immédiatement le résultat suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que S *ne puisse vérifier, quelle que soit* V, *aucune équation aux dérivées par-*

tielles, est que f, où l'on considère α comme une constante arbitraire, ne soit solution d'aucune équation aux dérivées partielles linéaire et homogène.

Supposons que $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha)$, satisfaisant à cette condition, soit au voisinage de $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0, \alpha^0$ une fonction analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha$. Prenons un point quelconque $x_1^1, \ldots, x_p^1$ au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_p^0$ et considérons f et ses dérivées partielles par rapport à $x_1, \ldots, x_p$ en ce point. Nous avons ainsi des fonctions de α et, sauf en certains points particuliers, il ne pourra exister aucune relation linéaire et homogène entre un nombre fini quelconque de ces fonctions. Il résulte alors de la remarque faite précédemment qu'on pourra se donner arbitrairement les valeurs en $x_1^1, \ldots, x_p^1$ d'un aussi grand nombre de dérivées partielles de S qu'on voudra..

On peut encore l'exprimer en disant qu'*on peut déterminer* V(α) *de façon que* S *ait en* $x_1^1, \ldots, x_p^1$ *un contact d'ordre aussi élevé qu'on voudra avec une fonction quelconque de* $x_1, x_2, \ldots, x_p$ *analytique en* $x_1^0, \ldots, x_p^0$.

Soit $f(x_1, x_2, \ldots, x_p \alpha)$ une telle fonction; elle permet d'en former une infinité d'autres. Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha)$ une fonction telle qu'il existe une relation linéaire et homogène à coefficients indépendants de α entre f, φ et leurs dérivées partielles. Si φ vérifiait une équation linéaire et homogène, on en pourrait facilement conclure que f vérifierait aussi une équation linéaire et homogène. Donc φ possède la propriété fondamentale de f. En outre, si dans φ nous faisons le changement le plus général de variables, remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_p$ par $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$, φ deviendra une fonction de $x'_1, \ldots, x'_p$ qui conservera encore la propriété fondamentale de f.

Dans le cas de deux variables, il est facile de trouver effectivement une de ces fonctions, c'est

$$x^\alpha \alpha^y,$$

car un calcul facile montre que, si l'on suppose que cette fonction vérifie une équation linéaire et homogène, il en résulte que $\mathcal{L}(\alpha)$ est une fonction algébrique de α, ce qui est absurde.

Démontrons maintenant, d'une façon générale, l'existence de ces fonctions f.

Nous savons que la condition nécessaire et suffisante pour qu'entre n fonctions

$$f_1(x_1, \ldots, x_p, \alpha), \quad \ldots, \quad f_n(x_1, \ldots, x_p, \alpha),$$

ne puisse exister aucune relation linéaire et homogène à coefficients indépendants de α, est que le déterminant

$$\begin{vmatrix} f_1 & \ldots & f_n \\ \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial \alpha} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{\partial^{n-1} f_1}{\partial \alpha^{n-1}} & \ldots & \frac{\partial^{n-1} f_n}{\partial \alpha^{n-1}} \end{vmatrix}$$

ne soit pas nul identiquement.

Soient

$$f, f_1, f_2, \ldots,$$

f et toutes ses dérivées partielles par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p$ rangées dans un ordre quelconque. Appelons Δ_n le déterminant précédent relatif à $f, f_1, \ldots, f_n$ et considérons la suite

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots.$$

Si un terme de cette suite est identiquement nul, il en est de même de tous les suivants.

Si donc f vérifie une équation linéaire et homogène, tous les termes de cette suite seront identiquement nuls à partir d'un certain rang.

Supposons que f soit une fonction analytique de $x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha$ au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_p^0, \alpha^0$. Il en sera de même de tous les Δ. Il en résulte que tous les Δ qui seront identiquement nuls seront nuls pour $x_1^0, \ldots, x_p^0 \alpha^0$. Soient

$$\Delta_0^0, \Delta_1^0, \ldots, \Delta_2^0, \ \ldots$$

les Δ pour ces valeurs des variables. Cette suite définira un déterminant infini (¹), lequel sera nul si f vérifie une équation linéaire et homogène.

Si donc nous pouvons former une fonction f analytique au voi-

(¹) Helge von Koch, *Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires.*

sinage de $x_1^0, \ldots, x_p^0, \alpha^0$, et telle que ce déterminant infini ne soit pas nul, on pourra rigoureusement en conclure que f ne peut vérifier aucune équation linéaire et homogène.

Ce déterminant a pour éléments les valeurs en $x_1^0, \ldots, x_p^0, \alpha^0$ de f et de toutes ses dérivées partielles par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha$. Donnons-nous *a priori* un déterminant infini *de forme normale* dont la valeur ne soit pas nulle. Avec ses éléments, nous pourrons reformer une série en

$$x_1 - x_1^0, \quad \ldots, \quad x_p - x_p^0, \quad \alpha - \alpha_0,$$

et le déterminant étant de forme normale, cette série sera absolument convergente si

$$|x_1 - x_1^0| < 1, \quad \ldots, \quad |x_p - x_p^0| < 1, \quad |\alpha - \alpha_0| < 1,$$

et représentera, dans cet intervalle, une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha)$ ayant la propriété demandée.

Intégrales partielles, solutions d'équations linéaires aux dérivées partielles. — Soit $\zeta(z) = 0$ une équation linéaire et homogène d'ordre n à p variables $x_1, x_2, \ldots, x_p$.

Si nous connaissons une intégrale dépendant d'une constante arbitraire $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha)$ on peut toujours la généraliser en formant

$$S = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_1, \ldots, x_p, \alpha) V(\alpha)\, d\alpha \qquad (\alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ constantes}).$$

Quelle que soit la fonction V, S vérifie toujours $\zeta(S) = 0$. Il peut arriver, comme nous l'avons vu, que S ne dépende en réalité que d'un nombre limité de constantes arbitraires.

Ampère, dans son célèbre Mémoire [1] a donné une définition de l'intégrale, qu'on peut exprimer ainsi :

Pour qu'une intégrale soit générale, il faut qu'elle ne puisse, en aucun point, vérifier, quelles que soient les arbitraires qui y figurent, aucune équation non conséquence de l'équation proposée.

Nous disons qu'une équation est conséquence de $\zeta(z)$ si elle

---

[1] AMPÈRE, *Considérations générales sur les intégrales des équations aux différentielles partielles* (*Journal de l'École Polytechnique*, XVIII[e] Cahier).

est une conséquence algébrique de l'équation $\zeta(z)$ et des équations dérivées.

En outre, Ampère cite une équation du second ordre, à deux variables, pour laquelle il y a une intégrale partielle dépendant d'une seule fonction arbitraire d'une seule variable et satisfaisant à sa définition de l'intégrale générale. Nous nous proposons de démontrer que ce fait est général.

Théorème. — *La condition nécessaire et suffisante pour que* S *soit l'intégrale générale d'Ampère est que* f *ne vérifie aucune équation linéaire et homogène, non conséquence de* $\zeta(z) = 0$.

Supposons que S vérifie une équation $H(S) = 0$ non conséquence de $\zeta(S) = 0$. En vertu du théorème V, S vérifiera un certain nombre d'équations linéaires parmi lesquelles se trouvera $\zeta(S) = 0$, et dont $H(S) = 0$ sera une conséquence algébrique. D'après la forme de S, ces équations seront homogènes, et l'une d'elles au moins ne sera pas conséquence de $\zeta(S) = 0$, sinon $H(S) = 0$ serait conséquence de $\zeta(S) = 0$. Soit $K(S) = 0$ cette équation. D'après le théorème VIII, f devra vérifier $K(z) = 0$, c'est-à-dire une équation linéaire et homogène non conséquence de $\zeta(z) = 0$.

Réciproquement, si f vérifiait une telle équation $K(z) = 0$, on en déduirait $K(S) = 0$ et S, vérifiant une équation non conséquence de $\zeta(z) = 0$, ne serait pas l'intégrale générale d'Ampère.

Si f possède cette propriété, il est évident qu'elle se conservera par un changement quelconque de variables et, par suite, nous pouvons nous borner à étudier les équations qui possèdent un terme en $\frac{\partial^n z}{\partial x_1^n}$.

On voit immédiatement que toute équation linéaire et homogène non conséquence de $\zeta(z) = 0$ peut alors se ramener, au moyen de $\zeta(z) = 0$ et de ses dérivées, à ne contenir que des dérivées prises $n - 1$ fois, au plus, par rapport à x_1 et que, réciproquement, toute équation de cette forme ne peut être conséquence de $\zeta(z) = 0$. Nous sommes donc ramenés à *chercher les fonctions* $f(x_1, \ldots, x_p, \alpha)$ *solutions de* $\zeta(z) = 0$ *et ne vérifiant*

aucune équation linéaire et homogène ne contenant que des dérivées prises $n-1$ fois au plus par rapport à x_1.

Supposons qu'en $x_1^0, \ldots, x_p^0$ tous les coefficients de $\zeta(z)=0$ soient analytiques et que celui de $\frac{\partial^n z}{\partial x_1^n}$ ne soit pas nul. Le théorème fondamental de Cauchy montre que, si l'on se donne des fonctions

$$\varphi_0(x_2, x_3, \ldots, x_p, \alpha), \quad \varphi_1(x_2, \ldots, x_p, \alpha), \quad \ldots, \quad \varphi_{n-1}(x_2, \ldots, x_p, \alpha),$$

analytiques au voisinage de $x_2^0, x_3^0, \ldots, x_p^0, \alpha^0$, il existera une intégrale $f(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha)$ vérifiant $\zeta(z)=0$, analytique au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_p^0, \alpha^0$, et telle que f et ses $n-1$ premières dérivées par rapport à x_1 se réduisent, pour $x_1 = x_1^0$ respectivement, à $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Considérons la suite des dérivées de f prises $n-1$ fois au plus par rapport à x_1,

$$f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_1^{n-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^n f}{\partial x_2\, \partial x_1^{n-1}}, \frac{\partial f}{\partial x_3}, \ldots,$$

et formons les déterminants

$$\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots,$$

comme nous l'avons déjà fait. Si f vérifie une équation non conséquence de $\zeta(z)=0$, tous ces déterminants seront identiquement nuls à partir d'un certain rang, et comme ils sont tous des fonctions analytiques de $x_1, \ldots, x_p, \alpha$ au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_p^0, \alpha^0$, ils seront encore identiquement nuls si l'on y fait $x_1 = x_1^0$.

Soit

$$\Delta'_0, \Delta'_1, \Delta'_2, \ldots$$

la suite des Δ dans lesquels on a fait $x_1 = x_1^0$.

Il nous faut chercher une fonction f pour laquelle cette suite ne soit pas formée de zéros à partir d'un certain rang. Or, nous pouvons remarquer que cette suite est formée avec les fonctions φ prises dans l'ordre

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}, \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_2}; \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3}, \ldots, \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_3}, \ldots.$$

En continuant un raisonnement déjà fait, on verra qu'en se donnant un déterminant infini de forme normale et dont la valeur

n'est pas nulle, on pourra reconstituer $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sous forme de séries ordonnées en

$$x_2 - x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n - x_n^0, \quad \alpha - \alpha^0,$$

absolument et uniformément convergentes sous la condition

$$|x_2 - x_2^0| < 1, \quad \ldots, \quad |x_n - x_n^0| < 1, \quad |\alpha - \alpha^0| < 1.$$

Ces fonctions φ satisferont à la condition posée puisque la suite des Δ n'aura pas zéro pour limite et elles permettront de reformer f sous forme de série ordonnée en

$$x_1 - x_1^0, \quad x_2 - x_2^0, \quad \ldots, \quad x_n - x_n^0, \quad \alpha - \alpha^0.$$

Nous avons donc :

Théorème. — *Étant donnée une équation linéaire et homogène à coefficients analytiques, d'ordre quelconque et à un nombre quelconque de variables, il est toujours possible de trouver des symboles*

$$S = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x_1, x_2, \ldots, x_p, \alpha) V(\alpha)\, d\alpha,$$

ne contenant comme arbitraire que $V(\alpha)$ *et satisfaisant à la définition de l'intégrale générale d'Ampère.*

On voit immédiatement que les fonctions initiales de S, c'est-à-dire les fonctions auxquelles se réduisent S, $\frac{\partial S}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} S}{\partial x_1^{n-1}}$ pour $x_1 = x_1^0$ sont respectivement

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi_0 V\, d\alpha, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi_1 V\, d\alpha, \quad \ldots, \quad \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \varphi_{n-1} V\, d\alpha.$$

Mais par hypothèse il n'existe en $x_2^0, \ldots, x_p^0$ aucune relation linéaire et homogène entre $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ et leurs dérivées partielles. On pourra donc se donner arbitrairement les valeurs en $x_2^0, \ldots, x_p^0$ d'un aussi grand nombre de dérivées qu'on voudra de $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$.

Il en résulte immédiatement qu'on pourra déterminer V de façon que S ait en $x_1^0, \ldots, x_p^0$ un contact d'ordre aussi élevé qu'on voudra avec une intégrale quelconque de $\zeta(z)$ analytique en

Il y en aura qui pourront être rigoureusement représentées par S, mais, en général, ce fait ne sera pas possible et S ne pourra représenter qu'asymptotiquement les intégrales au voisinage de $x_1^0, \ldots, x_p^0$.

Ces remarques semblent bien mettre en évidence que la définition de l'intégrale générale donnée par Ampère est tout à fait distincte de la définition adoptée ultérieurement à la suite des travaux de Cauchy.

Si une intégrale est générale au sens actuel, elle sera forcément générale au sens d'Ampère, mais la réciproque n'est pas vraie.

Ainsi, nous pouvons montrer par un calcul facile que, si aucun des deux nombres β, β' n'est un entier négatif ou nul, la fonction

$$(x-\alpha)^{-\beta}(y-\alpha)^{-\beta'}$$

est une solution de $E(\beta, \beta') = 0$ ne vérifiant aucune équation non conséquence de $E(\beta, \beta') = 0$, par suite

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (x-\alpha)^{-\beta}(y-\alpha)^{-\beta'}\, V(\alpha)\, d\alpha$$

est l'intégrale générale, au sens d'Ampère, de $E(\beta, \beta') = 0$ et les travaux de M. Appell (1) montrent que, pour obtenir véritablement l'intégrale générale, il faut employer deux signes d'intégration partielle de façon à avoir deux fonctions arbitraires indépendantes.

Pour terminer, considérons une équation $\zeta(z) = 0$ du second ordre, à deux variables x et y, à l'intérieur d'une région où elle a ses caractéristiques réelles et distinctes et ses coefficients analytiques.

Soit $f(x, y, \alpha)$ une intégrale analytique possédant deux lignes singulières distinctes dépendant de α et traversant la région considérée. Il résulte d'un théorème général que j'ai démontré (2) que ces lignes singulières seront formées par les deux systèmes de caractéristiques, de sorte que, si ces lignes sont

$$\varphi(x, y) = \alpha \quad \text{et} \quad \psi(x, y) = \alpha,$$

---

(1) APPELL, *Sur une équation linéaire aux dérivées partielles* (*Bulletin des Sciences mathématiques*; 1882).

(2) DELASSUS, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles, à caractéristiques réelles* (*Comptes rendus*, 2 juillet 1894).

en posant

$$\lambda = -\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}, \qquad \mu = -\frac{\frac{\partial\psi}{\partial y}}{\frac{\partial\psi}{\partial x}}.$$

λ et μ seront les deux racines de l'équation caractéristique.

Supposons que, par un changement de variables, on ait ramené l'équation $\zeta(z)=0$ à avoir un terme en $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, c'est dire que l'équation caractéristique n'aura aucune racine nulle ou encore qu'aucune des quantités λ, μ ne sera nulle identiquement.

Supposons que f vérifie une équation linéaire et homogène, non conséquence de $\zeta(z)=0$. Cette équation ne contiendra que des dérivées prises une fois au plus par rapport à x et de ce que f est analytique et dépend d'une constante arbitraire, il résultera qu'on pourra toujours supposer ses coefficients analytiques.

Si une telle équation est d'ordre n, ses termes d'ordre n seront

$$a\frac{\partial^n z}{\partial x\,\partial y^{n-1}} + b\frac{\partial^n z}{\partial y^n},$$

son équation caractéristique

$$(-1)^{n-1}a\theta^{n-1} + (-1)^n b\theta^n = 0$$

aura toutes ses racines réelles et il y en aura au plus une non nulle identiquement. Si f la vérifiait, forcément $\varphi(x,y)=\alpha$ et $\psi(x,y)=\alpha$ seraient des caractéristiques et, par suite, λ et μ qui sont distinctes et différentes de zéro devraient vérifier l'équation caractéristique, ce qui est impossible. Il en résulte que $f(x,y,\alpha)$ ne peut vérifier aucune équation linéaire et homogène non conséquence de $\zeta(z)$.

Ce théorème permet, par exemple, de montrer que la solution $(x-\alpha)^{-\beta}(y-\alpha)^{-\beta'}$ de $E(\beta,\beta')$ possède cette propriété si β et β' ne sont pas des entiers négatifs ou nuls, car elle possède alors les lignes singulières essentielles.

$$x=\alpha, \qquad y=\alpha.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LUCAS (Édouard). — Récréations mathématiques, t. IV, in-8°, VIII-266 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1894.

Le succès qui a accueilli les Volumes précédents des *Récréations mathématiques* attend le tome IV et dernier, qui a été publié par les soins des amis du regretté Édouard Lucas, MM. H. Delannoy, A. Laisant, E. Lemoine, membres de la Société mathématique de France. Les *Récréations* qui paraissent aujourd'hui et terminent la série portent les titres suivants :

Le Calendrier perpétuel;
L'Arithmétique en boules;
L'Arithmétique en bâtons;
Les Mérelles au XIII*e siècle;*
Les carrés magiques de Fermat;
Les réseaux et les dominos;
Les Régions et les quatre Couleurs;
La Machine à marcher.

La dernière, qui se rattache à la théorie des systèmes articulés, a pour but principal de faire connaître en France un mécanisme imaginé par M. Tchebichef. La précédente se rapporte au célèbre problème des quatre couleurs. Supposons qu'étant donnée une Carte géographique divisée en régions, on se propose de la colorier de telle manière que deux régions séparées par une limite n'aient jamais la même couleur. Depuis longtemps, les éditeurs avaient constaté par l'expérience que quatre couleurs suffisent dans tous les cas. Depuis longtemps aussi, ce fait si curieux et encore si peu connu avait attiré l'attention des géomètres anglais; mais c'est M. Kempe qui, le premier, en a donné en 1879 une démonstration satisfaisante, bientôt imprimée dans le tome II de l'*American Journal*. M. Lucas explique d'une manière très claire toutes les recherches sur cette intéressante question.

La quatrième Récréation est consacrée au Jeu des Mérelles. Il s'agit ici non plus de la Marelle vulgaire, passe-temps de nos enfants dans quelques pays; mais d'une Marelle complexe, compre-

nant trois carrés compris les uns dans les autres. Il nous paraît inutile de donner plus de détails. Nos lecteurs connaissent déjà la manière dont Lucas traitait les sujets de cette nature, et il nous suffira de leur dire que le Volume dont nous rendons compte tiendra sa place à côté des précédents. G. D.

HUGO GYLDÉN. — TRAITÉ ANALYTIQUE DES ORBITES ABSOLUES DES HUIT PLANÈTES PRINCIPALES. Tome I : *Théorie générale des orbites absolues*, in-4°, VIII-578 p. Stockholm, F. et G. Beijer, 1893 : à Berlin, chez Mayer et Müller ; à Paris, chez A. Hermann, 8, rue de la Sorbonne.

M. Gyldén, après de longues et patientes recherches théoriques sur le mouvement des corps célestes, publiées en grande partie dans les *Acta mathematica* et bien connues de tous ceux qui s'intéressent à la Mécanique céleste, vient de commencer la publication d'un grand Ouvrage dont le titre seul indique l'extrême importance. Remercions tout d'abord M. Gyldén d'avoir choisi la langue française pour écrire son nouvel Ouvrage; et si, en France, on s'en réjouit particulièrement, personne ailleurs, maintenant qu'on n'écrit plus en latin, ne pourra le regretter, car c'est la langue des maîtres de la Mécanique céleste, Lagrange et Laplace, pour ne citer que ceux-là.

Dans la courte préface qui précède le premier Volume, seul paru jusqu'à présent, M. Gyldén nous avertit qu'il poursuit un double but : il se propose d'abord d'établir des méthodes qui ne se trouvent pas en défaut dans les cas difficiles, et qui ne conduisent pas à des développements divergents pour les inégalités du mouvement des planètes et, en second lieu, d'établir les théories numériques des planètes principales indispensables à l'Astronomie, sur le fondement des nouvelles méthodes. Toutefois, son intention n'est pas de mener les calculs numériques à un tel degré de perfectionnement qu'on puisse s'en servir pour la construction des Tables, et il se borne à calculer les termes élémentaires ou bien, ce qui revient au même, les perturbations séculaires et les éléments absolus.

Il ajoute que, les perturbations séculaires montant dans le cou-

rant des siècles à des quantités qui sont comparables aux excentricités et aux inclinaisons mutuelles des diverses orbites elliptiques de notre système planétaire, il a dû abandonner la conception des ellipses képlériennes, pour la remplacer par celle des orbites absolues, qui se prête mieux que la précédente à inspirer des idées justes sur les mouvements effectifs des planètes.

Ces extraits presque textuels de la préface de l'auteur nous montrent suffisamment ses intentions : son nouvel Ouvrage est, pour ainsi dire, le couronnement pratique des longues recherches théoriques que nous rappelions plus haut.

La première Partie de l'Ouvrage de M. Gyldén est consacrée à l'exposition de la théorie générale des orbites absolues. Elle est divisée en quatre Livres, et ceux-ci en Chapitres que nous allons analyser succinctement, en insistant surtout sur les premiers, qui sont fondamentaux, et dans lesquels on trouve l'explication de la terminologie spéciale de M. Gyldén.

Le premier Livre est intitulé : *Cinématique des orbites absolues*, et contient quatre Chapitres. Le Chapitre I est consacré à l'étude des *courbes périplegmatiques*. M. Gyldén désigne sous le nom de *périplegmatique* une courbe qui parcourt incessamment l'espace entre deux sphères de même centre O, et qui tourne en chaque point M sa concavité vers le plan mené par O perpendiculairement au rayon OM.

Le type le plus important des courbes périplegmatiques planes est celui qui est fourni par l'intégrale de l'équation

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{dv^2} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r}\left[\frac{r}{p} + (\beta_1 + \beta_2 H)\left(1 - \frac{r}{p}\right) - \frac{r}{p}A\right],$$

où r et v sont des coordonnées polaires, p une constante, A un ***agrégat périodique*** de la forme $\Sigma\gamma_i \cos[(1-\sigma_i)v - B_i)$, et H une fonction de certains coefficients que nous allons mettre en évidence; en outre, les quantités β_1, β_2, γ_i, σ_i sont des constantes petites du premier ordre, et les B_i sont des angles quelconques.

Si l'on fait $\frac{p}{r} = 1 + \rho$, et si $\varkappa$ et Γ sont deux constantes d'intégration, on obtient

$$\rho = \varkappa \cos[(1-\varsigma)v - \Gamma] + \Sigma\varkappa_i \cos[(1-\sigma_i)v + B_i],$$

avec

$$1-\beta_1-\beta_3 H=(1-\varsigma)^2,$$

et

$$x_i=\frac{\gamma_i}{(1-\sigma_i)^2-(1-\beta_1-\beta_3 H)}.$$

La fonction H est prise égale à Σx_i^2; elle existe et est appelée *fonction horistique*, parce que la présence du terme $\beta_3 H$ permet de démontrer la convergence de l'intégrale ρ.

η et π étant des fonctions convenablement déterminées de v, on peut encore écrire, en faisant $p=a(1-\eta^2)$,

$$r=\frac{a(1-y^2)}{1+\eta\cos[(1-\varsigma)v-\pi]}.$$

Le *diastème* de la courbe à chaque instant est la quantité $2a\eta$, différence entre les valeurs maxima et minima du rayon vecteur; η est la *fonction diastématique*.

Si β_1, β_3 et les γ_i, σ_i sont des quantités du premier ordre par rapport aux forces perturbatrices, les x_i ne disparaissent pas avec ces forces. Les termes qui ne s'annulent pas avec les forces perturbatrices, et qui correspondent dans la fonction η ou dans le développement de la fonction perturbatrice, ou dans les expressions des inégalités, à des arguments de la forme $\sigma v+A$ ou $(1-\sigma)v+B$, sont dits *élémentaires du type* (A) ou *du type* (B). Si leurs coefficients sont multipliés par une quantité d'ordre n par rapport aux forces troublantes, ils sont *sousélémentaires* d'ordre n. Il y a aussi des termes *surélémentaires*, qui deviennent infinis quand les masses troublantes disparaissent; mais ils ne peuvent se produire que passagèrement, et on peut toujours les éviter.

Les formes précédentes de ρ et r seront conservées par la suite comme convenant pour définir une orbite absolue dans le plan instantané déterminé par deux rayons vecteurs consécutifs; ρ et η sont des fonctions élémentaires respectivement des types (B) et (A).

Dans le second Chapitre, M. Gyldén définit les divers *systèmes de coordonnées* qu'il emploiera, ces systèmes se rapprochent beaucoup de celui employé avec tant de succès par Hansen. M. Gyldén effectue les calculs en supposant que le sinus de la lati-

tude de la planète au-dessus du plan fixe est donné par la formule

$$\mathfrak{z} = \iota \sin[(1+\tau)v - \theta] + \Sigma \iota_i \sin[(1+\tau_i)v - S_i].$$

Cette forme de $\mathfrak{z}$, élémentaire du type (B), convient aux orbites absolues des planètes; ι et Θ y désignent deux constantes d'intégration; les ι_i et τ_i sont comme τ des constantes du premier ordre, les S_i sont des angles quelconques.

I et Ω étant des fonctions de v convenablement choisies, on peut encore écrire

$$\mathfrak{z} = I \sin[(1+\tau)v - \Omega].$$

I est la *fonction anastématique;* l'*anastème* à chaque instant est rI, c'est-à-dire la hauteur au-dessus du plan fixe à laquelle monte la courbe.

Reprenant l'expression de ρ déjà donnée, on dit que $\varkappa$ et ι sont les *modules diastématique* et *anastématique;* les $\varkappa_i$ et les ι_i sont les *coefficients diastématiques* et *anastématiques*. Les arguments $(1-\varsigma)v - \pi$ et $(1+\tau)v - \Omega$ sont les *arguments diastématique* et *anastématique*. On les appelle *arguments astronomiques;* plus généralement, un argument dont la différence avec un argument astronomique est un agrégat périodique est aussi un argument astronomique, et ces deux arguments sont dits *isocinétiques*. Enfin, si la différence entre deux arguments isocinétiques ne dépend que de ces deux arguments eux-mêmes, ils sont dits *homorythmiques*.

Le Chapitre III est l'étude des *Relations entre les arguments astronomiques et le temps*. On introduit d'abord le *temps réduit* ζ défini par

$$d\zeta = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\mu}} \frac{(1-\eta^2)^{\frac{3}{2}} dv}{\{1+\eta\cos[(1-\varsigma)v - \pi]\}^2},$$

où μ désigne une constante bien connue : le rapport $\frac{d\zeta}{dt}$ est toujours voisin de l'unité.

En appelant F l'argument diastématique, on peut, à l'aide de F, et en considérant η comme une constante définie, définir deux nouveaux arguments E et G jouant le même rôle, par rapport à F, que l'anomalie excentrique et l'anomalie moyenne par rapport à l'anomalie vraie dans la théorie du mouvement elliptique. Le reste du

Chapitre est consacré à divers développements en série analogues à ceux que l'on rencontre dans le mouvement elliptique.

Le Chapitre IV contient la définition des *éléments absolus*. Les *éléments primaires* d'une orbite périplegmatique, qui figurent comme constantes d'intégration dans la résolution du problème abstrait, sont les longitudes absolues, c'est-à-dire les longitudes moyennes pour $\zeta = 0$, à l'origine du temps, du mobile, du périhélie et du nœud ascendant; puis le *protomètre a* et les modules diastématique et anastématique. Les autres constantes qui figurent dans les formules et qui dépendent des précédentes, telles que les coefficients diastématique et anastématique, les quantités ρ et τ, σ_i et τ_i, et les *arguments initiaux* B_i et S_i sont les *éléments secondaires*.

Les éléments primaires ne sont pas toujours les mieux appropriés à donner une idée nette et immédiate du mouvement. Il en sera réellement ainsi si le module diastématique (ou anastématique) est supérieur, en valeur absolue, à la somme des valeurs absolues des coefficients diastématiques (ou anastématiques). Si l'un des coefficients diastématiques (ou anastématiques) est plus grand en valeur absolue que la somme des valeurs absolues de tous les autres et du module correspondant, les formules établies garderont leur caractère analytique inaltéré, à la condition de remplacer x, β et Γ (ou ι, τ et Θ) par les éléments secondaires x_k, σ_k et B_k (ι_k, τ_k et Θ_k), x_k (ou ι_k) étant le plus grand coefficient diastématique (ou anastématique) en valeur absolue. Si enfin aucune des deux hypothèses précédentes n'est vérifiée, la forme analytique des formules subsiste encore après une transformation convenable, et l'on voit par suite, contrairement à l'opinion exprimée par M. Stockwell dans son important Mémoire sur les variations séculaires des éléments elliptiques, que le périhélie et le nœud ont encore des mouvements moyens, sauf dans des cas très exceptionnels; seulement, aucun des termes de la fonction [illegible] n'a son argument [illegible] avec l'argument diastématique (ou anastématique) [illegible] ne figure pas directement dans les formules.

Le Livre II est intitulé : *Relations entre les arguments ap*[illegible] et contient [illegible] Chapitres, savoir :

Chapitre I. [illegible] *diastématiques*

de deux planètes; Chapitre II : *Expressions se rapportant à l'angle entre les rayons vecteurs de deux planètes*; Chapitre III : *Divers développements procédant suivant les puissances des fonctions diastématiques et anastématiques.*

Ce Livre qui prépare le suivant est consacré tout entier, comme les titres des Chapitres l'indiquent suffisamment, à des développements en série dans le détail desquels nous ne pouvons entrer ici.

Le Livre III est intitulé : *Développement de la fonction perturbatrice*, et contient quatre Chapitres, savoir :

Chapitre I : *Généralités sur la fonction perturbatrice;* Chapitre II : *Développement des puissances impaires de la fonction* $\frac{1}{\Delta}$; Chapitre III : *Exposition détaillée du calcul des coefficients de la fonction perturbatrice ainsi que de ses dérivées partielles;* Chapitre IV : *Forme diastématique du développement de la fonction perturbatrice.*

Dans ce Livre, on trouve tout ce qui est nécessaire pour le développement complet de la fonction perturbatrice. La méthode employée par M. Gyldén pour effectuer ce développement offre les mêmes avantages que celles de Laplace, de Le Verrier et de Newcomb; en même temps, elle n'est pas inférieure, au point de vue du calcul pratique, à celles de Hansen et de Backlund : elle tient, pour ainsi dire, le milieu entre ces différentes méthodes.

Le Livre IV est intitulé : *Les équations différentielles du mouvement des planètes.* M. Gyldén va établir un système d'équations différentielles, analogue à celui dont Hansen a fait usage, sauf que les éléments constants sont remplacés par des fonctions élémentaires. Ce système est susceptible d'être décomposé en systèmes partiels dont les solutions absolues peuvent être obtenues, du moins dans le cas des planètes principales; mais cette décomposition sera faite suivant des principes nouveaux, et échappera ainsi aux critiques trop justifiées que l'on peut adresser aux anciennes méthodes.

Ce Livre est divisé en trois Chapitres : le premier est consacré à l'étude des *Transformations générales.* M. Gyldén y établit vingt-trois équations fondamentales dont il se servira, par la suite, pour déterminer les coordonnées d'une planète : ces équations

sont d'ailleurs préparées de façon à pouvoir opérer facilement la séparation des termes élémentaires et des inégalités périodiques proprement dites.

Dans le Chapitre II, M. Gyldén expose le *Début des approximations successives*. Si l'on considère à la fois les huit planètes principales, on aura tout d'abord à intégrer un système de seize équations simultanées; en se servant de la méthode de réduction donnée par l'auteur dans ses Mémoires précédents, on peut parvenir à effectuer cette intégration par la méthode des approximations successives : la première approximation consistera d'ailleurs à intégrer deux systèmes distincts de huit équations linéaires, équations jouissant de la propriété d'être horistiques, et se prêtant, par conséquent, à la recherche de solutions uniformément convergentes.

Enfin, dans le Chapitre III, M. Gyldén s'occupe particulièrement des *termes critiques*, c'est-à-dire des termes qui dépendent d'un argument dans lequel le coefficient de la variable indépendante s'abaisse au-dessous d'une limite déterminée. L'auteur montre comment, par l'introduction d'équations différentielles horistiques convenables, on peut obtenir des solutions convergentes, malgré la présence des termes critiques. En dernier lieu, il fait voir comment on calculera les termes critiques et élémentaires dans l'expression de la *réduction du temps :* c'est là d'ailleurs le point le plus délicat de l'analyse des inégalités planétaires.

H. ANDOYER.

MÉLANGES.

M. ZEUTHEN ET SA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE DE L'ANTIQUITÉ;

PAR M. MAURICE CANTOR.

En juillet 1894, M. Zeuthen publia dans le tome XVIII de la 2e série du *Bulletin des Sciences mathématiques* un article de sept pages intitulé : *M. Maurice Cantor et la Géométrie supé-*

rieure de l'antiquité. Le tirage, qu'il a eu la courtoisie de m'expédier, est arrivé à Heidelberg pendant un voyage que je faisais pour me reposer, et j'avais défendu expressément de faire suivre les imprimés, parce que je voulais avoir le droit de ne pas songer aux Sciences pendant quelques semaines. En revenant, le 24 octobre, j'ai trouvé l'attaque de M. Zeuthen, mais je n'ai pas eu le loisir d'y répondre de suite, divers autres travaux urgents réclamant tout mon temps pour une quinzaine de jours. Ce n'est qu'aujourd'hui 9 novembre que j'ai pu me mettre à répondre à mon adversaire, et je tiens à fixer ces dates afin d'expliquer l'intervalle entre les deux articles.

M. Zeuthen ne m'épargne guère les reproches. A l'entendre, je n'ai pas su comprendre toute la grandeur d'Apollonius, je n'ai pas su m'apercevoir non plus de ce qui existait avant lui en fait de Géométrie supérieure, j'ai méconnu tellement le but des quatre premiers Livres des *Coniques* que je l'ai résumé de la manière suivante qu'*ils devaient* (¹) *contenir la partie de la Géométrie supérieure que devaient connaître les étudiants souhaitant posséder tout ce qui était nécessaire pour résoudre le problème Délique et des problèmes d'une difficulté (ou facilité) semblable.*

Comme appui de ces paroles, que je copie textuellement pour ne pas donner lieu à un malentendu, M. Zeuthen cite dans une Note ajoutée au bas de la page mes paroles : « So musste das IV Buch... gleichmaessige Verbreitung mit den 3 ersten Büchern gewinnen, deren Abschluss es gewissermassen für solche Mathematikstudirende bildete, melche von der damaligen höheren Mathematik grade das in sich aufnehmen wollten, was bis zur Lösung der delischen Aufgabe, diese mit inbegriffen, nothwendig war », *propos étonnants*, poursuit-il, *qu'il n'a pas su traduire verbalement.*

Moi, je vais les traduire, afin qu'on s'aperçoive que je suis loin d'avoir dit ce que M. Zeuthen me prête. J'ai dit : Le IVᵉ Livre devait se propager en commun avec les trois premiers, parce qu'ils contenaient pour ainsi dire le fin mot des Mathématiques supé-

(¹) Qu'on remarque bien ce mot *devaient!*

rieures, telles qu'on les comprenait alors, pour des lecteurs qui ne voulaient en savoir que le strict nécessaire pour résoudre le problème Délique.

Contenir entre autres certaines vérités et *avoir pour but de les contenir,* est-ce donc la même chose? L'Ouvrage d'Apollonius n'est arrivé en grec jusqu'à nos jours que dans ses quatre premiers Livres. Comment cela s'est-il fait? C'est qu'à dater du Ve Livre c'était un ouvrage beaucoup trop difficile pour qu'il ait pu trouver un nombre considérable de lecteurs et par conséquent aussi de copistès. Il y avait bien un certain nombre de personnes qui demandaient à savoir ce qui était nécessaire pour traiter le problème Délique et qu'on renvoyait alors aux *Coniques* d'Apollonius comme l'Ouvrage sur cette matière le plus récent et le plus complet. Arrivés au bout du IVe Livre, ils en savaient tout ce qui leur était nécessaire, tout ce qu'ils pouvaient comprendre, j'allais dire qu'ils étaient au bout de leur grec. Ils ne lisaient donc plus les Livres V-VIII; les copies existantes s'en perdirent, sauf quelques-unes qui se trouvaient dans les mains de véritables mathématiciens et qui furent traduites plus tard aussi loin que le VIIe Livre par un véritable mathématicien arabe.

Mais qu'Apollonius se soit proposé comme *but* de faire contenir dans ses quatre premiers Livres ce qu'il fallait pour résoudre le problème Délique, c'est ce que je n'ai jamais voulu dire, et j'espère que mes lecteurs, en comparant ma phrase, l'explication que je viens d'en donner et la soi-disante transcription de M. Zeuthen se rangeront de mon avis, que M. Zeuthen me prête des opinions que je n'ai jamais émises. Et pourtant c'est sur ce quiproquo que M. Zeuthen revient encore à sa dernière page pour me lancer ces paroles peu bienveillantes : *et M. Cantor a tort en disant qu'il donne le contenu de l'Ouvrage d'Apollonius; en effet, ses remarques citées sur le but des quatre premiers Livres en voilent les plus grandes beautés.*

Certes, l'irritation de M. Zeuthen contre moi a dû être bien grande pour l'aveugler de façon à lui faire faire ce que je nomme *hineinlesen,* c'est-à-dire parvenir à lire dans un auteur ce qu'on voudrait y trouver, tantôt pour l'en blâmer, tantôt pour l'en louer.

Mais pourquoi M. Zeuthen m'en veut-il tant, qu'il a pu se trom-

per sur le sens d'une phrase que moi du moins je crois très compréhensible? C'est que, dans la seconde édition du I[er] Volume de mes *Leçons d'histoire des Mathématiques,* je n'ai pas cité suffisamment ses travaux sur les coniques dans l'antiquité, soit pour me ranger à son avis, soit pour le réfuter.

Les instincts personnels sont différents. Il y a des personnes qui aiment les débats scientifiques et autres, en un mot la polémique, il y en a d'autres qui la détestent, et je fais partie des derniers. Jamais, dans la carrière scientifique assez longue sur laquelle je regarde en arrière, je n'ai porté les premiers coups, et la polémique me répugne d'autant plus, si elle doit s'adresser à un savant dont j'estime le mérite incontestable sur un terrain qui lui est propre. S'égare-t-il autre part, je me tais d'abord, et je ne parle qu'y étant forcé. C'est ainsi que je me suis tu vis-à-vis de M. Zeuthen le géomètre éminent, et c'est à regret que je me sens obligé à riposter une fois, mais pas davantage, comme je constate dès aujourd'hui.

On sait qu'Apollonius a vécu vers 200, Geminus vers 77 avant l'ère chrétienne. Il n'y a certainement pas un siècle et demi entre les deux auteurs. Geminus, sans avoir écrit une *Histoire des Mathématiques* comme on l'a cru longtemps, aimait à fouiller les vieux auteurs et à en tirer parti. Il a dit, et c'est un autre mathématicien rechercheur de vieilles traditions, Eutocius, qui a gardé ses paroles, qu'Apollonius, le premier, a su couper n'importe quel cône droit ou oblique par un plan de façon à faire paraître sur la surface du cône une conique quelconque. M. Zeuthen croit *que les renseignements de Geminus, rapportés par Eutocius, n'ont égard qu'aux définitions stéréométriques des courbes et de leurs constantes,* phrase qui, entre parenthèses, aurait peut-être besoin d'un peu d'éclaircissement. Moi, j'ai eu le tort de m'en tenir à Geminus, qui généralement pesait très bien ses expressions, tout en faisant remarquer qu'Archimède avait su couper une ellipse sur un cône différent de celui qu'on nommait *oxygone.* Je me disais que la différence entre la production sur un cône quelconque d'une ellipse seulement ou d'une conique en général est immense, et je ne pensais pas avoir besoin de souligner ce que M. Zeuthen semble me demander, savoir que Geminus, en racontant le progrès dû à Apollonius, n'était guère obligé de dire qu'Ar-

chimède auparavant en étudiant l'ellipse, avait trouvé un cas spécial de ce qu'Apollonius avançait en général. Geminus aurait pu le dire, mais, s'il n'en a rien fait, il ne faut pas lui en chercher querelle, ni à moi non plus.

La grande pièce de résistance des *Coniques dans l'antiquité* de M. Zeuthen, c'est la résolution du problème à trois et à quatre droites. Qu'est-ce que ce problème? Apollonius en parle dans la lettre introductoire à Eudème par laquelle il commence le Ier Livre des *Coniques*. Il y reproche à Euclide de ne pas avoir donné en entier le lieu à trois ou quatre droites, mais seulement en partie et encore d'une manière peu heureuse.

A ce reproche, Apollonius joint de suite l'excuse d'Euclide. Il dit qu'en effet ce lieu ne pouvait être discuté en entier sans le secours des théorèmes contenus dans le IIIe Livre des *Coniques*, mais c'est tout ce qu'Apollonius nous en dit. Comment a-t-il résolu le problème en question, où l'a-t-il fait, l'a-t-il fait, c'est ce qu'il nous laisse ignorer. Le mot même *lieu à trois ou quatre droites* ne revient plus dans Apollonius, ni dans le IIIe Livre des *Coniques*, ni dans la lettre introductoire du IVe Livre, ni dans ce que nous connaissons de ses autres Ouvrages. Il faut descendre jusqu'à Pappus pour le retrouver. Pappus, mathématicien très distingué qu'on croit avoir vécu vers l'année 300 de l'ère chrétienne, n'est pas un admirateur à toute épreuve d'Apollonius et il lui en veut d'avoir blâmé Euclide de la manière que je viens de dire. A cette occasion, il nous apprend ce que c'est que le lieu à trois et à quatre droites. Étant données de position trois ou quatre droites et tirant d'un point variable des droites coupant les droites données sous des angles donnés, de manière que le rapport du produit de deux des droites tirées au produit des deux autres (soit au carré de la troisième) reste le même, le point variable aura pour lieu une conique. Apollonius, qu'a-t-il fait pour ce problème, c'est ce que Pappus ne nous notifie pas assez clairement pour dissoudre l'obscurité historique dans laquelle se trouve la question.

C'est ici que M. Zeuthen est entré en lice. Il s'est saisi du problème à trois ou à quatre droites en maître de la Géométrie synthétique moderne. Il a trouvé la conique en question en ne s'appuyant que sur des vérités contenues dans le IIIe Livre d'Apol-

lonius. C'est tout ce qu'il a de plus ingénieux comme étude géométrique, mais ce n'est pas de l'histoire.

Je ne puis pas prouver que la marche d'Apollonius, s'il a mis par écrit ses pensées sur le problème, ce qui n'est pas sans vraisemblance, ait été différente de celle de M. Zeuthen; nous ne la connaissons pas! Mais M. Zeuthen peut encore bien moins prouver qu'il se trouve sur les pas d'Apollonius. C'est sa Géométrie supérieure de l'antiquité à lui qu'il nous donne.

Avais-je le droit de la passer sous silence dans un Volume gros déjà de cinquante-cinq feuilles et que je devais, par conséquent, m'abstenir de grossir encore, à moins qu'il ne s'agît de nouvelles découvertes historiquement avérées? Je le crois. M. Zeuthen est de l'avis opposé, et c'est ce que je comprends facilement, puisqu'il s'agit d'hypothèses auxquelles il a voué un travail long, consciencieux, et à son opinion fertile. Nous ne différons que sur ce dernier point. Nous ne saurions être juges nous-mêmes dans cette contradiction d'appréciations. M. Zeuthen surtout ne peut pas l'être là où il est en cause. Mais il y a, en dehors de M. Zeuthen et moi, des savants qui s'occupent d'histoire des Mathématiques. Attendons qu'ils publient leurs recherches sur Apollonius. Nous verrons bien, et le public verra aussi, s'ils consentiront à réunir sous le nom d'Apollonius les recherches de M. Zeuthen.

SUR L'EXPRESSION DU PRODUIT $1.2.3\ldots(n-1)$ PAR UNE FONCTION ENTIÈRE;

PAR M. J. HADAMARD.

On sait former une fonction entière qui, pour une suite donnée de valeurs (isolées)

$$(1) \qquad a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots,$$

attribuées à la variable, prenne des valeurs également données $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$.

On doit, à cet effet, partir d'une fonction $\varphi(x)$ admettant les a pour zéros et la multiplier par une autre $\psi(x)$ qui présente, en

ces mêmes points, des pôles avec les valeurs correspondantes de $\frac{b_n}{\varphi' a_n}$ pour résidus.

Si la suite (1) n'est autre que la suite naturelle des nombres, on peut prendre

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\sin\pi x = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)},$$

ce qui, pour n entier et positif, donne

$$\varphi'(n) = (-1)^n \pi \Gamma(n).$$

Si donc on cherche une fonction entière qui coïncide avec la fonction Γ pour les valeurs entières et positives de la variable, la fonction $\psi(x)$ sera

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \psi(x) &= \frac{1}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-2n} + \frac{1}{2n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x-2n-1} - \frac{1}{2n}\right)\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\log\frac{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)}. \end{aligned} \right.$$

On voit que le développement de $\psi(x)$ constitue une moitié du développement de cosécπx, de même que celui de $\frac{d}{dx}\log\Gamma x$ est la moitié du développement de cotπx.

La fonction cherchée s'obtient en multipliant $\varphi(x)$ par $\psi(x)$. Les principes connus relatifs à la fonction Γ montrent qu'elle peut se mettre sous la forme

$$F(x) = \sqrt{\pi}(U'V - UV'),$$

où U et V sont les deux fonctions entières

$$U = \frac{2^{\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)} = 2^{\frac{x}{2}}\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\pi}\Gamma\frac{x}{2},$$

$$V = \frac{2^{\frac{x}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right)} = 2^{\frac{x}{2}}\frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{x}{2}\right).$$

Quant à l'équation aux différences à laquelle satisfait la fonction $F(x)$, elle est

$$F(x+1) = x F(x) + \frac{1}{\pi} \varphi(x) = x F(x) + \frac{1}{\Gamma(1-x)}.$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BACHMANN (P.). — *Zahlentheorie, Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Haupttheilen.* 2 Thle. Die analyt. Zahlentheorie. Gr. in-8°, XVIII-494 p. Leipzig, Teubner. 12 m.

BIANCHI (LUIGI). — *Lezioni di Geometria differenziale.* In-8°, 544 p. Pisa, Spoerri. 16 m.

BOREL (EM.). — *Sur quelques points de la théorie des fonctions.* In-4°, 53 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

HERZ (N.). — *Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten u. Kometen.* II. Thl. : Die empirischen Methoden. Gr. in-8°, VIII-264 p. avec planches. Leipzig, Teubner. 10 m.

MANNHEIM (A.). — *Principes et développements de Géométrie cinématique.* In-4°, IX-591 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 25 fr.

POINCARÉ (H.). — *Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste.* T. II : Méthodes de MM. Newcomb, Gyldén, Lindstedt et Bohlin, In-8°. VIII-480 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 12 fr.

VERÒNESE (G.). — *Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen n. mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt.* Uebersetzt von A. Schepp. In-8°, XLVI-710 p. avec figures. Leipzig, Teubner. 20 m.

D'ARCAIS, ... — *Corso di Calcolo infinitesimale.* Vol. II, in-8°. Padova, Draghi. 6 l.

LAZZERI (G.). — *Trattato di Geometria analitica.* In-8°. Livorno, Giusti. 10 l.

BIANCHI (L.). — *Lezione di Geometria differenziale.* In-8°. Pisa, Spoerri. 20 l.

CARTAN (E.). — *Sur la structure des groupes de transformation finis et continus.* In-4°, 159 p. Paris, Nony et Cie.

Comte. — *La Géométrie analytique d'Auguste Comte.* Nouvelle édition, précédée de la Géométrie de Descartes. In-8°, 606 p. avec fig. et 3 planches. Paris, Bahl.

Dumont (F.). — *Essai d'une théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre.* In-8°, 80 p. Annecy, impr. Dépollier et Cie.

Grassmann (H.). — *Gesammelte mathematische und physikalische Werke.* Auf Veranlassung der kgl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften herausgegeben von F. Engel. 1. Bd. 1. Thl. Gr. in-8°. Leipzig, Teubner. 12 m.

Lelieuvre. — *Sur les surfaces à génératrices rationnelles.* In-4°, 113 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Lucas (E.). — *Récréations mathématiques.* T. IV. In-16, VIII-267 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 7 fr. 50 c.

Niewenglowski (B.). — *Cours de Géométrie analytique.* T. I : Sections coniques. In-8°, VI-484 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 10 fr.

Repetitorium Kurzes der höheren Mathematik. II. Thl. Integralrechnung. In-8°, 63 p. avec 12 fig. Wien, Breitenstein. 1 m. 10 pf.

Seguier (J.-A. de). — *Sur deux formules fondamentales dans la théorie des formes quadratiques et de la multiplication complexe d'après Kronecker.* In-8°, VII-340 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Smith (H.-J.-S.). — *The Collected Mathematical Papers.* Edited by J.-W.-L. Glaisher. 2 vol. in-4°. London, Frowde. 63 sh.

Hertz (H.). — *Die Prinzipien der Mechanik, in neuem Zusammenhange dargestellt.* Mit ein Vorwort von H. v. Helmholtz. Gr. in-8°, XXIX-312 p. Leipzig, Barth. 12 m.; rel. 13 m. 50 pf.

Kelvin (Lord). — *The Molecular Tactics of a Chrystal : Robert Boyle Lecture,* 1893. In-8°. London, Frowde. 3 sh. 6 d.

Longraire (L. de). — *Notice bibliographique sur la traduction des Mécaniques de Héron d'Alexandrie, de M. le baron Carra de Vaux.* Paris, impr. Chaix.

Borel (E.) et Drach (J.). — *Introduction à l'étude de la théorie des nombres et de l'Algèbre supérieure.* In-8°, IV-355 p. Paris, Nony et Cie.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DURÈGE (H.). — ELEMENTE DER THEORIE DER FUNKTIONEN EINER COMPLEXEN VERÄNDERLICHEN GROSSE. — Vierter Auflage. 1 vol. in-8°, x-300 p. Leipzig, Teubner, 1893.

Nous sommes heureux d'annoncer la quatrième édition de la *Théorie des Fonctions* de M. Durège. La première édition remonte à 1864, la seconde, dont M. Houël a rendu compte dans le *Bulletin* (t. VI, 1874, p. 225), est de 1873. La troisième et la quatrième en diffèrent surtout par quelques améliorations que l'auteur a introduites dans la façon dont il présente la théorie des surfaces de Riemann.

ERNESTO CESÀRO. — INTRODUZIONE ALLA TEORIA MATEMATICA DELLA ELASTICITA (Introduction à la théorie mathématique de l'Élasticité). In-8°, 213 p.; Turin, Bocca frères, 1894.

M. E. Cesàro, ayant suppléé le professeur G. Battaglini, durant l'année scolaire 1892-1893, à l'Université de Naples, a pris, pour sujet de ses leçons, l'exposé de la théorie mathématique de l'Élasticité; il publie aujourd'hui la rédaction de son cours, et nous la présente comme le premier Volume d'une série d'écrits sur les Mathématiques supérieures qu'il a l'intention de livrer à l'imprimerie; ce premier Volume fera attendre, non sans quelque impatience, la publication des suivants.

M. Cesàro nous présente modestement ces leçons : « Elles ne contiennent rien de nouveau, dit-il, et n'ont nullement la prétention de constituer un cours complet sur la théorie mathématique de l'Élasticité; on ne les doit considérer que comme une préparation à la lecture des nombreux et excellents traités dont l'élasticité est l'objet, et à l'étude des Mémoires, en particulier des Mémoires italiens, qui ont été publiés sur cette théorie. » M. Cesàro, dans ces lignes, nous promet peu de choses; l'effet dépasse de beaucoup les promesses.

C'est déjà un grand service rendu à la Science que de condenser en un petit nombre de pages ce que les géomètres italiens ont écrit d'excellent sur les déformations élastiques des corps; car, depuis un certain nombre d'années, l'étude de l'Élasticité paraît être devenue l'étude de prédilection des mathématiciens les plus illustres de l'Italie; il suffit de citer les noms de Betti, de Beltrami et de Cerruti, pour évoquer le souvenir des Mémoires aussi rigoureux qu'élégants que cette étude a fait éclore. Mais si M. Cesàro connaît à fond les travaux de ses compatriotes, il n'est point exclusif et sait, quand il le faut, faire appel aux travaux les plus récents, qu'ils soient nés en France, en Angleterre ou en Allemagne.

Un ordre très simple, très clair règne dans ce livre. La cinématique des petits mouvements, base de toute l'Élasticité, fait l'objet des premiers Chapitres; nous y trouvons deux démonstrations, dues à M. Beltrami, des conditions nécessaires et suffisantes que doivent remplir six fonctions de x, y, z, pour qu'il soit possible de les identifier aux trois dilatations et aux trois glissements dans une déformation infiniment petite. Puis, la forme du potentiel des actions élastiques est établie, les conditions de stabilité discutées. De l'expression du potentiel, le principe des vitesses virtuelles permet de déduire aisément les équations d'équilibre. Le lemme de Betti, appliqué à ces équations, montre sans peine que l'équilibre élastique suppose que les forces extérieures se fassent équilibre sur un corps rigide de même forme. Passant alors à la distribution des actions internes, M. Cesàro introduit, par la méthode de Cauchy, les théorèmes fondamentaux relatifs aux pressions.

L'étude des petits mouvements lui donne occasion d'établir les théorèmes généraux de Clebsch, de Saint-Venant, de M. Poincaré. Enfin, ces diverses théories générales trouvent des exemples aussi simples qu'élégants dans l'étude de l'équilibre d'une enveloppe sphérique et des vibrations d'une sphère pleine. Tel est, en peu de mots, le plan de la première Partie de l'Ouvrage; elle renferme, en [illegible] pages, tout ce qu'un physicien peut désirer connaître touchant l'équilibre et le mouvement des corps élastiques.

La seconde Partie [illegible] l'étude

analytique des questions, dont les principes ont été posés dans la première Partie.

Après avoir rappelé les théorèmes les plus essentiels concernant le problème de Dirichlet, M. Cesàro démontre d'une façon remarquablement brève que toute déformation infiniment petite peut se décomposer en deux autres, dont l'une n'entraîne aucune rotation, et l'autre aucun changement de densité. Il montre ensuite, conformément à la méthode de Clebsch, comment l'étude de ces deux sortes de déformations se ramène toujours à l'intégration d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$a^2 \Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Cette équation canonique des petits mouvements admet l'intégrale générale donnée par Poisson; de la forme de cette intégrale, se déduisent les vitesses de propagation des deux espèces de déformations élastiques au sein d'un milieu isotrope. M. Cesàro se contente de citer, sans l'exposer, le mémorable travail de G. Kirchhoff sur l'équation canonique des petits mouvements.

Après avoir montré comment le théorème de Betti permet de déterminer la dilatation cubique et les composantes de la rotation en un point quelconque d'un milieu isotrope, M. Cesàro montre comment, lorsqu'on se donne les déplacements à la surface, on intégrera, en général, le problème de l'équilibre élastique et, en particulier, le problème de l'équilibre élastique des corps isotropes; il établit les beaux résultats de Betti, de Boussinesq, de Cerruti. L'étude des déformations thermiques est ensuite traitée d'une manière approfondie.

Le problème de Saint-Venant et les applications de ce problème à la théorie de la résistance des matériaux terminent la seconde Partie.

La troisième Partie est consacrée presque en entier à l'étude des équations de l'Élasticité en coordonnées curvilignes, étude dont Lamé a montré depuis longtemps l'importance et la fécondité. Une introduction générale sur les coordonnées curvilignes, les paramètres différentiels des fonctions, les systèmes isothermes, précède l'établissement des équations de l'Élasticité.

L'Ouvrage se termine par l'étude de l'Élasticité dans les espaces

non euclidiens; ce dernier Chapitre nous semble une pure curiosité, sans signification physique; mais il rentre dans un ensemble de recherches fort à la mode aujourd'hui en Italie.

Cette sèche énumération donnera peut-être une idée de l'abondance et de la variété des matières traitées dans l'Ouvrage de M. Cesàro; elle ne peut en exprimer la clarté et l'élégance, qualités qui le feront vivement priser des lecteurs français.

P. Duhem.

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px^2 + q}}$,

Par M. J. DOLBNIA.

1. Dans le *Traité de Calcul intégral* de M. Bertrand l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px^2 + q}}$$

est réduite à la catégorie des elliptiques (¹). De la manière même de la transformation et de ses résultats définitifs on voit que x^2 s'exprime par les fonctions elliptiques monodromes d'un certain argument. D'un autre côté, il est évident que l'intégrale

$$J = \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 + px^2 + q}}$$

a un point critique logarithmique à l'infini. Par conséquent, se présente évidemment la question : sous quelles conditions l'intégrale mentionnée s'exprime par des logarithmes. Pour résoudre

(¹) P. 67.

cette question, présentons l'intégrale donnée sous la forme

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x^2 - a)(x^2 - b)}}.$$

Nous avons

$$J = \int \frac{\sqrt{(x^2 - a)(x^2 - b)}}{\sqrt[4]{[(x^2 - a)(x^2 - b)]^3}} \partial x.$$

Posons

$$x^2 - a = \frac{1}{y},$$

alors

$$x^2 - b = \frac{(a-b)y + 1}{y}, \qquad \partial x = -\frac{1}{2} \frac{dy}{\sqrt{y^3}\sqrt{ay+1}};$$

$$(x^2 - a)(x^2 - b) = \frac{(a-b)y+1}{y^2}.$$

Par conséquent,

$$J = -\frac{1}{2} \int \frac{\sqrt{(a-b)y+1}}{y} \frac{dy}{\sqrt[4]{(ay+1)^2[(a-b)y+1]^3}},$$

ou

$$J = -\frac{1}{2\sqrt[4]{a^2(a-b)}} \int \frac{\sqrt{y + \frac{1}{a-b}}}{y} \frac{\partial y}{\sqrt[4]{\left(y+\frac{1}{a}\right)^2 \left(y + \frac{1}{a-b}\right)^3}},$$

ou

$$J = -\sqrt[4]{\frac{8}{3a^2(a-b)}} \int \frac{\sqrt{y+\beta}}{y} \frac{\partial y}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a}, \qquad \beta = \frac{1}{a-b}.$$

En posant

$$\frac{\partial y}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3}} = dz,$$

et en intégrant l'équation

$$\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^4 = \frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3,$$

avec la condition que y a son infini pour $z = 0$, nous aurons

$$y = 6p^2 z - \beta,$$

où pz est la fonction de Weierstrass avec les invariants

$$g_2 = \frac{2(\beta - \alpha)}{3}, \qquad g_3 = 0.$$

Par cette raison

$$J = -\frac{2}{\sqrt[4]{6a^2(a-b)}} \int \frac{\sqrt{6p^2z}\,dz}{6p^2z - \beta},$$

ou

$$J = -\frac{2}{\sqrt[4]{6^3a^2(a-b)}} \int \frac{pz\,dz}{p^2z - \frac{\beta}{6}}.$$

Posons

$$\frac{\beta}{6} = p^2z_0;$$

alors

$$\frac{pz}{p^2z - p^2z_0} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{pz - pz_0} + \frac{1}{pz + pz_0}\right),$$

par conséquent

$$J = -\frac{1}{\sqrt[4]{6^3a^2(a-b)}} \int \left(\frac{1}{pz - pz_0} + \frac{1}{pz + pz_0}\right) dz.$$

Nous avons

$$\frac{1}{pz - pz_0} = \frac{1}{p'z_0}\,[\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0) + 2\zeta(z_0)];$$

$$\frac{1}{pz + pz_0} = \frac{1}{p'(z_0 i)}[\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i) + 2\zeta(z_0 i)].$$

Suivant les formules connues d'homogénéité, nous avons

$$p'(z_0 i) = i\,p'(z_0),$$
$$\zeta(z_0 i) = -i\,\zeta(z_0),$$

donc

$$\frac{1}{pz + pz_0} = \frac{-i}{p'z_0}[\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i) - 2i\zeta(z_0)].$$

Par conséquent

$$\frac{1}{pz - pz_0} + \frac{1}{pz + pz_0}$$
$$= \frac{1}{p'z_0}\left\{\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0) - i[\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i)]\right\}.$$

Par conséquent

$$J = -\frac{1}{p' z_0 \sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z + z_0 i)}{\sigma(z - z_0 i)} \right]^i \right\},$$

ou

$$J = -\frac{1}{p' z_0 \sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} + \frac{i}{p' z_0 \sqrt[4]{6^3 a^2 (a-b)}} \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)}.$$

Calculons maintenant $p' z_0$. Nous avons

$$p' z = \sqrt{4 p^3 z - \tfrac{4}{3}(\beta - \alpha) p z}.$$

Et comme

$$\beta - \alpha = \frac{1}{a-b} - \frac{1}{a} = \frac{b}{a(a-b)},$$

$$p^2 z_0 = \frac{\beta}{6} = \frac{1}{6(a-b)},$$

donc

$$p' z_0 = \sqrt[4]{\frac{1}{6(a-b)}} \sqrt{\frac{2}{3(a-b)} - \frac{2b}{3a(a-b)}},$$

$$p' z_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{3^3 a^2 (a-b)}};$$

par conséquent,

$$\int = -\frac{1}{2} \log \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} + \frac{i}{2} \log \frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)}.$$

D'où il suit que l'intégrale donnée J ne s'exprime que par des logarithmes si z_0 est une partie commensurable d'une période.

2. Avant de réduire cette formule à une forme calculable, considérons deux cas particuliers d'intégrabilité par des logarithmes; ces cas sont remarquables par leur simplicité.

1° Si $a = -b$, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2 - a)(x^2 - b)}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. Pour le prouver, remar-

quons que

$$p(2z_0) = -2pz_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{p''z_0}{p'z_0}\right)^2,$$

$$-2pz_0 = -\frac{2}{\sqrt{6(a-b)}},$$

$$p''z_0 = 6p^2z_0 - \frac{1}{2}g_2 = \frac{3a-b}{3a(a-b)},$$

$$p'z_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{3^3a^2(a-b)}};$$

donc

$$\left(\frac{p''z_0}{p'z_0}\right)^2 = \frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{3a(a-b)^2\sqrt{2}},$$

donc

$$p(2z_0) = -\frac{2}{\sqrt{6(a-b)}} + \frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{3a(a-b)^2\sqrt{2}}.$$

Si

$$a = -b,$$

nous aurons

$$p(2z_0) = -\frac{2}{2\sqrt{3a}} + \frac{4^2a^2\sqrt{6a}}{3.4^2a^3\sqrt{2}}.$$

$$p(2z_0) = 0.$$

Par conséquent,

$$p'(2z_0) = 0;$$

d'où il suit que $2z_0$ est une demi-période; donc

$$z_0 = \frac{2\varpi}{4}.$$

Par cette raison, l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 - a^2}}$$

ou plus simplement l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4 \pm 1}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes.

2° En résolvant l'équation transcendante

$$p(2z_0) = p(z_0).$$

nous trouvons

$$z_0 = \frac{2\varpi}{3};$$

d'un autre côté, nous avons

$$-\frac{2}{\sqrt{6(a-b)}} + \frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{4.3a(a-b)^2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{6(a-b)}},$$

ou

$$\frac{(3a-b)^2\sqrt{3(a-b)}}{4.3a(a-b)\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{6(a-b)}},$$

ou

$$(3a-b)^2 = 12a^2 - 12ab,$$
$$b = -3a \pm 2a\sqrt{3}.$$

Par conséquent, l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x^2-a)(x^2+3a\pm 2a\sqrt{3})}},$$

ne s'exprime que par des logarithmes. L'existence des autres cas d'intégrabilité par des logarithmes aurait pu être prouvée par des formules de multiplication de l'argument elliptique par un nombre entier.

3. Quand est donnée l'intégrale

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x^2-a)(x^2-b)}},$$

et qu'il faut résoudre la question : ne s'exprime-t-elle que par des logarithmes, on peut procéder de la manière suivante :

A l'aide des formules

$$p z_0 = \frac{1}{\sqrt{6(a-b)}}, \quad g_2 = \frac{2b}{3a(a-b)}, \quad g_3 = 0,$$
$$p' z_0 = \sqrt[4]{\frac{2}{3^3 a^2(a-b)}},$$

on peut calculer successivement

$$p(2z_0), \quad p(2^2 z_0), \quad p(2^3 z_0), \quad \ldots.$$

Si l'intégrale ne s'exprime que par des logarithmes, z_0 est

une partie commensurable de la période; alors la série

$$pz_0,\quad p(2z_0),\quad p(2^2z_0),\quad \ldots$$

doit être périodique.

4. Montrons maintenant le moyen de calculer la formule

$$J = -\frac{1}{2}\log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} + \frac{i}{2}\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma(z+z_0 i)}.$$

Citons deux formules connues

$$pz - pz_0 = -\frac{\sigma(z+z_0)\,\sigma(z-z_0)}{\sigma^2 z\,\sigma^2 z_0},$$

$$pz - p(z_0 i) = pz + pz_0 = -\frac{\sigma(z+z_0 i)\,\sigma(z-z_0 i)}{\sigma^2 z\,\sigma^2 z_0 i} \text{ (1)}.$$

En profitant de ces formules, nous aurons

$$J = \frac{1}{2}\log(pz-pz_0) - \log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma z} - \frac{i}{2}\log(pz+pz_0) + i\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma z},$$

ou

$$J = \frac{1}{2}\log\frac{pz-pz_0}{(pz+pz_0)^i} - \log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma z} + i\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma z}.$$

Si $z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m}$ est une partie commensurable d'une période

$$\log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma z} = -\frac{1}{m}\log\prod_{\mu=0}^{\mu=m-1}[p(z+\mu z_0) - pz_0]^{\mu-1},$$

$$\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma z} = -\frac{1}{m}\log\prod_{\mu=0}^{\mu=m-1}[p(z+\mu z_0 i) + pz_0]^{\mu-1} \text{ (2)},$$

par cette raison

$$J = \frac{1}{2}\log\frac{pz-pz_0}{(pz+pz_0)^i} + \frac{1}{m}\prod_{\mu=0}^{\mu=m-1}\left\{\frac{p(z+z_0\mu)-pz_0}{[p(z+\mu z_0 i)+pz_0]^i}\right\}^{\mu-1},$$

où nous aurons pz de l'équation

$$y = 6p^2 z - \beta,$$

---

(1) HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 171.
(2) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XVII, p. 137.

donc

$$p\dot{z} = \sqrt{\frac{y+\beta}{6}},$$

ou

$$pz = \sqrt{\frac{1}{6(a-b)}}\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}} = pz_0\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}}.$$

Par conséquent

$$J = \frac{m-2}{2m}\log\frac{\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}}-1}{\left(\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}}+1\right)^i} + \frac{1}{m}\log\prod_{\mu=0}^{\mu=m-1}\left\{\frac{p(z+\mu z_0)-pz_0}{[p(z+\mu z_0 i)+pz_0]^i}\right\}^{\mu-1}.$$

5. Si $z_0 = \frac{2\bar{\omega}}{4}$, $m = 4$; alors

$$J = \frac{1}{4}\log\frac{\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}}-1}{\left(\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}}+1\right)^i} + \frac{1}{4}\log\frac{p(z+2z_0)-pz_0}{[p(z+2z_0 i)+pz_0]^i}$$
$$+\frac{1}{4}\log\left\{\frac{p(z+3z_0)-pz_0}{[p(z+2z_0 i)+pz_0]^i}\right\}^2.$$

Citons les formules connues

$$p(z+2z_0) = -pz - p2z_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{p'z-p'2z_0}{pz-p2z_0}\right)^2,$$
$$p(z+2z_0 i) = -pz + p2z_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{p'z+ip'2z_0}{pz+p2z_0}\right)^2,$$
$$p(z+3z_0) = -pz - pz_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{p'z+p'z_0}{pz-pz_0}\right)^2,$$
$$p(z+3z_0 i) = -pz + pz_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{p'z+ip'z_0}{pz+pz_0}\right)^2.$$

Dans le cas actuel

$$a = -b = 1,$$
$$p(2z_0) = 0, \quad p'(2z_0) = 0, \quad pz_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad p'z_0 = \frac{1}{3}\sqrt[4]{3};$$

par conséquent,

$$p(z+2z_0) - pz_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}-1\right),$$
$$p(z+2z_0 i) + pz_0 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}+1\right),$$

et

$$p(z+3z_0)-pz_0=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x\sqrt[4]{x^4-1}+x^2-1}{\sqrt{x^4-1}-x^2+1}\right)^2.$$

$$p(z+3z_0 i)+pz_0=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{x\sqrt[4]{x^4-1}+i(x^2-1)}{\sqrt{x^4-1}+x^2-1}\right]^2.$$

Par conséquent,

$$4\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x^4-1}}=\log\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-1}{\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^3-1}}+1\right)^i}+\log\frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}-1}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}+1\right)^i}$$

$$+2\log\frac{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}-2\left(\frac{x\sqrt[4]{x^4-1}+x^2-1}{\sqrt{x^4-1}-x^2+1}\right)^2+2}{\left\{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2-1}}-2\left[\frac{x\sqrt[4]{x^4-1}+i(x^2-1)}{\sqrt{x^4-1}+x^2-1}\right]^2-2\right\}^i}.$$

De même nous calculerons l'intégrale

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2-a)(x^2+3a\pm 2a\sqrt{3})}}.$$

Ici nous avons $z_0=\frac{2\varpi}{3}$; par conséquent,

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(x^2-a)(x^2+3a\pm 2a\sqrt{3})}}$$

$$=\frac{1}{6}\log\frac{\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}}-1}{\left(\sqrt{\frac{x^2-b}{x^2-a}}+1\right)^i}+\frac{1}{3}\log\frac{p(z+2z_0)-pz_0}{[p(z-2z_0 i)-pz_0]^i}.$$

Il reste à remplacer ici les symboles p par des quantités données.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MANNHEIM (Colonel A.), Professeur à l'École Polytechnique. — PRINCIPES ET DÉVELOPPEMENTS DE GÉOMÉTRIE CINÉMATIQUE. Ouvrage contenant de nombreuses applications à la théorie des surfaces. In-4°, x-589 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894.

Ce nouvel Ouvrage du colonel Mannheim peut être considéré comme le complément du *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique;* mais il n'a plus le caractère d'un Traité: l'auteur a simplement voulu faire l'exposé méthodique de ses travaux relatifs à une branche des plus intéressantes de la Géométrie. Une analyse rapide des différentes Parties fera connaître à nos lecteurs la marche suivie par le savant professeur et les résultats qu'il a obtenus. Ces résultats se trouvent pour la plupart dans les nombreux Mémoires qu'il a successivement publiés depuis le début de sa carrière scientifique, mais M. Mannheim les a complétés fréquemment et leur a souvent donné aussi une forme nouvelle.

La première Partie comprend non seulement le déplacement plan des figures de forme invariable, mais aussi le déplacement des figures polygonales de forme variable. Nous y signalerons plus particulièrement un Chapitre relatif au triangle mobile de grandeur variable, un autre relatif au déplacement infiniment petit d'une figure polygonale de forme variable, etc. L'auteur excelle à démêler, dans les figures dont le mouvement et la déformation sont les plus compliqués, des éléments simples auxquels on peut appliquer les résultats obtenus dans l'étude du déplacement d'une figure invariable. A la fin de cette Partie, il reproduit les recherches élégantes que nous lui devons sur les arcs des courbes planes et sphériques considérées comme enveloppes de cercles.

La seconde Partie est intitulée : *Géométrie cinématique de l'espace*. Presque entièrement consacrée à la théorie du déplacement infiniment petit d'une figure de forme invariable, elle a son point de départ dans les découvertes de Chasles. Elle contient l'exposé, coordonné des résultats qu'y a ajoutés M. Mannheim, de la méthode des normales que nous lui devons. La théorie ciné-

matique de la courbure des surfaces occupe un Chapitre presque entier. Des applications particulières à l'étude du mouvement d'une figure dont tous les points décrivent des ellipses, à celle de la polhodie et de l'herpolhodie, au déplacement d'une droite, d'un dièdre ou d'un trièdre dans des conditions les plus variées se mêlent à la théorie générale et en constituent en quelque manière l'illustration.

La troisième Partie est constituée par diverses applications de cette théorie relatives aux normales et aux normalies, aux surfaces réglées, au contact du troisième ordre de deux surfaces, à la surface de l'onde de Fresnel, etc. Nous y signalerons plus particulièrement un Chapitre inédit *Sur le déplacement infiniment petit d'une figure polyédrale de dimensions variables*.

L'*Appendice* contient plusieurs Notes relatives à la construction des tangentes et des centres de courbure, aux longueurs comparées d'arcs de courbe différentes. Nous y remarquons plus particulièrement le *Mémoire d'Optique géométrique*, où l'on trouvera la solution géométrique complète, donnée pour la première fois et dans le cas le plus général, du problème de la détermination des éléments des surfaces caustiques.

En résumé, l'Ouvrage nouveau peut être considéré comme l'indispensable complément du *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique;* il offre la synthèse des élégantes propositions que nous devons à M. Mannheim ou des démonstrations simples et nouvelles de résultats déjà obtenus par d'autres géomètres. Espérons qu'il contribuera notablement à maintenir et à développer le goût, qui se perd de plus en plus, des recherches géométriques.

MÉLANGES.

RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS PROJECTIFS;

PAR M. FR. MEYER (DE CLAUSTHAL).

Traduction annotée par H. FEHR.

(*Suite.*)

DEUXIÈME PARTIE.

AFFINITÉ DES FORMES.

A. — Systèmes finis.

a. — Généralités.

Après avoir traité le problème de l'équivalence, nous avons à exposer le développement remarquable qu'a pris cette partie de notre théorie dans laquelle on étudie les relations algébriques si diverses entre les formations invariantes d'une forme ou d'un système de formes données.

Si nous nous bornons d'abord aux formations *entières et rationnelles;* nous constatons que la nouvelle période (depuis 1868) est caractérisée par un problème bien déterminé, celui des *systèmes finis.*

La question la plus importante, au sens de l'Algèbre moderne, est précisément de savoir s'il existe un domaine fini (*Integritätsbereich*) pour l'ensemble des formes déduites par des opérations invariantes de certaines formes données, c'est-à-dire si dans cet ensemble on peut fixer un *nombre fini* de types dont les puissances et les produits reproduisent tout autre type du même domaine. Dans l'affirmative, quels sont les moyens qui permettent

d'établir ce nombre fini de types soit la *base* ou *le système complet des formes fondamentales* du domaine ([1])?

Ces questions remontent à Cayley ([2]) (IIe Mémoire, 1856) qui, ainsi que Sylvester, avaient déjà montré l'existence d'un système complet de formes fondamentales dans le cas particulier des formes binaires, jusqu'à celles du 4e ordre inclusivement. Cayley s'attaque ici au cas général des formes binaires. Par des considérations qui reposent sur l'expression du *poids* d'un invariant ou d'un covariant, il parvient à faire dépendre le problème d'un système d'équations linéaires. En supposant celles-ci indépendantes entre elles, il en conclut l'impossibilité de l'existence d'un système fini pour les formes d'un ordre supérieur au quatrième. Plus tard cette hypothèse a cependant été reconnue inadmissible (*voir* plus bas, II, A, *d*).

P. Gordan ([3]) montra le premier (1868) qu'à toute forme binaire ([4]) absolument générale appartient un ensemble limité de formes. La démonstration (même dans ses rédactions ultérieures et simplifiées) présente certaines longueurs; mais elle fournit, par contre, des méthodes très pratiques pour indiquer et délimiter les systèmes complets. En général, celles-ci laissent passer quelques types superflus; toutefois pour les formes du cinquième et du sixième ordre (p. 343 et 346) la réduction conduit au système le plus simple, soit respectivement de 23 et 26 formes fondamentales (*voir* II, A, *b*).

La méthode de Gordan repose essentiellement sur la représentation symbolique des invariants et covariants de f, d'après

---

([1]) *Voir* [illegible] *Festschrift*, 18[illegible], p. [illegible]. La dénomination de *système* (*complet*) *de formes fondamentales*, ou simplement *système complet* est due à GORDAN, *Journ. für Math.*, LXIX, p. [illegible]; [illegible].

Il est vrai qu'il existe des domaines sans base finie (*voir*, par exemple, Hilbert, *Gött. Nachr.*, [illegible], p. [illegible]; mais nous n'en parlerons pas dans ce Rapport.

([2]) *Collected Papers*, t. II, p. [illegible].

Comparer la remarque de Cayley dans le *Mémoire II*, *Phil. Trans.*, CLXI, p. [illegible]; [illegible].

([3]) *Journ. für Math.*, LXIX, p. [illegible]; [illegible]. C'est après une communication verbale avec [illegible] que Gordan a été amené à résoudre le problème en question. [illegible] l'exposé de la méthode de Gordan, présenté par CAYLEY, dans le *IXe Mém.* [illegible], p. [illegible].

([4]) Dans la suite [illegible] forme binaire par la notation f, [illegible].

Aronhold et Clebsch, ainsi que sur le rôle fondamental que joue la composition des covariants introduite par Cayley.

La démonstration est basée sur une loi de récurrence (p. 322), en vertu de laquelle tout produit symbolique de degré m, par rapport aux coefficients de f (et par suite toute forme invariante de ce degré) est une fonction linéaire, à coefficients numériques, de formes qui sont des composés de formes de degré $m-1$ avec f. C'est précisément en cela que consiste le progrès sur la méthode symbolique compliquée des Anglais. En répartissant les formes ainsi obtenues d'une façon convenable en classes, on en déduira, après un examen approfondi, l'existence d'un système complet.

Gordan étendit bientôt son théorème à un système ([1]) de formes binaires données, puis aux combinants d'un pareil système de formes de même ordre et, enfin, aux formes ternaires ([2]) d'un ordre peu élevé; depuis cette époque, le savant professeur a constamment travaillé à la simplification de la démonstration.

L'introduction simultanée de plusieurs formes données facilite même le problème. On démontre, par un procédé relativement simple, le théorème suivant, d'une grande portée par ses applications : Si deux formes possèdent chacune une base finie, il en est encore de même du système *combiné* ([3]) résultant de la composition (*Ueberschiebung*) des produits des types de l'un des systèmes avec les produits de ceux de l'autre.

Le *Programme* ([4]) (1875) de Gordan offre des progrès très divers. L'usage exclusif de la composition des covariants avait exigé l'emploi d'un grand nombre de symboles nouveaux. Cet inconvénient se trouve diminué de beaucoup par l'introduction d'un procédé que Gordan désigne par *Faltung* ([5]) et qui est une

---

([1]) *Math. Ann.*, II, p. 227-280, 1870; t. V, p. 95-122 et p. 595-601; 1872.

([2]) Pour les formes cubiques ternaires voir *Math. Ann.*, I, p. 90-128; pour deux formes quadratiques *voir* CLEBSCH-LINDERMANN, t. I, p. 291, 1875. *Voyez* un exposé plus récent dans les *Math. Ann.*, XIX, p. 529-551; 1882.

([3]) *Math. Ann.*, V, p. 595. — Plus tard, MERTENS a étendu ce principe à certaines classes de formes ternaires et quaternaires, *Wien. Ber.*, t. XCV, 1887 et suivants; *voir* la remarque de Gordan dans le *Programme*, p. 50.

([4]) Leipzig, chez Teubner. — NOETHER en a donné un exposé très clair dans les *Fortschritte der Math.*, VII, p. 50-52.

([5]) Nous adopterons comme équivalent français le mot de *transposition*. Cette opération purement symbolique consiste à remplacer le produit $a_x . b_x$ de deux

généralisation symbolique de la composition (*Ueberschiebung*). Cette opération permet également d'établir très simplement le système des formes. De plus, l'auteur fait usage d'un procédé non symbolique, du développement en série (p. 7). On peut, pour une forme à deux variables non homogènes x et y, trouver un développement fini, suivant les puissances de $x-y$, et tel que les coefficients soient les polaires de formes qui contiennent seulement encore la variable x. Cette méthode donne des relations très fécondes entre produits symboliques.

Pour des formes binaires d'un ordre supérieur au sixième le calcul était avancé à ce point que, plus tard, von Gall (¹), après avoir établi explicitement les formes fondamentales appartenant à une forme du septième et du huitième ordre, put se rattacher directement aux systèmes de Gordan.

La plupart des moyens auxiliaires, en particulier le développement en série, après une modification convenable, restent encore applicables aux formes ternaires et à celles d'un nombre de variables plus élevé (*l. c.*, § 19). Si, malgré cela, la démonstration de l'existence d'un système fini pour des formes quelconques d'un rang supérieur rencontre des difficultés insurmontables, il faut l'attribuer aux expressions symboliques qu'on ne peut plus dominer dans leur ensemble; c'est ce qui se présente déjà à partir des formes quaternaires (inclusivement).

Dans les *Vorlesungen* (²) (Leçons) de Gordan, la démonstration se présente d'une façon plus claire, grâce à la notion des systèmes *relativement complets*, renfermant celle des systèmes complets. On désigne sous ce nom un ensemble de formes tel que toute forme qui en dérive au moyen de la transposition (*Faltung*) peut, à certains facteurs près, être exprimée en fonction entière et rationnelle des formes du système. Le développement en série devient alors inutile; par contre, l'usage des *réductants*,

---

facteurs de première espèce et de symboles différents par (ab) et réciproquement. — Jordan fait usage de cette méthode pour la formation des systèmes, *J. de Liouville* (3), t. II et V. — H. F.

(¹) *Math. Ann.*, XVII, 1880; XXXI, 1888. *Cf.* II. A, *b*.

(²) Publiées par KERSCHENSTEINER, Leipzig, Teubner, t. I, *Determinanten*, 1885; II, *Binäre Formen*, 1887. La démonstration est exposée dans les §§ 21, 22 du tome II.

introduits par Gordan dans son Programme (1875, § 8), offre de grands avantages. Ce sont des facteurs contenus dans des produits symboliques et tels que leur présence permet de reconnaître immédiatement la réductibilité de ces derniers à des formes plus simples.

C'est à l'aide de ces considérations nouvelles que Gordan parvient à établir d'une façon très élégante les systèmes complets des formes du 5e et du 6e ordre (*l. c.*, p. 237 et 275).

Dans toutes ces démonstrations, qui sont basées sur la notation symbolique, les formes qui servent de point de départ doivent être considérées comme *absolument générales* de leur espèce, les coefficients étant donc envisagés comme des variables indépendantes. Il en est de même pour les substitutions correspondantes.

Les résultats obtenus peuvent être immédiatement reportés aux formes binaires contenant plusieurs séries de variables (homogènes), ces dernières étant soumises aux mêmes substitutions. Cependant, comme l'a fait voir Peano [1] en 1881, on peut aussi, sans avoir recours à des moyens auxiliaires essentiellement nouveaux, donner une démonstration pour le cas plus général où les substitutions effectuées sur les différentes séries de variables x_1, x_2; y_1, y_2; ... sont, toutes ou en partie, indépendantes les unes des autres. Peano en donne une application importante à la formation des invariants fondamentaux des *correspondances* [2].

Plus récemment Gordan est parvenu à des résultats analogues par une voie directe, en introduisant la notion importante des systèmes *prolongés* [3]. Ainsi, supposons établi, sous forme de composés, le système complet f_1, f_2, ... d'une forme unique; il suffira de supprimer les indices pour obtenir le système prolongé.

A ce qui précède nous devons rattacher un travail remarquable

---

(1) *Atti di Torino*, XVII, p. 73-80.

(2) *Voir* aussi son Mémoire dans le *Batt. G.*, XX, p. 79-101; 1882.

Si l'on égale à zéro une forme binaire à deux séries de variables, on détermine une correspondance entre deux éléments géométriques; les deux séries de variables sont soumises à des substitutions indépendantes l'une de l'autre. H. F.

(3) *Erlanger Ber.*, 1887; *Math. Ann.*, XXXIII, p. 372-389; 1888.

Pour les formes quadratiques *voyez* STUDY, *Erl. Ber.*, 1887, p. 385-388.

(1882) de Peano ([1]), réalisant des progrès importants dans une autre direction. D'après Clebsch (*Binäre Formen*, § 58), les formations invariantes d'une suite linéaire ou quadratiques de formes binaires jouissent de la propriété de pouvoir être ramenées à un certain nombre de types; deux covariants sont d'un même type lorsqu'on peut les déduire l'un de l'autre par des opérations polaires. Quel que soit le nombre de formes proposées, celui des types est *fini*. Peano généralise les résultats précédents en s'appuyant sur un travail de Capelli ([2]); l'auteur montre que, pour une suite de formes binaires d'un degré quelconque, mais identique pour toutes les formes, le nombre des types reste fini lorsque celui des formes augmente indéfiniment. Il examine ensuite le cas d'un nombre quelconque de cubiques binaires et démontre qu'on obtient 10 types; de plus, il donne encore le nombre de formations appartenant à chacun de ces types.

Nous constatons ici un changement de direction pour le développement de la théorie des systèmes finis. Dans les démonstrations précitées ([3]), la formation effective de ces systèmes était prise directement en considération; ce point de vue, plutôt pratique, passe dès lors au second plan, tandis que le principal intérêt se concentre sur la théorie proprement dite. Les méthodes nouvelles qui en résultent n'ont plus ce caractère purement symbolique et mettent plus en relief les propriétés essentielles des systèmes de formes.

La première impulsion dans ce sens a été donnée par un Mémoire de Mertens ([4]) sur le système fini d'un système de formes binaires; l'auteur y présente une démonstration générale, indépendante des auxiliaires des symboles.

([1]) *Atti di Torino*, XVII, p. 580-586.

([2]) *Batt. G.*, XX, p. 293-301; 1882.

([3]) Nous devons encore mentionner deux démonstrations, l'une de Jordan, l'autre de Sylvester, à l'aide desquelles on peut déterminer directement la limite supérieure du degré et de l'ordre des systèmes d'une forme binaire.

Jordan, *Comptes rendus*, LXXXII (1876), LXXXVII (1878); *Journ. de Liouville*, (3), t. II, p. 177-233; 1876, et t. V, p. 345-379, 1879.

Sylvester, *Proc. of London*, XXVII, p. 11-13; 1878. *Comptes rendus*, LXXXVI, p. 1437-1441, 1491-1492, 1519-1522; 1878. Quant aux autres recherches de Sylvester, *voir* plus loin, II, A, *c*.

([4]) *Journ. für Math.*, C, p. 223-230; 1886. Travail simplifié dans les *Wien. Ber.*, XCVIII, p. 1-6; 1889.

De son côté, Hilbert (¹), auquel notre théorie doit ses progrès récents si remarquables, avait déjà publié une démonstration analogue à celle de Mertens et tout à fait générale.

Plus récemment encore, dans son beau Mémoire (²) de 1890, Hilbert démontre d'une façon générale, et en ne faisant exclusivement usage que d'opérations rationnelles, que le système des invariants résultant d'une suite proposée de formes quelconques à n variables, est un système fini. L'auteur a réussi d'autant mieux qu'il a su délivrer (³) le noyau de la question du domaine étroit de la théorie des invariants, pour en faire une propriété fondamentale d'une infinité de systèmes de formes algébriques.

La méthode repose essentiellement sur la proposition suivante : Considérons une suite ininterrompue de formes $F_1, F_2, \ldots$ à n variables, obtenue suivant une loi quelconque donnée, l'ordre des F et les coefficients n'étant soumis à aucune restriction; les coefficients appartiennent, par exemple, à un domaine de rationnalité R.

« On pourra toujours, dans la suite des F, fixer un nombre fini de formes $F_{i}, F_{i_2}, \ldots, F_{i_m}$, telles que toute forme F_s de la série puisse être exprimée linéairement au moyen de celles-ci, c'est-à-dire telles que l'on ait

$$F_s = A_{s_1} F_{i_1} + A_{s_2} F_{i_2} + \ldots + A_{s_m} F_{i_m},$$

où les A sont également des formes en x dont les coefficients appartiennent au même domaine R. »

(¹) *Math. Ann.*, XXXIII, p. 223-226; 1888. *Voir* dans les *Math. Ann.*, XXXIV, p. 319-320 (1889) une Note dans laquelle CAYLEY propose une modification du procédé de Hilbert; dans le t. XXXV, PETERSEN vient rectifier une erreur dans les conclusions (p. 110-112). — Dans les *Fortsch. der Math.*, XXI, p. 104, Hilbert dit expressément que sa démonstration n'exige aucun complément.

(²) *Math. Ann.*, XXXVI, p. 473-534. *Voir* d'abord une série de communications insérées dans les *Gött. Nachr.*, 1888, n° 16, p. 450-457; 1889, n° 2, p. 25-34, et n° 15, p. 423-430 et dans les *Math. Ann.* (t. XLI, p. 469-490; 1893), une Note de STORY sur la théorie de Hilbert. Consulter dans ce même Recueil les Mémoires récents de HILBERT (t. XLII, p. 313-373; 1893) et de GORDAN (p. 132-142).

(³) En effet, la méthode de Hilbert établit un lien très étroit entre la théorie des formes et celle des systèmes modulaires et des corps algébriques de KRONECKER d'une part et de DEDEKIND et WEBER d'autre part.

De plus, l'auteur généralise l'opération *cayleyenne* Ω_a, étudiée par Gordan et Mertens ([1]), et il en déduit une proposition auxiliaire d'un usage très fécond dans la formation des systèmes.

La méthode de Hilbert s'applique même au cas plus général de plusieurs séries de variables en nombre égal ou inégal, et soumises à des substitutions quelconques, identiques ou différentes.

Son Mémoire contient, en outre, une série de propositions importantes concernant la formation des *syzygies* (*cf.* II, A, *d*).

Dans un travail plus récent ([2]), Hilbert a encore exposé d'autres conséquences de sa méthode en l'examinant tout particulièrement au point de vue de la formation effective des systèmes complets. Il s'est également proposé le problème intéressant qui consiste à déterminer une forme ayant certains invariants donnés. Nous aurons l'occasion de revenir sur ce dernier point (II, B, *b*).

b. — Sur certains points spéciaux de la théorie des systèmes complets.

Nous examinerons, dans ce paragraphe, les travaux visant particulièrement le calcul des systèmes complets. On conçoit facilement que, dans les méthodes fondées par Clebsch et Gordan, le nombre des formes d'un système présente d'abord le caractère d'une limite supérieure : en effet, on a constaté que, dans plusieurs cas ([3]), ces systèmes contenaient des formes superflues.

([1]) Voir les *Vorlesungen* de Gordan, t. II, § 9.

Mertens en a donné une démonstration dans les *Wien. Ber.*, XCV, p. 94[illegible] ([illegible]), et s'en est servi depuis dans une série de travaux publiés dans le même Recueil (cf. II, A, [illegible]).

[illegible] s'est servi du même procédé pour les formes linéaires : voir *Journ.* [illegible], LIX, p. [illegible] et suivantes.

([2]) [illegible] et [illegible], n° 12, p. 11 et suivantes.

[illegible] à coefficients *entiers*, consulter [illegible]

([3]) [illegible] par les systèmes simultanés [illegible] par le système d'une forme *f*.

[illegible] *Comptes rendus*, LXXXIX, p. [illegible] et [illegible] dans [illegible]

[illegible] formes par [illegible]

[illegible] *Comptes* [illegible] par

Ce n'est que plus tard, en examinant les travaux des géomètres anglais (*cf.* II, A, *c*) que l'on a pu fixer dans ces nombres ceux qui sont absolument exacts.

Pour une forme binaire unique, les cas les plus simples $n = 2, 3, 4$ ont été déterminés depuis longtemps par Cayley et Sylvester; mais ce ne fut qu'en 1868 que Gordan parvint à résoudre le problème pour f_5 et f_6 (1). La méthode que suivit ce dernier pour démontrer l'existence de ces systèmes respectivement de 23 et 26 formes fondamentales, permettait une extension à une forme quelconque f_n, sans exiger des moyens auxiliaires essentiellement nouveaux.

En se basant sur la démonstration simplifiée par Gordan dans son *Programme,* V. Gall établit directement le système complet de f_8 (2) et plus tard, en surmontant des difficultés plus grandes, il obtint celui de f_7 (3).

Quant au système simultané de deux formes f_n, les cas (2, 2), (2, 3), (3, 3) ont été examinés par Salmon et Clebsch; (3, 4) par Gundelfinger (4), (2, 5) par Winter (5) et (2, 6) par V. Gall (6). Gordan en a fait une étude systématique dans un travail (7), à la fin duquel il donne le tableau des formes pour lesquelles aucune des deux ne dépasse le 4e ordre. Citons encore une étude du système (4, 4) due à Bertini (8).

Pour ce qui est des systèmes simultanés de plus de deux formes

---

par D'OVIDIO, *Atti di Tor.*, XV, p. 301-304, et par STROH, *Math. Ann.*, XXII, p. 290-296 (1883).

Quant à f_8, voyez les Notes de V. GALL, *Math. Ann.*, XVI, p. 456 (1880) et de SYLVESTER, *Comptes rendus,* LXXXIV, p. 240-244, 532-534, t. XCIII, p. 192-196, 365-369; *Am. Journ.*, IV, p. 62-85 (1881); puis une communication de STROH, dans les *Math. Ann.*, XXXI, p. 444-454 (1888).

(1) *Journ. für Math.*, LXIX, p. 323-354; *voir* aussi MAISANO, *Rom. Acc. L. Mem.*, (3), XIV (1883) et XIX (1884).

(2) *Math. Ann.*, XVII, p. 31-52, 139-152, 456 (1880).

(3) *Math. Ann.*, XXXI, p. 318-336 (1888). Comparer KREY, *Dissert.*, Striegau, 1874.

(4) *Programm,* Stuttgart, 1869, p. 1-43.

(5) *Programm,* Darmstadt, 1880.

(6) *Programm,* Lemgo, 1873.

(7) *Math. Ann.*, II, p. 227-281; 1870.

(8) *Batt. Giorn.*, XIV, p. 1-14; 1876, reproduit dans les *Math. Ann.*, XI, p. 30-41; 1877.

binaires, on n'a guère dépassé Clebsch (¹) qui a traité le cas d'une série quelconque de formes respectivement linéaires et quadratiques; le système de quatre formes, dont deux linéaires et deux quadratiques, a été étudié en détail par Perrin (²).

Si nous passons aux formes ternaires C_n, nous avons d'abord, pour une forme unique, un cas présentant certaines difficultés : c'est celui de $n = 3$ pour lequel Gordan (³) a démontré l'existence d'un système de 34 formes.

Ce ne fut que beaucoup plus tard que Mertens (⁴) arriva au même résultat par une voie non symbolique, uniquement au moyen de l'*opération* Ω.

Pour $n = 4$ le nombre des formes devient si considérable que Gordan préféra se limiter à un type (⁵) spécial qui peut être caractérisé par l'existence d'une simple identité entre covariants; ce type se présente dans l'étude de l'équation du 7ᵉ ordre admettant 168 substitutions en elle-même. Dans le cas général de C_4, Maisono (⁶) a déterminé les formes dont le degré ne dépasse pas le nombre 5.

L'étude du système de deux formes C_2 a été entreprise par Gordan (⁷) qui l'a rattachée plus tard (⁸) à celle du type C_4 cité

(¹) Consulter à ce sujet son traité : *Binaere Formen*, Leipzig, 1872, ainsi que l'exposé simplifié par Gordan dans ses *Vorlesungen*, t. II, Leipzig, 1887.

(²) *Bull. Société math.*, XX, p. [illegible] Tout récemment von Gall a traité le cas de trois [illegible] *Math. Ann.*, t. XLV, p. [illegible]

(³) *Math. Ann.*, I, p. [illegible] t. XVII, p. 217-233 (1880). *Voir aussi* t. VI, p. [illegible] et les simplifications introduites par Gundelfinger, t. IV, p. [illegible] et t. V, p. [illegible]

Pour la forme normale de Hesse C_3 [illegible] $ax^3 + by^3 + cz^3 + 6dxyz$, consulter Cayley, *Am. Journ.*, IV, p. [illegible] on y trouvera des renseignements bibliographiques.

Quant aux formes [illegible] voyez Dingeldey, *Math. Ann.*, XXXI, p. [illegible]

(⁴) [illegible] t. XCIII, p. [illegible]

(⁵) *Math. Ann.*, XVII, p. [illegible] Système complet de 54 formes. *Voir une* [illegible]

(⁶) [illegible] XIX, p. [illegible] *Proc. Royal* [illegible] I, p. 54-56 (1886).

[illegible] le tableau des [illegible]

(⁸) *Math. Ann.*, XX, p. [illegible] *Am. J.*, XIV, [illegible]

plus haut. Récemment Perrin a exposé les relations algébriques et géométriques des formes de ce système (¹).

La connaissance du système complet de trois formes C_2 est due à Ciamberlini (²).

Les formes quaternaires $F_n(x)$ ont été étudiées dans le cas de $n = 2$ par Mertens (³) qui est parvenu, en modifiant convenablement l'opération Ω, à un système complet de 20 formes. Il a également montré comment des systèmes isolés de 2 formes F_2, on peut facilement passer au système simultané de ces deux dernières. En suivant une méthode analogue, le même auteur a examiné (⁴) les formes bilinéaires alternées de deux séries de variables quaternaires et cogrédientes.

Enfin, quant aux formes à plusieurs séries de variables, nous devons mentionner les Mémoires de Study et de Gordan sur le système complet d'une forme binaire doublement quadratique (⁵).

Dans le domaine ternaire, on ne possède encore que le système d'une forme linéaire à deux séries de variables contragrédientes x et u; ce problème (⁶) a été étudié par Clebsch et Gordan. Récemment (⁷) Mertens a examiné la question analogue pour les formes quaternaires.

Il nous reste encore à signaler certains *sous-systèmes complets*.

(¹) *Bull. Société Math.*, XVIII, p. 1-80; 1890. Le Rapporteur en a donné un compte rendu détaillé dans les *Fortsch. der Math.*, t. XXII.

Comparer encore Rosanes, *Math. Ann.*, VI, p. 264 et Gerbaldi *Annali di Mat.* (2), XVII, p. 161-146; 1889.

(²) *Batt. G.*, XXIV, p. 141-157; 1886. C'est un système de 127 formes.

(³) *Wien. Ber.*, XCVIII, p. 691-739 (1889). L'année suivante (p. 367-384), il détermine explicitement le système complet (47 formations) de 3 formes F_1.

(⁴) *Wien. Ber.*, XCVII, p. 519-537; 1888.

(⁵) *Math. Ann.*, XXXIII, p. 372-389; 1889. Système composé de 38 formes. *Voir* les Notes de Study et de Gordan dans les *Erlanger Ber.* de 1889. Le système complet des *invariants* avait déjà été trouvé par Capelli, *Batt. G.*, XVII, p. 69-148; 1879.

Dans les formes binaires à plusieurs séries de variables congrédientes, Le Paige a étudié dans un but géométrique celles qui sont trilinéaires et quadrilinéaires. *Comptes rendus*, XCII, p. 1048-49; 1103-5; XCIII, p. 264-265, p. 509-512 (1881); XCIV, p. 69-71; *Atti Torino*, XVII, p. 299-326 (1882).

(⁶) *Math. Ann.*, I, p. 359-400; 1869.

(⁷) *Wien. Ber.*, XCVIII, p. 13-32; 1890.

Si nous faisons abstraction de ceux dont l'existence est évidente ([1]), nous pouvons nous borner à deux cas.

Le premier appartient à la catégorie des combinants binaires que Gordan ([2]) a reconnus en 1872 comme constituant le système complet d'une forme unique à plusieurs séries de variables cogrédientes. Le cas le plus simple est celui de deux formes f_4. D'après la méthode de Gordan, la recherche du système complet des combinants revient à celle du système simultané ordinaire de deux covariants élémentaires respectivement du 6e et du 2e ordre entre lesquels il existe une certaine relation identique. Le calcul qui s'y rattache a été fait par Stephanos ([3]).

Il y a ensuite un sous-système très remarquable rencontré par Wiltheiss dans l'étude des fonctions hyperelliptiques ([4]). C'est un système de neuf covariants de f qui, soumis à l'opération δ (d'Aronhold) donnent toujours naissance à des covariants du système.

Les recherches sur les systèmes complets basées sur les fonctions génératrices et celles des systèmes complets des syzygies seront traitées plus loin. Par contre, nous avons déjà eu l'occasion (I, A, *b*) de mentionner ceux des systèmes complets qui se rattachent aux groupes finis de substitutions linéaires.

c. — Systèmes associés et représentation typique.

Au lieu d'avoir en vue la détermination du système fini des formes invariantes déduites de formes données, certains travaux ont plus particulièrement pour but d'obtenir pour ces formes un domaine de rationalité ([5]) à base finie. C'est à ces Mémoires que nous consacrons ce paragraphe.

([1]) Par exemple, ceux dont les formes ne contiennent qu'une partie des variables, de plus les classes de systèmes A_1 A_2 ... d'après Gordan (*Vorlesungen*, II, § 21).

([2]) *Math. Ann.*, V, p. 95-122; 1875.

([3]) *Comptes rendus*, XCVII, p. 27-31; 1883. L'auteur a obtenu 26 formes.

([4]) *Math. Ann.*, XXXV, 433-456; 1889; t. XXXVI, p. 134-153; t. XXXVII, p. 229-272; 1890.

([5]) Dans ce même ordre d'idées, on pourra consulter les développements que Lagrange a donnés aux relations rationnelles entre fonctions *semblables*. *Voir* aussi KÖNIG, *Math. Ann.*, XVIII, p. 69-77 (1881).

Le problème remonte à Hermite ([1]), qui fit voir, en 1852, que les formes invariantes qui dérivent d'une forme binaire f peuvent être exprimées à l'aide de f et des *formes associées* $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$. Cependant, comme le remarqua Clebsch ([2]) en 1870, ce système associé peut être ramené à un autre plus simple, composé du covariant ψ (du second degré) de f et du déterminant fonctionnel χ de ψ et de f; ce dernier est un covariant du 3ᵉ degré de f. Les φ deviennent alors exprimables à l'aide de formules récurrentes en fonction de ψ, χ, f. Ce résultat a été démontré dans toute sa généralité au moyen de la méthode symbolique par Gundelfinger ([3]), qui de plus en a fait l'extension au système simultané de deux formes f_n et φ_m.

Le cas d'une série de formes binaires a été étudié par Sylvester ([4]) qui s'est appuyé sur les sources des covariants.

Kohn ([5]) a fait une application intéressante des formes associées à la divisibilité des résultants et des discriminants de covariants par une puissance du discriminant de la forme ou d'un système simultané de formes données.

C'est en se basant sur les sources des formes associées ψ, χ, introduites par Clebsch, que Perrin ([6]) a pu étendre les résultats précédents au cas de formes F à p variables cogrédientes x_1, $x_2, \ldots, x_p$.

Ce problème a été traité directement et d'une façon remar-

([1]) *Journ. für Math.*, LII, p. 1-38. Dans une autre voie, en rapport avec la résolution des équations algébriques, c'est IGEL qui a fondé la théorie des formes associées; Vienne (chez Gerold), 1889.

([2]) *Gött. Nachr.*, 1870, p. 405-409 ou *Math. Ann.*, III, p. 265-267; 1871.

Ce travail a donné lieu à un Mémoire de CAYLEY sur la représentation typique de f_1; *X. Mem. Phil. Trans.*, p. 603 661; 1878.

([3]) *Journ. für Math.*, LXXIV, p. 87-91; 1871. Cet exposé a été simplifié par l'auteur dans *Salmon-Fiedler*, p. 459-463 (1877). Le problème inverse a été examiné par GORDAN, *Math. Ann.*, XL, p. 503-526; 1892. *Voir* aussi BARTHLEIN, *Dissert.* Erlangen, 1887 et FORSYTH, *mess.*, n° 202, 1888; ainsi que le travail récent de IGEL, *Monatshefte für Math.*, V, p. 29-302; 1894.

([4]) *Comptes rendus*, LXXXVI, p. 448-450; 1878. *Ann. Journ.*, I, p. 118-124; 1878.

([5]) *Wien. Ber.*, juillet 1891 (29 pages); octobre 1891 (5 pages).

([6]) *Comptes rendus*, CIV, p. 108-111, 220-223, 280-283; 1887. L'auteur ramène la recherche des invariants et covariants de F ou d'un système de F à celle des invariants d'un système déterminé de formes à $p - 1$ variables cogrédientes.

quable par Forsyth (¹) qui, en outre, a entièrement développé certains cas isolés pris dans le domaine ternaire ou quaternaire. Dans le cas des formes ternaires $F = F_n(x_1, x_2, x_3)$ le système des ternariants associés à F se compose, abstraction faite du covariant identique, de $\frac{1}{2}(n+4)(n-1)$ formes.

Dans la méthode d'Hermite les systèmes associés reposent sur les transformations (linéaires) des formes binaires données. Brioschi (²) a étendu cette méthode aux formes à plusieurs variables. La question a été entièrement résolue dans deux cas isolés : pour la forme ternaire générale C_3 et pour une forme spéciale C_4 (³).

Ce que nous venons de voir se rapporte à la *représentation typique* des formes invariantes à l'aide de *covariants*. En effet, d'une manière générale, la méthode consiste à multiplier la forme donnée $F(x)$ (ou la série des formes proposées) par une certaine puissance d'un covariant écrit au moyen des variables cogrédientes y, et tel que le produit puisse être développé suivant les puissances des fonctions entières ξ, η de x, y, les nouveaux coefficients représentant des covariants de $F(x)$. On peut se limiter au cas où la substitution effectuée sur les y est linéaire.

Par contre, il existe une *représentation typique à l'aide d'invariants;* la forme donnée (ou la série des formes) multipliée par une certaine puissance d'un invariant B de F et développée suivant les puissances des fonctions entières ξ, η de x (qui seront des covariants de F) aura comme nouveaux coefficients des invariants de F.

La transformation qui permet ce passage est une transformation ordinaire de Tschirnhausen; cependant, dans beaucoup de cas, on peut éviter l'application directe de cette méthode (parfois pé-

---

(¹) *Am. J.*, XII p. 1-60, 115-160; 1889 (Ternariants); *voir* aussi, pour ce qui est du domaine ternaire, BRUNGATE, *Quart. J.*, XXV, p. 155-181; 1891. *Cambr. Phil. Trans.*, XIV, p. 409-466; 1889. (Quaternariants).

(²) *Voir* plus haut, p. 191, note (¹). Une pareille extension a été faite, en suivant une autre voie, par GRASSMANN, *Math. Ann.*, VII, p. 538-548; 1878, et par CHRISTOFFEL, *Math. Ann.*, XIX, p. 280-290; 1892.

(³) Le premier est dû à Clebsch et Gordan : *Math. Ann.*, I, p. 57-89; 1869. Le cas de C_4 admettant 168 substitutions a été examiné par Gordan dans un travail mentionné à plusieurs reprises (*Math. Ann.*, XVII, p. 359-379; 1880).

nible), de sorte que la transformation elle-même passe à l'arrière-plan.

On reconnaît facilement qu'il existe un grand nombre de problèmes conduisant *a priori* à une pareille forme invariantive qui laisse entrevoir le caractère d'invariance des formes données ou de certaines fonctions de celles-ci.

C'est le cas de la représentation typique donnée en premier lieu (1851) par Hermite (1) pour les quintiques et, en général, pour les formes binaires d'ordre impair; les nouvelles variables sont, comme on sait, deux covariants linéaires.

Clebsch et Gordan (2) ont étudié (1867) en détail la représentation typique d'une quintique en suivant la voie tracée par Hermite; en particulier, ils ont tenu compte des cas spéciaux qu'entraîne l'évanouissement de certains invariants. Ils ont présenté une étude analogue pour la sextique. Leur Mémoire montre clairement comment l'on peut, en faisant usage d'identités symboliques, éviter l'application directe des substitutions.

Lindemann (3), dans ses recherches sur une certaine forme type C_n, a observé que cette forme, considérée comme forme ternaire à trois variables quelconques, pouvait être caractérisée par l'évanouissement d'un certain covariant. L'interprétation géométrique de ces relations le conduit aux éléments de la théorie de l'*apolarité* (*voir* plus loin, II, D. *b*.).

Quant à la représentation typique des formes binaires simultanées les plus simples, nous devons mentionner les recherches de Bessel (4) et de Harbordt (5).

Hermite (6) avait déjà présenté un cas intéressant par sa remarque que deux formes binaires cubiques, considérées comme dérivées premières d'une forme biquadratique, avaient une repré-

---

(1) *Cambr. and Dublin Math. J.*, IX, p. 172-217. *Voir* à la p. 186 (*Bull.*, XVIII,) le Rapport.

(2) *Annali* (2), I, p. 23-79. Comparer à cela l'exposé dans Gordan : *Vorlesungen*, II, §§ 24, 29. — Gordan en fait une application à l'équation modulaire du 6e ordre de Jacobi. *Annali* (2), I, 367-372; 1867.

(3) *Bull. Soc. Math.*, t. V, p. 113-126; 1876; t. VI, p. 195-208; 1878.

(4) *Math. Ann.*, I, p. 173-194; 1869.

(5) *Math. Ann.*, I, p. 210-224; 1869.

(6) *Journ. für Math.*, LVII, p. 371-375; 1860.

sentation typique très simple. Cayley (1) basa là-dessus sa transformation du troisième ordre de l'intégrale elliptique de première espèce.

Clebsch (2) et plus tard Gundelfinger (3) ont développé cette remarque de Hermite.

Lindemann (4) parvint ensuite à montrer que, d'une façon analogue, on peut considérer trois formes binaires biquadratiques comme dérivées secondes d'une sextique.

C'est encore à Hermite (5) que l'on doit le premier exemple analogue dans le domaine ternaire; il indique comment on peut déterminer une cubique ayant comme dérivées premières trois formes quadratiques données; dans ce cas, les invariants simultanés de ces dernières coïncident avec les coefficients de la cubique. Ce travail justifie aussi l'expression donnée par Sylvester (6) pour le résultant de trois formes quadratiques, considéré comme combinant de celles-ci.

Gundelfinger reprit la proposition d'Hermite pour en donner une démonstration très simple (7). Il en appliqua les résultats aux transformations quadratiques d'une intégrale elliptique de première espèce, prise le long d'une courbe plane du troisième ordre.

Enfin, il convient de mentionner encore la représentation typique que l'on rencontre dans les travaux de Gordan (8) sur l'équation du septième ordre admettant 168 substitutions en elle-même.

La représentation typique à l'aide d'invariants joue un rôle re-

---

(1) *Voir* l'exposé donné par Clebsch dans son Traité : *Binäre Formen*, § 101.

(2) *Journ. für Math.*, LXVII, p. 371-380; 1867.

(3) *Math. Ann.*, VII, p. 452-456; 1874. — Consulter aussi WIEDERHOLD, *Math. Ann.*, VIII, p. 444-452; 1875. IGEL, *Monatsh. f. Math.*, p. 289; 1894.

(4) CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen*, I, p. 900. — Voyez les *Dissertations* de FRIEDRICH, Giessen, 1886, et de E. MEYER, Königsberg, 1888. IGEL a étudié trois formes f_4 comme dérivées secondes d'une f_6, et en a fait une application à la transformation d'après Jerrard, d'une équation du cinquième ordre (*Wien. Ber.*, LIII, p. 155-184; 1887).

(5) *Journ. für Math.*, LVII, p. 371-375; 1860.

(6) *Cambr. and Dublin Math. J.*, VIII, p. 63.

(7) *Journ. f. Math.*, LXXX, p. 73-85; 1875 et *Math. Ann.*, VII, p. 449-451; 1874.

(8) *Math. Ann.*, XX, p. 529-552; 1882.

marquable (¹) dans le système complet des combinants de deux formes binaires f_n, φ_n : multipliés par une puissance convenable du résultant de f_n et φ_n, les types du système deviennent ceux du système complet d'une forme binaire unique d'ordre $2(n-1)$.

L'importance de la représentation typique dans la théorie des syzygies ressortira nettement dans le paragraphe suivant.

d. — Des syzygies.

Le domaine de rationalité, comme celui des systèmes complets, nous offre des moyens d'approfondir les relations algébriques qui existent entre les différents systèmes de formations invariantes. Mais cela ne nous permet de faire qu'un premier pas. Il s'agira de nouveau d'établir, dans chaque cas, l'ensemble de ces relations algébriques ou *syzygies*, c'est-à-dire qu'il faudra encore fixer pour les premiers membres (ou syzygants) de ces relations, la base finie des *syzygants fondamentaux;* dans ces derniers les coefficients pourront être des formes fondamentales du système des formes proposées.

De ces syzygies de *première espèce,* on passera ensuite à celles de rang supérieur.

Le problème lui-même est bien défini. En effet, tout récemment, Hilbert (²) est parvenu à montrer que les syzygies de chaque espèce constituent un système complet et que la chaîne des syzygies est limitée.

Dans ces recherches, d'un caractère purement expérimental, les résultats partiels obtenus dépendent en première ligne de

---

(¹) *Voir* le Mémoire de Stroh dans les *Math. Ann.*, XXXIV, p. 321-331 ; 1889.
Dans son Cours (hiver 1891-92) Klein a indiqué une autre représentation typique d'une forme binaire f. La forme f, multipliée par son discriminant, peut être ramenée au type $|a_{ik}+\lambda b_{ik}|$.
Rappelons encore la représentation typique des intégrales elliptiques (et abéliennes) telles que l'a introduite Weierstrass, et développée ensuite par Klein et ses élèves. Voyez, par exemple, les travaux de Klein, *Math. Ann.*, XVII, p. 133-138; 1880, et *Leipziger Abh.*, 1885. Consulter aussi Bruno, *Am. J.*, V, p. 1-25, 1882; Burkhardt, *Dissert.* Munich, 1887; White, *Nova Acta*, LXII, n° 2, p. 43-128, et l'exposé général dans Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. II, Paris, 1888.
(²) *Math. Ann.*, XXXVI, p. 473-534 ; 1890; *voir*, en particulier, p. 534.

l'habileté de chaque auteur. Nous ne pouvons donc qu'esquisser à grands traits l'état actuel de cette branche en signalant les principales voies suivies par les différents géomètres.

Cayley (1) et Brioschi (2) ont étudié avec succès le cas de la forme binaire f_5, en prenant pour base la théorie des systèmes associés fondée par Hermite. Sylvester et Hammond complétèrent plus tard (3) le tableau donné par Cayley pour les syzygies de première espèce de f_5. Cependant l'extension de cette méthode rencontre de grandes difficultés de calcul; elle n'apprend d'ailleurs que fort peu sur la structure des systèmes de syzygies.

Stephanos (4) a tracé une autre voie. Il suit la méthode symbolique en s'appuyant sur les recherches de Clebsch (5). Pour les formes binaires il existe un domaine, celui des déterminants fonctionnels, à l'intérieur duquel on peut grouper les syzygies. L'auteur applique ces considérations à l'étude des formes f_6.

Von Gall (6) a développé ce principe des déterminants fonctionnels en le rattachant à l'opération d'Aronhold. Il réussit ainsi à abréger les calculs et parvient à déterminer, dans cette multitude de relations, celles qui sont irréductibles, c'est-à-dire les syzygies fondamentales.

Perrin (7) a donné une méthode plus directe, sans recourir au

---

(1) *Mém.* II, III, V, VIII, 1867, X, 1878.

(2) *Annali* (2) XI, p. 291-304; 1883. Pour le domaine ternaire, voir *Annali* (2), XV, p. 235-252; 1887. L'auteur se sert des syzygies pour la détermination de certaines formes canoniques utiles dans la résolution des équations du cinquième (et sixième) degré.

(3) Sylvester, *Am. J.*, IV, p. 41-62, 1881; en part. p. 58.
Hammond, *Am. J.*, VIII, p. 19-25; 1885.

(4) *Comptes rendus*, XCVI, p. 232-235, 1564-1567; 1883.

(5) *Binaere Formen*, § 54. Comparer à cela Gordan, *Vorlesungen*, II, §§ 4, 11, 12.

(6) *Math. Ann.*, XXXI, p. 424-440; 1888. Cas de deux formes f_3.
Math. Ann., XXXIII, p. 197-223; 1888. Cas de deux formes f_4.
Math. Ann., XXXIV, p. 332-353; 1889. Id.
Math. Ann., XXXV, p. 63-81, 1889. Cas d'une forme f_4.

(7) *Bull. Soc. math.*, XI, p. 88-107; 1883. *C. R.*, XCVI, 1883, p. 426-430, 479-482, 563-565, 1717-1721, 1776-1779; 1842-1845.
Sylvester s'était déjà servi de cette méthode de réduction, *Am. J.*, V, p. 79-139, 1882-1883. — Les formes f_5 et f_6 ont été examinées encore tout récemment par d'Ovidio, *Palermo Rend.*, t. VI, p. 225-233, 1892; t. VII, p. 1-4; 1893 et *Torino Atti*, t. XXVII, p. 535-563, 1892; t. XXVIII, p. 118-133, 447-451; 1893.

calcul symbolique, mais en suivant la voie ouverte par Cayley et Roberts. Il base la formation des syzygies sur les sources (*péninvariants*) des covariants : un péninvariant étant donné, on sait, en effet, que le covariant dont il est la source est déterminé et calculable. En combinant ce principe avec celui des formes associées, l'auteur parvient à une théorie générale qui permet de faire le calcul même dans des cas très compliqués. Il a développé l'application de sa méthode aux cas f_5 et f_6.

Une syzygie (de première espèce) étant une relation entre les formes fondamentales A_1, B_1, ... d'un système, elle sera, à coup sûr, irréductible si, dans ses termes, il s'en trouve au moins un de la forme AB. Hammond [1] a remarqué qu'en effet toutes les syzygies connues (de première espèce) contiennent un pareil terme *binaire*, de sorte que ce dernier peut précisément servir à caractériser une syzygie. Cette remarque apporta certaines simplifications dans la formation de syzygies nouvelles.

Von Gall [2] rencontra cependant un exemple — la relation entre les 8 covariants de deux formes f_4 — qui échappait au théorème de Hammond. En spécialisant convenablement les coefficients, Stroh [3] confirma ce résultat ; par conséquent ce théorème, déduit de l'observation, n'a pas la généralité qu'on voulut d'abord lui attribuer.

Dans une série [4] de Mémoires remarquables, Stroh a généralisé la méthode des déterminants fonctionnels employée par Stephanos et Von Gall, et il a montré que toutes les syzygies dérivent de relations entre les composés (Ueberschiebungen) d'ordre supérieur d'un certain nombre de formes.

Si nous considérons les résultats obtenus jusqu'ici, en tenant compte de ceux qu'a fournis l'emploi des fonctions génératrices,

---

(1) *Am. J.*, VII, p. 327-344, 1884 ; f_6. *Am. J.*, VIII, p. 19-25, 1885 ; f_5.

(2) *Math. Ann.*, XXXIV, v. p. 332 ; 1889.

(3) *Math. Ann.*, XXXVI, p. 154-156 ; 1890.

(4) *Math. Ann.*, XXXIII, p. 61-108 ; 1888. Il prend comme exemple la forme f_4. Consulter encore *Math. Ann.*, XXXIV, p. 354-370, 1890. Le germe de la méthode se trouve dans son Mémoire inséré dans les *Math. Ann.*, XXXI, p. 444-454 ; 1888. Application au cas f_6, *Math. Ann.*, XXXIV, p. 306-318 ; 1889, et XXXVI, p. 262-303.

nous devons reconnaître que la théorie des syzygies, malgré l'abondance des calculs, n'est encore qu'à sa période de développement (¹).

Les recherches si étendues pour les cas f_5, f_6, et pour les systèmes simultanés (f_2, φ_3), (f_3, φ_3), (f_3, φ_4), (f_4, φ_4) semblent bien avoir fourni une limite inférieure exacte; mais, si l'on fait abstraction des cas ordinaires f_2, f_3, et $2f_2$ (²), on ne possède, d'une manière certaine, encore aucun système complet de syzygies, même de première espèce.

Les systèmes d'ordre supérieur n'ont guère été traités jusqu'ici; il en est de même de la recherche fondamentale qui consiste à savoir où doit s'arrêter la chaîne des syzygies qui correspondent à un cas donné.

e. — Méthode numérative; fonctions génératrices.

Les méthodes de Clebsch et d'Aronhold fournissent pour les systèmes finis une limite *supérieure* du nombre des formes fondamentales. Si donc, par une autre voie, on parvient à déterminer pour ces nombres une limite *inférieure*, on possédera à coup sûr le nombre exact de ces formes lorsque ces deux limites se confondront.

Plusieurs géomètres anglais, notamment Cayley et Sylvester (³), se sont proposé la détermination de pareilles limites inférieures en basant leurs recherches sur la *fonction génératrice* que l'on rencontre dans les travaux d'Euler (⁴) sur la *partition des nombres*.

Les premiers Mémoires de Cayley (⁵) remontent à l'année 1856.

(¹) Remarquons encore que Mac-Mahon a consacré un Mémoire aux syzygies entre *perpétuants*; *Am. J.*, X, p. 149-168; 1887.

(²) D'après ma correspondance avec HILBERT, ce dernier a établi le système complet des (14) syzygies d'un système de trois formes quadratiques. Cf. *Math. Ann.*, XXXVI, p. 534.

(³) Voyez sa Note dans le *Am. J.*, IV, p. 62; 1881.

(⁴) *Introductio in Analysin*..., I, § 301.

(⁵) *Voir* dans notre *Introduction*, *Bull.*, 2ᵉ série, XVIII, p. 187 et 188.

Modifiés [1] plus tard par l'auteur, ils forment la base de toute une série de travaux que l'on doit à Sylvester [2].

Considérons, par exemple [3], une forme binaire unique f_i ayant les coefficients a_i. La source φ d'un quelconque de ses covariants d'ordre g, de degré j et de poids $w = \frac{1}{2}(ij - g)$, satisfait à l'équation différentielle caractéristique

$$\delta\varphi = a_0 \frac{\partial\varphi}{\partial a_1} + 2\, a_1 \frac{\partial\varphi}{\partial a_2} + \ldots + i a_{i-1} \frac{\partial\varphi}{\partial a_i} = 0.$$

Le problème fondamental consiste à trouver le nombre des covariants (et invariants incl.) de f_i ayant pour le degré et le poids (ou pour le degré et l'ordre) des valeurs assignées à l'avance.

Si l'on désigne par $(w : i, j)$ le nombre des coefficients d'une source, il suffira, pour résoudre cette question, d'en retrancher le nombre des relations linéaires et linéairement indépendantes qui sont imposées aux coefficients de φ par l'identité $\delta\varphi = 0$. Sylvester [4] a démontré (1878) d'une manière générale l'hypothèse de Cayley, d'après laquelle le nombre de ces relations est égal à

---

(1) IX *Mem. Phil. Trans.*, p. 17-50; 1870 et X, *Mem. l. c.*, p. 603-661; 1878.

(2) 1877, *Comptes rendus*, LXXXIV, p. 240-244, 532-534, 974-975, 1113-16, 1207-11, 1285-89, 1359-62, 1427-30.
Comptes rendus, LXXXV, p. 991-995, 1035-39, 1091-93.
1878, *Phil. Mag.*, p. 1-12 et *Lond. Proc.*
Journ. f. Math., LXXXV, p. 89-114.
Comptes rendus, LXXXVI, p. 1437-41, 1491-92.
Comptes rendus, LXXXVII, p. 242-244, 287-289, 445-448, 505-509, 899-903.
Am. J., I, p. 370-378.
1879, *Am. J.*, II, p. 71-84, 98-99.
Comptes rendus, LXXXIX, p. 395-396.
1883, *Am. J.*, V, p. 241-250.
Franckelin a calculé suivant les méthodes de Sylvester les tables des fonctions génératrices des formes fondamentales et des syzygies : *Am. J.*, t. II, p. 223-251, 293-306; 1879; t. III, p. 221-329; 1880; t. V, p. 241-250; 1882.
Ce même géomètre a réuni les principaux théorèmes de Sylvester et de Cayley, en un exposé publié dans le *Am. J.*, III, p. 128-154; 1880.

(3) Consulter l'exposé qu'en donne Bruno dans son *Traité*, § 12.

(4) *Phil. Mag.*, p. 1-12; 1878, et *Journ. f. Math.*, LXXXV, p. 89-114.
Ce même théorème a encore été démontré par des méthodes les plus diverses : par Capelli, *Rom. Acc. L.*, Mém., XII, p. 1-62; 1881; par Hilbert, *Math. Ann.*, XXX, p. 15-29; 1887; par Stroh, *Math. Ann.*, XXXI, p. 441-443; 1888; par Study, *Methoden*, § 9, p. 187; 1889. Elliot a encore étendu les limites du théorème, *London M. S. Proc.*, XXXIII, p. 298-304, 1892 et XXXIV, p. 21-36; 1893.

celui des termes de $\delta\varphi$. Le nombre cherché est donné (1) par la différence $\Delta(w : i, j)$:

$$\Delta(w : i, j) = (w : i, j) - (w - 1 : i, j).$$

La fonction génératrice telle que l'a employée Euler peut être ramenée à la forme *réduite* (2), puis, après un calcul souvent très laborieux, à la forme *représentative. Cette fonction génératrice représentative est avant tout une* SOURCE COMMUNE *pour le nombre* (*et le type*) *des formes fondamentales et des syzygies de toute espèce.*

Franklin a appliqué ce principe à plusieurs exemples. Dans le cas de la quintique f_5, il est parvenu (3) à un minimum de 23 formes fondamentales, tandis que la méthode de Gordan donne un maximum de 23 formes; dans les deux systèmes, celles-ci se correspondent par ordre et par degré. La question du nombre et du type des formes fondamentales d'une quintique se trouve donc entièrement résolue. L'auteur passe ensuite aux syzygies de I. espèce et parvient à un certain système de 6 syzygies liées entre elles par une *seule et unique* syzygie de II. espèce (4).

En poursuivant les calculs de Franklin, Sylvester (5) examine le cas d'une série de formes données en déterminant les limites inférieures du nombre des syzygies de I. espèce, prises soit par groupes, soit dans leur ensemble.

D'après Cayley, la fonction génératrice représentative ne demande qu'une légère modification pour donner non seulement

---

(1) Dans les *Mess.*, (2) VIII, p. 1-8 (1878), SYLVESTER indique une règle très simple permettant de calculer Δ. *Cf.* FRANKLIN, *Am. J.*, II, p. 187-188; 1879.

(2) CAYLEY a développé le calcul de la *fonction génératrice réduite* en prenant comme exemple la forme f_7; *Am. J.*, II, p. 71-84; 1879. Quant à la fonction génératrice représentative, elle semblait d'abord ne pas pouvoir s'appliquer à f_7. Cette difficulté a cependant été résolue par HAMMOND. *Math. Ann.*, XXXVI, p. 255-261; 1890.

(3) *Am. J.*, II, p. 224.

(4) Ces syzygies de II. espèce étaient restées inaperçues par Cayley. Il en résulta une erreur dans la conclusion de son II. *Mem.* (1856) lorsqu'il énonça qu'une f_5 ne pouvait admettre un système complet fini de formes fondamentales. Cons. son VIII. *Mem. Phil. Trans.*, p. 513; 1870.

(5) *Am. J.*, IV, p. 41-61.

les nombres, mais encore les formations effectives des formes fondamentales et des syzygies [1].

Lorsque les formes fondamentales sont entièrement connues, la fonction génératrice représentative permet, d'après Hammond [2], d'obtenir une limite supérieure du nombre des syzygies de I. espèce. Il suffira donc de comparer ce nombre à la limite inférieure déterminée d'après Sylvester : pour les formes (f_5 et f_6) étudiées jusqu'ici, les deux limites coïncident, sauf dans quelques cas isolés.

C'est ici qu'il convient de signaler le *postulat fondamental* [3] de Sylvester, d'après lequel, pour un degré et un ordre donnés, la présence des formes fondamentales exclut celle de syzygies. Hammond rencontra [4] cependant un exemple [le cas (5, 13) d'une forme f_7], en contradiction avec ce postulat et reconnut bientôt [5] que cette exception devait être attribuée à une identité récurrente qui résulte directement des équations différentielles des sources.

On possède aussi des fonctions génératrices plus spéciales qui correspondent à certaines classes particulières de formations invariantes, tels que les *perpétuants* [6] de Mac-Mahon.

Dans le domaine binaire, Jordan et Sylvester ont établi des formules pour les limites supérieures du degré et de l'ordre des formations invariantes. Le savant géomètre français [7] part des relations entre les covariants du troisième degré, en s'appuyant

---

(1) Il en est de même de la *Fonction génératrice réale* de Cayley (X. *Mem.*). *Voir* aussi la remarque de Sylvester dans le *Am. J.*, IV, p. 57.

(2) *Am. J.*, VIII, p. 19-25; 1885. Consulter par le cas f_4 : *Am. J.*, VII, p. 327-344; et pour celui du système (f_2, φ_2) : *Am. J.*, VIII, p. 138-155; 1886.

(3) Franklin en donne un exposé dans le *Am. J.*, III, p. 130-132.

(4) *London Proc.*, XIV, p. 85-88; *Am. J.*, V, p. 218-228; 1883.

Voir les remarques de Cayley : *London Proc.*, XIV, p. 88-91; *Hopk. Circ.*, II, p. 85-86, 150, III, p. 13 (1883 et 1884).

(5) *Voir* son second Mémoire cité.

(6) *Am. J.*, VII, p. 26-47; 1884. Hammond, *Am. J.*, VIII, p. 104-126. *Voyez* dans ce Rapport le § II, C, *a*, α.

Stroh a développé ces recherches à l'aide de la méthode symbolique; les résultats auxquels il est parvenu ont une forme très simple *v. Math. Ann*, XXXVI, *l. c.*, §§ 10, 11.

(7) *J. de Liouville* (3), II, p. 177-233; 1876 et t. V, p. 345-379; 1879. *Voir* aussi ses *Notes* dans les *Comptes rendus* : t. LXXX, p. 875-877, 1160-1161; 1875; t. LXXXI, p. 495-498; 1875; t. LXXXII, p. 269-270; 1876; t. LXXXVII, p. 202-204; 1878.

Le premier Mémoire contient un exposé général de la théorie de Gordan.

essentiellement sur le procédé de Gordan. Les limites obtenues par Jordan sont réellement atteintes, comme le montre le tableau de Sylvester et Franklin ([1]).

De son côté Sylvester nous donne ([2]), sans démonstration, des formules analogues à celles de Jordan, mais ne contenant que des facteurs numériques rationnels; par contre les limites obtenues sont plus élevées. Nous lui devons encore un procédé ([3]) permettant de déterminer la limite inférieure du nombre total des formes fondamentales d'une forme donnée d'ordre pair.

Il nous reste, pour terminer ce Chapitre, à citer l'extension, aux formes à plusieurs séries de n variables, du théorème de Cayley et Sylvester sur le nombre des formations (du domaine binaire) d'un ordre et d'un degré donnés et linéairement indépendantes. Ce problème de haute difficulté a été abordé et développé par Capelli ([4]) dans une série de beaux Mémoires. Mais c'est à Deruyts ([5]) que revient le mérite d'avoir résolu entièrement cet importante question. (*A suivre.*)

([1]) *Am. J.*, II, p. 223-251.
([2]) *Proc. of London*, XXVII, p. 11-13; 1878.
([3]) *Comptes rendus*, LXXXVI, p. 1437-1441, 1491-1492, 1519-1522.
([4]) *Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche*, *Mem. Rom. Acc. L.*, XII, p. 1-72; 1882. *Voir* les développements de la *Batt. G.*, XX, p. 293-301; 1882; et, pour certaines formes spéciales, le t. XIX, au *Batt. G.*, p. 87-116. Consulter *Mem. Rom. Acc. L.*, t. XV, 1883, et *Batt. G.*, XXI, p. 343-355; 1883.

Une pareille extension se retrouve dans le traité de STUDY, *Methoden*, p. 100. *Voir* aussi STROH, *Math. Ann.*, XXII, en part. p. 405; 1883.
([5]) *Théorie générale...*, 1891, Ch. VII. *Bull. Belg.* (3), XXI, p. 437-451; 1891. *Voyez* plus loin : § II, D., *a*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Obenrauch (F.-J.). — *Monge, der Begründer der darstellenden Geometrie als Wissenschaft.* Eine mathem. histor. Studie. II. Gr. in-8°, 20 p. Brünn, Prof. Obenrauch, Waisenhausgasse 28. 1 m., (I. u. II : 2 m. 50 pf.

Seguier (J.). — *Formes quadratiques et multiplication complexe. Deux formules fondamentales d'après Kronecker.* Gr. in-8°, VIII-339 p. Berlin, Dames.

Weierstrass (K.). — *Mathematische Werke.* Herausgeg. unter Mitwirkg. einer von d. kgl. preuss. Akademie d. Wissenschaften eingesetzten Commission. 1. Bd. Abhandlungen. I. Gr. in-4°, VIII-356 p. Berlin, Mayer et Müller. 21 m., demi-rel. 24 m.

Weyr (E.). — *Ueber einen symbolischen Calcul auf Trägern vom Geschlechte Eins u. seine Anwendung.* In-8°, 77 p. avec 7 fig. Leipzig, Freytag. 1 m. 40 pf.

Kohlrausch (F.). — *An Introduction to Physical Measurements.* With Appendices on absolute Electrical Measurements, etc. Translated from the German by T.-H. Waller and H.-R. Procter. 3ᵉ édit., in-8°, 486 p. London, Churchill. 12 sh. 6 d.

Bianchi (L.). — *Lezioni di Geometria differenziale.* In-8°. Pisa, Spoerri. 20 l.

Cayley (A.). — *Collected Mathematical Papers.* Vol. 7. In-4°. London, Cambridge Warehouse. 25 sh.

Darboux (G.). — *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.* 3ᵉ Partie. In-8°, VIII-512 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 15 fr.

Haas (A.). — *Lehrbuch der Differentialrechnung.* 3 Thl. Anwendung der Differentialrechnung auf die ebenen Kurven. Nebst 425 gelösten Aufgaben, 164 fig. u. 138 Erklärgn. Bearb. nach dem System Kleyer. Gr. in-8°, VIII-272 S. Stuttgart, Maier. 7 m.

Jahrbuch über die Forschritte Mathematik, begründet v. C. Ohrtmann, unter Mitwirkg. von F. Müller u. A. Wangerin herausgeg. von E. Lampe. 23 Bd. Jahrgang 1891. 3. (Schluss-) Heft. Gr. in-8°, LXIV et 897-1313 p. Berlin, Georg Reimer. 12 m.

Jordan (W.). — *Handbuch der Vermessungskunde.* 1. Bd. Ausgleichungs-Rechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 4ᵉ édition (en 2 fascicules). Iᵉʳ fasc. gr. in-8°, 352 p. avec fig. Stuttgart, Metzler. 6 m. 60 pf.

Schilling (C.). — *Wilhelm Olbers, sein Leben u. seine Werke.* Im Auftrage der Nachkommen herausgeg. 1. Bd. Gesammelte Werke. In-8°, XIX-707 p. avec portrait. Berlin, Springer. 16 m.

Engelmann (Th.-W.). — *Gedächtnissrede auf Hermann v. Helmholtz.* Nach dem Holländ. Gr. in-8°, 43 p. Leipzig, Engelmann. 60 pf.

Kohlrausch (F.). — *Physical Measurements.* Translated by Waller and Procter. 3ᵉ édit. In-8°. London, Churchill. 12 sh. 6 d.

Poincaré (H.). — *Mathematische Theorie des Lichtes.* Vorlesungen. Autoris. deutsche Ausgabe von E. Gumlich u. W. Jaeger. Gr. in-8°, X-295 p. avec 35 fig. Berlin, Springer. 10 m.

Rayleigh (Baron). — *The Theorie of Sound.* 2ᵉ édit. 2 vols, vol I. In-8°. 490 p. London, Macmillan. 12 sh.

Annales de l'Observatoire de Paris, publiées sous la direction de M. F. Tisserand. Observations (1887). In-4°, X-751 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 40 fr.

Connaissance des Temps ou des mouvements célestes pour le méridien de Paris, à l'usage des astronomes et des navigateurs pour l'an 1897, publiée par le Bureau des Longitudes. In-8°, VI-864 p. et 2 planches. Paris, Gauthier-Villars et fils. 4 fr.

Edwards (J.). — *Integral Calculus for Beginners. With an Introduction to the Study of Differential Equations.* In-8°, 326 p. London, Macmillan. 4 sh. 6 d.

Graf (J.-H.). — *Einleitung in die Theorie der Gammafunction und der Eulerschen Integrale.* Gr. in-8°, IV-64 p. avec fig. Bern, Wyss. 1 m. 60 pf.

Laurent (H.). — *Traité d'Algèbre,* à l'usage des candidats aux écoles du gouvernement. 5ᵉ édit. 2ᵉ Partie. In-8°, 274 p. Paris, Gauthier-Villars et fils. 4 fr.

Traité d'Algèbre. Compléments. 4ᵉ Partie : *Théorie des polynomes à plusieurs variables.* In-8°, 62 p. 1 fr. 50 c.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

« Die Grundlagen der Geometrie sind ein Gebiet, dessen Bearbeitung schwierig und, sagen wir es offen, ziemhlich undankbar ist ».
LIE.

Fondamenti di Geometria a più dimensioni a più specie di unità rettilinee esposti in forma elementare. Lezioni per la Scuola di magistero in Matematica di GIUSEPPE VERONESE. Padova, Tip. del Seminario, 1891, p. XLVIII-630.

Grundzügen der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten gradliniger Einheiten in elementarer Form entwickelt von GIUSEPPE VERONESE. *Mit Genehmigung des Verfassers nach einer neuen Bearbeitung des Originals übersetzt von* ADOLF SCHEPP. Leipzig, B.-G. Teubner, 1894, p. XLVI-710 (¹).

Le but que se proposa M. Veronese, lorsqu'il ébaucha l'Ouvrage dont nous allons nous occuper, est celui de poser la Géométrie des espaces linéaires à un nombre quelconque de dimensions sur des bases aussi solides que celles sur lesquelles s'élève la Géométrie d'Euclide. Pour l'atteindre, il s'est proposé de généraliser les procédés en usage pour les formes géométriques de première, deuxième et troisième espèce; en conséquence, il a été entraîné à soumettre à une revision complète, tout notre système géométrique et tandis qu'il faisait cela, il arriva à des conclusions dignes d'intéresser même ceux qui pensent que l'espace, que nous percevons, est le champ d'investigation dans lequel doivent rester les géomètres. En particulier, M. Veronese a été amené à analyser, à la loupe, le groupe de vérités non démontrées, sur lesquelles s'élève notre Science géométrique. Cette entreprise, quoiqu'elle ait mené à des résultats tout à fait originaux, n'était aucunement

(¹) Dans le compte rendu suivant nous ne faisons aucune distinction entre l'original et la traduction, parce qu'ils sont, dans le fond, identiques, car la traduction contient seulement quelques courtes additions et un certain nombre de changements de détail.

nouvelle. On sait, en effet, qu'une des critiques plus graves et justifiées qu'on fait aux *Éléments d'Euclide*, est qu'à la base des raisonnements qui sont là exposés, on trouve, en dehors d'un certain nombre d'axiomes honnêtement exposés, beaucoup d'autres non expressément déclarés et dont le lecteur doit percevoir la vérité à l'aide d'expériences personnelles. On sait aussi, qu'à ôter cette imperfection de ce célèbre traité ont travaillé des innombrables habiles géomètres, qui se sont proposé : 1° de déterminer toutes les données qu'on est forcé de déduire de l'expérience, si l'on veut démontrer rigoureusement tous les théorèmes d'Euclide; 2° d'en réduire le nombre au *minimum;* 3° de chercher s'il est possible de le substituer par d'autres plus évidents.

Il nous est absolument impossible de décrire tous les efforts faits dans cette direction et les résultats auxquels on est arrivé, car une telle description embrasserait toute l'histoire de la Géométrie élémentaire. Au contraire, ce qu'il est nécessaire de remarquer est que l'analyse des propositions indémontrables qui sont le fondement de la Géométrie euclidienne, lorsqu'elle est menée jusqu'au but, fait arriver inévitablement aux sources les plus éloignées, aux racines mêmes de la pensée mathématique. Cette analyse, d'un côté, fait parvenir et même aller au delà de la ligne de séparation entre mathématique et psychologie, d'un autre côté, mène à un grand domaine d'études, qui embrasse la Science du nombre et la Science de l'extension figurée et dans lequel un espace très considérable est occupé par cette Science, que Grassmann a, le premier peut-être, aperçue et certainement étudiée méthodiquement en l'appelant *Ausdehnungslehre*.

Ces remarques expliquent pourquoi le livre auquel est dédié cet article, quoiqu'il ait un but exclusivement géométrique (*voir* son titre), s'ouvre par une longue introduction qui entre, plus ou moins profondément, dans toutes les parties des Mathématiques; elles expliquent aussi pourquoi ce livre, quoiqu'il soit adressé aux mathématiciens de profession, pourrait paraître, à ceux qui voudraient le juger d'après les premières pages, comme un essai de rapprochement et peut-être de fusion des Mathématiques et de la Philosophie; c'est un système qui a joui d'une grande faveur dans l'âge d'or de la Philosophie grecque, mais qui, à présent, est mort (on peut dire que c'est Euclide qui l'a enseveli) et auquel

M. Veronese ne veut aucunement essayer de donner une vie nouvelle.

Pour démontrer inexistant le défaut que quelque critique pourrait trouver dans ce que l'auteur a choisi comme bases de ses investigations, des idées bien plus générales et abstraites que celles qu'on emploie dans la Géométrie, il est suffisant de remarquer que tirer le cas particulier du cas général est conforme aux règles de la logique la plus saine, que d'ailleurs ce procédé est recommandable dans le cas actuel, car il permet de concevoir clairement par quels caractères nos figures géométriques se distinguent d'autres formes plus générales que notre esprit peut imaginer. Un raisonnement plus long n'est pas nécessaire pour tranquilliser les mathématiciens qui, lorsque apparut le livre de M. Veronese, sentirent se réveiller les craintes (surgies à cause des mémorables publications de M. George Cantor) d'être obligé d'introduire la Philosophie dans le cycle ordinaire de leurs occupations, car il est évident que quiconque veut pousser jusqu'au but l'analyse de toute notion mathématique est amené à la constatation de l'acte de *penser* et à s'occuper après des concepts primordiaux d'*unité* et *pluralité*, d'*avant* et *après*, et semblables, comme fait notre auteur, qui d'ailleurs exclut (comme étrangère à son but) la recherche de l'origine psychologique de ces idées.

La discussion des principes fondamentaux de la Géométrie a deux faces : l'une, exclusivement scientifique, l'autre en quelque sorte pratique, car elle se rapporte à l'enseignement élémentaire (¹); elle mène à la question de l'existence des quantités actuellement infiniment grandes ou infiniment petites et aux problèmes qui ont donné la vie à la Géométrie non euclidienne. Par conséquence, M. Veronese dut s'occuper dans son livre, de presque toutes les questions les plus épineuses et débattues qu'agitent les mathématiciens d'aujourd'hui; cela prouve que du livre, dont nous parlons, doivent s'occuper tous les savants comme le mérite tout fruit d'investigations persévérantes et conscien-

---

(¹) A ce propos, il est bon de remarquer de M. Gazzaniga, professeur au Lycée de Padoue, s'occupe maintenant, sous la direction de M. Veronese, à appliquer a l'enseignement de la Géométrie élémentaire les idées exposées dans les *Fondamenti*.

cieuses, tout livre où sont courageusement attaqués et tranquillement traités des problèmes que les géomètres et les analystes rencontrent dans leur travail de chaque jour.

Un reproche, qu'on peut raisonnablement faire à M. Veronese, est celui de n'avoir pas tenu un compte suffisant des difficultés que le lecteur aurait trouvées à suivre son exposition où chaque problème est considéré d'après tous les points de vues possibles; c'est un reproche qui est presque une plainte, car le système d'exposition qu'il a adopté rendra certainement plus petit le nombre de lecteurs que les *Fondamenti* auraient le droit d'attendre.

Une analyse complète et détaillée de l'Ouvrage de M. Veronese nous ferait aller au delà des bornes fixées à cet article (¹); qu'il nous suffise donc de donner, aux lecteurs du *Bulletin*, une idée de la méthode choisie par l'auteur. A cet effet, remarquons que, dans la préface, il s'est étendu à exposer ses idées sur les *critériums* auxquels on doit rester attaché dans le choix des axiomes et des postulats, sur les conditions auxquelles ils doivent satisfaire et même sur les méthodes qu'on doit préférer en étudiant les propriétés plastiques de l'espace (²). Dans le texte, pour arriver

(¹) Plus de détails se trouvent dans deux remarquables articles sur les *Grundzüge*, signés A.-E.-H.-L., et publiés dans le journal anglais *Nature* (20 et 27 septembre 1894).

(²) Pour mieux éclaircir la manière d'envisager ces questions, adoptée par l'auteur, nous rapportons les lignes suivantes qu'il écrivit ailleurs :

« On donne le nom de *postulat* à toute proposition logiquement possible, mais qu'on ne peut pas dériver de ce qu'on a déjà admis. De ce caractère du postulat découle le problème scientifique des principes des Mathématiques pures, qu'on peut énoncer en peu de mots, comme il suit : *a*. Étant donné un système complet de postulats A, B, C, D, ..., pour les formes (grandeurs) mathématiques abstraites ou pour une classe de ces formes, lequel de ces postulats est en contradiction avec les autres? S'il ne l'est pas, est-il indépendant, c'est-à-dire peut-on tirer des autres ce postulat ou bien la proposition contraire? Et si un des postulats, par exemple D, est indépendant des autres, en le substituant par un autre D_1, aussi possible avec les autres A, B, C, ..., quel est le système de propriétés auxquelles on arrive en conséquence?... Pour caractériser la Géométrie, il est nécessaire d'ajouter : *b*. La condition essentielle de la Géométrie est la compréhension de l'espace; c'est-à-dire les postulats géométriques doivent exprimer des propriétés intuitives ou telles qu'elles ne contredisent pas logiquement les propriétés intuitives nécessaires pour définir la forme qui correspond au champ de notre observation extérieure. » G. VERONESE, *Osservazioni sui principii delle Geometria*. (*Atti e Memorie della R. Accademia di Padova*, t. X, 1894.)

au groupe de vérités géométriques primordiales auquel il donna la préférence, il commence par exposer de simples remarques empiriques et il les traduit en autant de postulats, dont il démontre l'indépendance mutuelle ; certaines fois, il les substitue par d'autres, douées d'une évidence plus grande, toujours il fait remarquer les axiomes qu'exigent les applications pratiques usuelles. Entre les nouveautés qu'on apprend du travail de M. Veronese, nous fixons l'attention du lecteur sur l'exposition des principes de la Géométrie pour un espace tout à fait général, c'est-à-dire à un nombre actuellement infini de dimensions ; les considérations originales sur le postulat d'Archimède qui ont amené à la découverte d'une classe nouvelle d'êtres analytiques (¹) et à la conclusion que, même en le niant, on peut arriver à établir une homographie entre les points de deux droites; ensuite les remarques sur le mouvement qui mènent l'auteur à conclure que la Géométrie est indépendante du mouvement effectif; les observations sur les postulats du plan et de l'espace à trois ou à n dimensions qu'il tire des postulats sur la droite, du postulat sur la parallèle unique (définie sans avoir recours au plan) et, enfin, du postulat sur l'existence d'un point en dehors de la droite, du plan, etc.; ajoutons encore que l'auteur est arrivé à prouver des axiomes que beaucoup de géomètres ont admis, implicitement ou explicitement, sans démonstration.

Comme tout ce qui précède est insuffisant à faire connaître le plan général de l'Ouvrage de M. Veronese, nous croyons bon d'en traduire ici la Table des matières :

(¹) *Comparer* T. LEVI-CIVITA, *Sugli infiniti ed infinitesimi attuali quali elementi analitici.* (*Atti del R. Istituto Veneto*, t. IV de la 7ᵉ série.)

petits, indéfiniment grands et indéfiniment petits. Les nombres ininfinis. VII. Formes à plusieurs dimensions. Ensemble de toutes les formes. Grandeur extensive et grandeur intensive d'une forme ; applications à la forme fondamentale. VIII. Les nombres réels, relatifs et absolus, positifs ou négatifs. IX. Considérations finales sur la forme fondamentale.

Première Partie. — *La droite, le plan et l'espace à trois dimensions dans l'espace général.*

Livre I. — Les droites et les figures rectilignes en général. Chap. I. Les droites et les figures rectilignes en général. Axiomes et hypothèses.

Livre II. — Le plan. Chap. I. Le faisceau de rayon et le plan euclidien. II. Le plan complet (ou de Riemann). III. Autres considérations sur les systèmes géométriques d'Euclide, de Lobatchewski et de Riemann.

Livre III. — L'espace à trois dimensions. Chap. I. L'espace euclidien à trois dimensions. II. L'espace complet à trois dimensions.

Seconde Partie. — *L'espace à quatre et à n dimensions dans l'espace général.*

Livre I. — L'espace à quatre dimensions. Chap. I. L'espace euclidien à quatre dimensions. II. L'espace complet à quatre dimensions.

Livre II. — L'espace euclidien à n dimensions. Chap. I. L'espace euclidien à n dimensions. II. Les opérations de projeter et sectionner dans l'espace S_n. Application de ces opérations à l'étude des configurations d'un nombre fini d'éléments dans chaque espace $S_n \left(r \begin{smallmatrix} < n \\ > 0 \end{smallmatrix}\right)$ (¹).

(¹) Dans ce Chapitre on trouve une partie de la matière du Mémoire bien connu, que M. Veronese a fait paraître en 1882 dans le tome XIX des *Mathematische Annalen*.

APPENDICES.

Cependant de cette Table, on n'apprend pas que l'Ouvrage de M. Veronese non seulement apporte de remarquables contributions à la méthodologie mathématique, mais fait aussi avancer la Géométrie non euclidienne synthétique et la Géométrie pure à plusieurs dimensions. Elle ne signale même pas la partie historique et critique que renferment les Appendices et qui est, selon nous, douée d'une valeur hors ligne; elle prouve que M. Veronese a commencé à rédiger son travail après avoir profondément réfléchi sur toutes les publications antérieures analogues; cela prouve que les *Fondamenti* ne sont pas un de ces travaux qu'on détruit par quelques lignes de critique de détail, ils sont, au contraire, une mine riche de noble métal qui récompense quiconque veuille le labourer. Ajoutons que l'indépendance avec laquelle M. Veronese a jugé les travaux des morts ôte à sa critique tout caractère de personnalité, lorsqu'il s'occupe des productions de nos jours; en conséquence, ses jugements seront généralement acceptés avec cette tranquillité avec laquelle on apprend les arrêts prononcés au nom de la vérité. Par cela nous n'entendons pas accepter, sans exception, les opinions de M. Veronese; en particulier, nous sommes, bien plus que lui, favorables à la logique mathématique ([1]), dont seulement, à l'avenir, on pourra déterminer exactement la vraie valeur, et qui attendit jusqu'à nos jours à se développer, peut-être parce que, auparavant, les notions mathématiques étaient moins étendues, les recherches moins compliquées et abstraites, tandis que les exigences sur la rigueur étaient infiniment moindres.

GINO LORIA.

([1]) *Comp.* le Tome précédent du *Bulletin*, première Partie, p. 107-112.

CHARLES HENRY. — ABRÉGÉ DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES, à l'usage des candidats à la licence ès Sciences mathématiques. 126 p. in-8°. Paris, Nony et C[ie], 1895.

Voici un petit Livre appelé, croyons-nous, à rendre de réels services à ceux qui désirent acquérir une connaissance rapide des fonctions elliptiques.

« L'étudiant, nous citons l'auteur, l'étudiant qui, pour la première fois, ouvre un traité des fonctions elliptiques est souvent rebuté par la multiplicité des formules et l'abondance des calculs, dont il n'aperçoit pas toujours le but. Mettre en relief les idées principales, signaler nettement l'objet qu'on se propose, éviter les longues transformations algébriques qui ne servent qu'à le masquer, telle est la pensée qui a présidé à la composition de cet Opuscule. »

Le Livre de M. Charles Henry, divisé en quatre Parties, met le lecteur au courant des perfectionnements modernes que la science doit à d'illustres maîtres, et en particulier à M. Weierstrass.

La première Partie est consacrée à l'étude des périodes et des propriétés générales des fonctions doublement périodiques, envisagées du point de vue de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

Ces généralités trouvent leur application dans la deuxième Partie. Il s'agit maintenant de prouver l'existence effective des fonctions elliptiques. La plus simple est la fonction pu. M. Ch. Henry la définit par une série à double entrée qui met les pôles en évidence. Ce mode de représentation est, comme on sait, éminemment propre à faire ressortir les propriétés les plus essentielles de pu et des fonctions ζu, σu qui lui sont associées.

L'incontestable supériorité de la fonction pu ne doit pas faire oublier les services qu'ont rendus les fonctions elliptiques sn, cn, dn, autrefois introduites dans la science par Abel et Jacobi. M. Ch. Henry consacre la troisième Partie de son Opuscule à une étude succincte, mais suffisante, de ces fonctions, qu'il fait dériver de pu.

Enfin, il est indispensable de savoir comment s'effectue le calcul pratique des fonctions elliptiques. Cette question est traitée dans

la quatrième et dernière Partie, où s'introduisent tout naturellement les fonctions θ de Jacobi.

On voit combien est simple et claire l'ordonnance du livre que nous analysons.

L'auteur le présente comme un simple abrégé de la magistrale théorie des fonctions elliptiques que M. Camille Jordan a exposée dans la deuxième édition de son *Cours d'Analyse*. Cette déclaration modeste ne doit pas être prise trop à la lettre. La part qui revient en propre à M. Ch. Henry n'est peut-être pas aussi insignifiante qu'il affecte de le dire. Nous citerons, par exemple, une solution, qui nous a paru nouvelle, du problème de la transformation des périodes; une élégante démonstration de la formule qui donne $p(u+v)$ en fonction de pu, pv, $p'u$, $p'v$; un développement de la théorie des fonctions sn, cn, dn, qui n'était qu'en germe dans le cours de M. Jordan.

D'ailleurs, si M. Ch. Henry a suivi fidèlement son guide, nous n'avons aucune envie de le lui reprocher; il n'en pouvait choisir un meilleur. Nous serions plutôt tenté de regretter qu'il n'ait pas toujours imité la parfaite rigueur de son modèle. L'auteur, c'est lui qui nous en a fait la confidence dans son Avant-propos, offre au public un résumé qu'il avait écrit pour son usage personnel, afin de mieux s'assimiler la moderne théorie des fonctions elliptiques. Préoccupé surtout de faire ressortir les grandes lignes du programme qu'il s'était tracé, M. Ch. Henry n'a pas toujours évité les négligences de détail. Quoi qu'il en soit, son Livre, concis sans être sec, sera lu sans fatigue et sans ennui; c'est un mérite, qui, même en Mathématiques, n'est pas à dédaigner.

L. Raffy.

MÉLANGES.

REMARQUES SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. ÉMILE BOREL,
à Lille.

Considérons une équation linéaire d'ordre quelconque p, à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et à coefficients analytiques. Nous supposons l'équation résolue par rapport à la dérivée $\frac{\partial^p z}{\partial x_1^p}$ et les coefficients holomorphes au voisinage du point analytique $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$. On sait qu'une intégrale de l'équation est parfaitement déterminée, si on la suppose holomorphe au voisinage de ce point, lorsqu'on se donne les valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ de $z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^{p-1} z}{\partial x_1^{p-1}}$ pour $x_1 = a_1$; ces valeurs sont nécessairement des fonctions holomorphes de $x_2, x_3, \ldots, x_n$ dans le voisinage de $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$. Il est clair qu'on obtiendra toutes les intégrales de l'équation donnée *holomorphes en quelque point* en prenant de toutes les manières possibles :

1° Le point analytique $a_1, a_2, \ldots, a_n$;

2° Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ des $p - 1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$, assujetties à être holomorphes dans le voisinage de $x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$.

Nous nous proposons de rechercher une formule qui représente toutes ces intégrales; cette formule pourra donc représenter toutes les intégrales de l'équation proposée, sauf celles qui ne sont holomorphes dans aucune région du plan. Pour une classe étendue d'équations, signalées par M. Picard, et qui n'admettent pas d'autres intégrales que des intégrales analytiques, la formule trouvée représentera toutes les intégrales sans aucune restriction.

Considérons une intégrale quelconque Z, correspondant au point $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et aux fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$. Donner ces fonctions, c'est donner les valeurs pour $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2, \ldots$, $x_n = a_n$ de toutes les dérivées de z, prises moins de p fois par rapport à x_1. Nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ces valeurs rangées

d'une manière quelconque, en supposant simplement que l'ordre total de dérivation de z n'aille pas en diminuant dans cette suite.

Désignons par r_1, r_2, ... les valeurs pour $x_1 = a_1$, ..., $x_n = a_n$ des dérivées de la fonction

$$\frac{1}{\left(1-\frac{x_1-a_1}{r}\right)\left(1-\frac{x_2-a_2}{r}\right)\cdots\left(1-\frac{x_n-a_n}{r}\right)},$$

prises au plus $p-1$ fois par rapport à x_1 et supposées rangées dans le même ordre que α_1, α_2, ...

Il est clair que les fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_p étant holomorphes dans le voisinage de $x_1 = a_1$, ..., $x_n = a_n$, on peut donner à r une valeur r' telle que l'on ait, au moins à partir d'un certain rang k

$$r_k > |\alpha_k|.$$

Nous donnerons à r une valeur fixe r *supérieure* à r'.

La valeur de r étant ainsi choisie, calculons, par la méthode de Cauchy, le développement en série de l'intégrale de l'équation proposée dont les dérivées partielles, prises au plus $p-1$ fois par rapport à x_1, ont pour valeurs r_1, r_2, ..., pour $x_1 = a_1$, ..., $x_n = a_n$. Cette intégrale est unique et déterminée; son développement en série se présente sous la forme

$$(1) \qquad z = r_1\psi_1 + r_2\psi_2 + \ldots,$$

ψ_1, ψ_2, ... étant des fonctions de x_1, x_2, ..., x_n holomorphes dans le voisinage de a_1, a_2, ... De plus, ce développement (que nous supposons obtenu en regardant r_1, r_2, ... comme des indéterminées et calculant, au moyen de l'équation donnée, les autres dérivées de z) est convergent lorsqu'on remplace r_1, r_2, ... par leurs expressions en fonction de r et tous les termes des ψ par leurs modules, pourvu que les modules de $x_1 - a_1$, ..., $x_n - a_n$ soient suffisamment petits; il est même uniformément convergent si l'on suppose ces modules inférieurs à des nombres fixes que l'on sait déterminer.

Regardons r_1, r_2, ... comme des fonctions déterminées de r et considérons la fonction $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_n; r, \alpha)$ définie par la relation

$$\theta = r_1\psi_1 \cos\alpha + r_2\psi_2 \cos 2\alpha + r_3\psi_3 \cos 3\alpha + \ldots.$$

Il est clair que, $a_1, a_2, \ldots, a_n$, r ayant des valeurs données, $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ des modules inférieurs à des limites que l'on peut fixer, et α étant quelconque, mais réel, la série multiple à $n+1$ indices et à $n+1$ variables

$$\theta = \Sigma A_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, k}(x_1 - a_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n - a_n)^{\alpha_n} \cos k\alpha$$

est *absolument et uniformément convergente.*

Posons maintenant

$$f(\alpha) = \frac{\alpha_1}{r_1}\cos\alpha + \frac{\alpha_2}{r_2}\cos 2\alpha + \frac{\alpha_3}{r_3}\cos 3\alpha + \ldots.$$

La série $f(\alpha)$ est absolument et uniformément convergente d'après la manière dont a été choisi r, et l'on a visiblement

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \theta f(\alpha)\,d\alpha = \alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \alpha_3\psi_3 + \ldots.$$

Je dis que le second membre de cette égalité est précisément l'intégrale Z que nous avions choisie arbitrairement. Il est clair, en effet, d'après la manière dont nous avons obtenu le développement (1), que l'intégrale de l'équation proposée, définie par les valeurs initiales des dérivées

$$\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots,$$

est précisément

$$\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 + \ldots.$$

La convergence absolue et uniforme de ce développement est assurée par les relations d'inégalité qui existent entre les r et les α.

Remarquons, d'autre part, qu'il résulte de ces relations que la fonction $f(\alpha)$ est une fonction paire, admettant la période 2π et ayant, dans cet intervalle, des dérivées de tout ordre; c'est une fonction complexe de la variable réelle α (1). Réciproquement, en prenant pour f toutes les fonctions satisfaisant à ces conditions et

(1) En posant $\theta = r_1\psi_1(\cos\alpha + i\sin\alpha) + \ldots$, on pourrait prendre pour $f(\alpha)$ une fonction *réelle* de la variable *réelle* α; ce ne serait plus une fonction paire; c'est sous cette forme que j'ai énoncé le théorème dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, le 25 mars 1895; mais ces détails ont très peu d'importance.

en faisant varier r, il est clair que l'on obtiendra toutes les valeurs possibles des α et, par suite, toutes les intégrales de l'équation proposée holomorphes au voisinage du point $a_1, a_2, \ldots, a_n$. On obtiendra d'ailleurs chacune de ces intégrales pour une infinité de valeurs différentes de r; il est néanmoins nécessaire pour être assuré d'avoir toutes les intégrales, de donner à r, sinon toutes les valeurs, du moins une infinité de valeurs décroissantes et ayant pour limite zéro.

Nous avons donc indiqué le moyen d'obtenir, par les méthodes de Cauchy, une fonction

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n; a_1, a_2, \ldots, a_n; r, \alpha),$$

dépendant des $n+2$ constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n, r, \alpha$ et telle que toute intégrale de l'équation proposée, holomorphe en quelque point, soit donnée par la formule

$$Z = \int_0^{2\pi} \theta f(\alpha)\, d\alpha,$$

les constantes $a_1, \ldots, a_n, r$ étant convenablement choisies, ainsi que la fonction $f(\alpha)$.

Si l'on recherche seulement les intégrales holomorphes dans le voisinage d'un point donné, on devra regarder $a_1, a_2, \ldots, a_n$ comme des constantes; la fonction θ ne dépendra plus alors que des deux arbitraires r et α. Enfin, si l'on suppose r constant, la formule ne sera plus apte à représenter que les intégrales holomorphes à l'intérieur de certains cercles ayant pour centres les points $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, et dont les rayons sont égaux aux rayons de convergence de l'intégrale $r_1\psi_1 + r_2\psi_2 + \ldots$. En donnant à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ toutes les valeurs, on obtient chaque intégrale une infinité de fois; pour avoir toutes les intégrales, on pourrait se contenter de donner à $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une infinité dénombrable de systèmes de valeurs convenablement choisies, par exemple toutes les valeurs rationnelles (réelles et complexes).

J'ai été conduit à l'idée qu'on pouvait exprimer l'intégrale générale d'une équation linéaire quelconque aux dérivées partielles à l'aide d'une formule ne renfermant qu'une fonction arbitraire à la suite de la lecture d'un très intéressant Travail de M. De-

lassus ([1]). Dans ce Travail, M. Delassus montre que l'on peut obtenir une formule ne renfermant qu'une fonction arbitraire d'une variable et satisfaisant à la définition donnée par Ampère de l'intégrale générale. D'ailleurs les symboles de M. Delassus semblent ne pas satisfaire à la définition de l'intégrale déduite des travaux de Cauchy ([2]). Comme je suis convaincu, avec M. Darboux (voir *loc. cit.*) que la définition d'Ampère peut être ramenée à celle de Cauchy, j'ai été amené à chercher l'expression donnée plus haut de l'intégrale générale.

Au sujet de la définition d'Ampère, j'ajouterai les remarques suivantes : il est clair que l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \theta f(\alpha)\, d\alpha,$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_n; r$ ont des valeurs constantes et où $f(\alpha)$ est arbitraire, satisfait à la définition d'Ampère; elle ne satisfait pas absolument à la définition de Cauchy, puisqu'elle ne représente que les intégrales holomorphes à l'intérieur de certains cercles. Mais on voit que les fonctions arbitraires qui figurent dans la définition donnée par M. Darboux, d'après Cauchy, ne sont assujetties, en quelque sorte, qu'à des conditions d'***inégalité***.

De plus, une formule représentant l'intégrale générale d'Ampère, et renfermant une fonction arbitraire $f(\alpha)$, peut ne conserver aucun sens lorsque $f(\alpha)$, tendant vers une limite, atteint cette limite, la valeur donnée par la formule tendant, au contraire, vers une limite avec $f(\alpha)$. D'autres particularités de ce genre peuvent encore se présenter et des transformations analytiques difficiles être nécessaires pour mettre en évidence que la formule représente bien toutes les intégrales, tout au moins à des inégalités près. Dans ces conditions, il serait actuellement téméraire de tirer de ce qui précède et du travail de M. Delassus une conclusion précise sur la valeur de la définition d'Ampère; pour ma part, je reste convaincu qu'elle doit être conservée ([3]).

([1]) *Sur les intégrales partielles* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, février 1895).

([2]) *Voir* DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 97, 98.

([3]) J'indique, en terminant, l'extension facile de la méthode employée aux systèmes d'équations linéaires et par suite aux systèmes différentiels quelconques.

SUR LES INTÉGRALES ANALYTIQUES DE L'ÉQUATION $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{\partial z}{\partial x}$,

PAR M. LE ROUX,
Professeur au Lycée de Brest.

Les intégrales analytiques de cette équation peuvent être représentées par la série

$$(1)\qquad z = \varphi(x) + \frac{y-y_0}{1}\psi(x) + \frac{(y-y_0)^2}{1.2}\varphi'(x) + \frac{(y-y_0)^3}{1.2.3}\psi'(x) + \ldots,$$

φ et ψ désignant des fonctions analytiques arbitraires de x.

D'autre part, si l'on désigne par $\theta(y)$ la valeur de z sur la caractéristique $x = x_0$, on est conduit à représenter l'intégrale par le développement

$$(2)\qquad z = \theta(y) + \frac{x-x_0}{1}\theta''(y) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\theta^{\text{iv}}(y) + \ldots,$$

et la dérivée $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ par la formule

$$(3)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \theta'(y) + \frac{x-x_0}{1}\theta'''(y) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2}\theta^{\text{v}}(y) + \ldots.$$

D'après Poisson, l'expression (2), qui contient une seule fonction arbitraire, est aussi générale que l'expression (1) qui en contient deux. Ce résultat est exact quand les séries considérées sont convergentes. Examinons ce point.

Les fonctions φ et ψ ayant été choisies arbitrairement, la série (1) est convergente *dans tout le plan des y*, tant que x diffère de toute valeur qui soit singulière pour l'une de ces fonctions. En effet, soit x_0 la valeur attribuée à x. Les deux séries

$$\varphi(x_0) + \frac{x-x_0}{1}\varphi'(x_0) + \ldots,$$

$$\psi(x_0) + \frac{x-x_0}{1}\psi'(x_0) + \ldots$$

admettent des rayons de convergence que je suppose supérieurs à ρ. Il existera donc des nombres finis A tels que l'on ait

$$|\varphi^{(n)}(x_0)| < \frac{n!A}{\rho^n},$$

$$|\psi^{(n)}(x_0)| < \frac{n!A}{\rho^n},$$

Le coefficient de $(y - y_0)^{2n}$ dans la série (1) est donc inférieur à

$$\frac{A}{\rho^n}\frac{1}{(n+1)\ldots 2n},$$

et celui de $(y - y_0)^{2n+1}$ à

$$\frac{A}{\rho^n}\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n(2n-1)},$$

d'où résulte la propriété énoncée.

En revanche, les séries (2) et (3) sont, en général, divergentes. Pour qu'elles puissent converger, il faut que la fonction $\theta(y)$ soit holomorphe dans tout le plan (y), et cette condition n'est même pas suffisante.

Soit

$$\theta(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots.$$

La fonction θ sera holomorphe dans tout le plan, sauf à l'infini si

$$\sqrt[n]{|a_n|}$$

tend vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Mais, pour qu'elle rende convergentes les séries (2) et (3), il faut, en outre, que le rapport

$$\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt{\frac{1}{n}}}$$

reste inférieur à un nombre fini. Cette condition suffit.

Il y a là une vérification intéressante du théorème relatif à la nature des lignes critiques accidentelles des intégrales.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG. — Dritter Band, 1892-93. Enthaltend die Chronik der Vereinigung für 1892-93, kurze Berichte über die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge, sowie einen ausfürlichen Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit von Dr *A. Brill* in Tübingen und Dr *N. Noether* in Erlangen sowie einen Bericht über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke von Dr *L. Henneberg* in Darmstadt. Herausgegeben im Auftrage des Verstandes von W. Dyck, E. Lampe. 1 vol. in-8°, 599 p. Berlin, Reimer, 1894.

Les savants qui dirigent la publication du *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* semblent vouloir l'orienter vers une excellente direction, à en juger par les trois Volumes qui ont paru.

En dehors des intéressantes chroniques qu'ils renferment, des résumés de Communications qui prouvent la vitalité de l'Association, chaque Volume contient un ou plusieurs *Rapports* détaillés. On a publié récemment, ici même, une analyse étendue du Rapport de M. Meyer sur la théorie des invariants qui figure dans le second Volume. Le troisième Volume, qui vient de paraître, contient un travail d'ensemble sur le développement de la théorie des fonctions algébriques, qui est dû à MM. Brill et Noether. Personne n'était mieux qualifié que ces deux savants pour exposer l'histoire de cette théorie, à laquelle ils ont contribué pour des points importants et difficiles. La richesse des renseignements qu'ils nous apportent est telle que personne ne voudra plus étudier cette théorie sans avoir consulté leur travail. Il semble inutile d'insister sur l'importance du service que MM. Brill et Noether ont rendu aux travailleurs.

Le sujet qu'ils ont abordé est extraordinairement vaste, et paraît embrasser bien des sujets spéciaux qui regardent tantôt la pure Algèbre, tantôt la Géométrie, tantôt la théorie générale des fonctions, tantôt l'Arithmétique; il comporte cependant une unité supérieure, et, suivant l'heureuse comparaison de MM. Brill et Noether, comme un petit nombre d'idées fondamentales qui se

traduisent dans des langues diverses. Contrairement à leurs intentions primitives, ils ont cru, depuis la mort de Kronecker, devoir laisser de côté ce qui concerne l'Arithmétique. Quelques regrets que doive lui causer cette lacune, le lecteur reconnaîtra que la tâche qu'ont accomplie MM. Brill et Noether restait singulièrement lourde.

Leur Rapport comprend près de cinq cents pages. Après avoir brièvement rappelé dans quelle mesure il convient, d'après les travaux récents, d'accorder aux anciens une certaine connaissance de l'idée de coordonnées et de l'idée de fonction, ils abordent leur exposition détaillée qui commence à Descartes, dont le rôle, disons-le en passant, en peut être jugé avec quelque sévérité. Elle est divisée en dix Sections, placées, le plus souvent, sous l'invocation de noms illustres qui résument un progrès essentiel dans le mouvement scientifique. Chaque Section contient la liste des Ouvrages qui se rapportent au sujet dont s'occupent les auteurs. Nous reproduisons ci-dessous ces précieuses indications bibliographiques; elles ont un grand intérêt en elles-mêmes, et leur suite donnera au lecteur une idée de l'ordre adopté par MM. Brill et Noether.

PREMIÈRE SECTION.

COMMENCEMENT D'UNE THÉORIE DES COURBES ALGÉBRIQUES ET DE L'ÉLIMINATION, DEPUIS DESCARTES JUSQU'A EULER ET BÉZOUT.

Descartes. — Discours de la Méthode, plus la Dioptrique, les Météores et la Géométrie. 1 vol. in-4°. Leyden, 1637. Édition isolée de la Géométrie; Paris, 1886.

Newton. — Isaaci Newtoni opera quæ extant omnia, comm. S. Horsley; Londres, 1779, 1785, 4 vol. in-4°. Voir dans le Tome premier : Arithmetica universalis, p. 1-229; Analysis per æquationes numero terminorum infinitas, p. 257-282; Excerpta quædam ex epistolis Newtoni, p. 285-329; Geometria analytica sive specimen artis analyticæ; p. 391-518; Enumeratio linearum tertii ordinis, p. 531-560. Pour la biographie et les dates, voir : *Brewster*, Mémoire sur la vie, les écrits et les découvertes de Sir I. Newton, 2 vol. Londres, 1860.

Leibniz. — Œuvres complètes de Leibniz; éd. [illegible] Pertz; écrits mathé-

matiques publiés par C. J. Gerhardt; Berlin, Halle, 1849-1863; 7 vol. in-8°.

B. Taylor. — Methodus incrementorum directa et inversa; Londres, 1717.

J. Stirling. — Lineæ tertii ordinis Newtonianæ, sive illustratio tractatus D. Newtoni de enumeratione linearum tertii ordinis; Oxford, 1717; édition postérieure, réunie au Mémoire de Newton; Paris, 1797, in-8°.

C. Mac Laurin. — Geometria organica, sive descriptio linearum curvarum universalis; Londres, 1720, in-4°; Traité des fluxions, en deux volumes; 2 vol. in-4°, Édimbourg, 1742; Traité d'Algèbre en trois parties avec un appendice : De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus, in-8°; 1re éd., Londres, 1748; 4e éd., Londres, 1788.

De Gua de Malves (1740). — Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul différentiel, les propriétés ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres; Paris, 1740, in-12.

G. Cramer. — Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques. Genève, in-4°.

L. Euler. — Introductio in Analysin infinitorum. 2 vol., Lausanne, 1748. Démonstration sur le nombre des points où deux lignes d'ordres quelconques peuvent se couper; *Acad. de Berlin*, année 1748 (1750). Nouvelle méthode d'éliminer les quantités, etc.; Acad. de Berlin, 1754.

E. Bézout. — Recherches sur le degré des équations résultantes de l'évanouissement des inconnues et sur le moyen qu'il convient d'employer pour trouver ces équations; *Mém. Acad. Paris*, 1764. Théorie générale des équations algébriques, Paris, 1779; in-4°. Cours de Mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine; Paris, 1775; 3e Partie : Algèbre.

DEUXIÈME SECTION.

FONDATION D'UNE THÉORIE DES FONCTIONS : LAGRANGE, GAUSS, CAUCHY, PUISEUX.

L. Lagrange. — Théorie des fonctions analytiques, ...; Paris, 1796. — Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries; *Mém. Acad. Berlin*, XXIV, année 1768; *Œuvres*, III.

C. F. Gauss. — Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebricam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi ordinis resolvi posse; Dissert. Helmstädt, 1799. *Œuvres*, t. III, 1876. — Demonstratio nova altera theorematis, etc. Comm. Göttingen, 1815, t. III; *Œuvres*, III. Theorematis de resolubilitate functionum alge-

braicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia; *ibid.*, 1816, *Œuvres*, III. Correspondance entre Gauss et Bessel, Leipzig, 1880; lettre de Gauss du 12 janvier 1812; *Œuvres*, III.

A. Cauchy. — Cours d'analyse; Paris, 1821. Mémoire sur la théorie des intégrales définies, lu à l'Inst. en 1814; *Savants étrangers*, I. Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires; Paris, 1825, in-4°. De l'influence que peut avoir sur une intégrale double l'ordre dans lequel on effectue les intégrations; *Exercices de Mathématiques*, 1826, I. Sur diverses relations qui existent entre les résidus des fonctions et les intégrales définies; *ibid.*, 1826, I.

Moigno. — Leçons de Calcul différentiel et de Calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les Ouvrages de M. Cauchy; 2 vol., I, 1840, 41[e] leçon; II, 1844, 7[e], 9[e], 21[e] leçons.

Cauchy. — Mémoire sur les fonctions complémentaires. *Comptes rendus*, XIX, 1844. Sur les intégrales qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, *Comptes rendus*, 1846, XXIII. Sur les intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ change brusquement de valeur; *ibid.* Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe donnée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires; *ibid.* Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. Puiseux et intitulé : *Recherches sur les fonctions algébriques*; Cauchy, rapporteur; *Comptes rendus*, 1851, XXXII. Mémoire sur divers points d'Analyse; *Mém. de l'Acad.*, VIII, 1827. Mémoire sur le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de h, ζ étant une racine de l'équation $x - \zeta - h\varpi(\zeta) = 0$; *ibid.* Extrait d'une lettre à M. Coriolis, *Comptes rendus*, IV, 1837. Lettre sur la résolution des équations de degré quelconque; *ibid.*, IV. Lettre sur la détermination complète de toutes les racines des équations de degré quelconque; *ibid.*, IV. Considérations nouvelles sur la théorie des suites; *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, I, 1840. Résumé d'un Mémoire sur la Mécanique céleste et sur un nouveau calcul appelé Calcul des limites; *ibid.*, II, 1841. Mémoire sur la nature et les propriétés des racines d'une équation qui renferme un paramètre variable; *ibid.*, II.

Moigno. — Leçons etc...; I : Introduction, 17[e] et 18[e] leçons.

Cauchy. — Sur les caractères à l'aide desquels on peut distinguer entre les diverses racines d'une équation celle qui se développe en série convergente par le théorème de Lagrange; *Comptes rendus*, 1846, XXIII. Mémoire sur les fonctions irrationnelles; *Comptes rendus*, 1851, XXXII. Sur les fonctions de variables imaginaires; *ibid.*, XXXII. Mémoire sur l'application du calcul des résidus à plusieurs questions importantes d'Analyse; *ibid.*, XXXII. Sur les fonctions monotypiques et monogènes; *ibid.*, XXXII. Rapport sur un Mémoire présenté à l'Académie par M. Puiseux et intitulé : *Recherches sur les fonctions algébriques*; Cauchy, rapporteur; *ibid.* Rap-

port sur un Mémoire de M. Puiseux : *Nouvelles recherches sur les fonctions algébriques; ibid.*, XXXII.

E. Lamarle. — Note sur le théorème de M. Cauchy relatif au développement des fonctions en séries; *Journal de Liouville*, XI, 1846.

P.-A. Laurent. — Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable; *Comptes rendus*, 1843, XVII.

Chio. — Recherches sur la série de Lagrange; *Savants étrangers*, XII, 1854 (présentées en 1846).

V. Puiseux. — Recherches sur les fonctions algébriques; *Liouville*, 1850, XV. Suite; *ibid.*, 1851, XVI.

TROISIÈME SECTION.

LE THÉORÈME D'ABEL ET LE PROBLÈME D'INVERSION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES, D'ABEL A WEIERSTRASS.

N.-H. Abel. — Œuvres complètes de N.-H. Abel, publiées par Helmboe; 2 vol., Christiania, 1839. Œuvres complètes de N.-H. Abel, publiées par L. Sylow et S. Lie; 2 vol., 1881. Mémoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes, 1826; *Œuvres*, I. Démonstration d'une própriété générale, etc.; *ibid.* Remarques sur quelques propriétés, etc.; *ibid.* Sur la comparaison des fonctious transcendantes; *Œuvres*, II.

Ch. Jürgensen. — Sur la sommation des transcendantes à différentielles algébriques; *Journal de Crelle*, 1831, XIX. Remarques générales sur les transcendantes à différentielles algébriques; *Journal de Crelle*, 1840, XXIII.

O.-J. Broch. — Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes; *Crelle*, XX. Mémoire sur les fonctions de la forme, etc.; *ibid.*, 1841, XXIII.

F. Minding. — Propositiones quædam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis e principiis Abelianis derivatæ; *ibid.*, 1841, XXIII.

G. Rosenhain. — Exercitationes analyticæ in theorema Abelianum de integralibus functionum algebraicarum; *ibid.*, 1844, XXVIII; 1845, XXIX.

J. Jacobi. — Considerationes generales de transcendentibus abelianis; *Crelle*, 1832, IX; *Œuvres*, éd. Weierstrass, II. De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium abelianarum innititur; *Crelle*, 1834, XIII; *Œuvres*, II.

A. Göpel. — Theoriæ transcendentium abelianarum primi ordinis adumbratio levis; *Crelle,* 1847, XXXV.

Extrait de plusieurs lettres de Rosenhain à Jacobi sur les transcendantes hyperelliptiques; *Crelle,* XL.

G. Rosenhain. — Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques; *Savants étrangers,* 1851, XI.

K. Weierstrass. — Essai sur la théorie des intégrales abéliennes : Programme du Gymnase de Braunsberg pour 1848-1849. Sur la théorie des fonctions abéliennes; *Crelle,* 1853, XLVII. Théorie des fonctions abéliennes; *Crelle,* 1856, LII.

QUATRIÈME SECTION.

THÉORIE DE RIEMANN SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES ET SES ORIGINES.

G. Green. — Essai sur l'application de l'Analyse mathématique aux théories de l'électricité et du magnétisme. Nottingham, 1828. Extraits dans le *Journal de Crelle,* XXXIX, XLIV, XLVII; *Mathematical Papers,* 1871, Londres.

C.-F. Gauss. — Théorèmes généraux relatifs aux forces d'attraction ou de répulsion qui agissent en raison inverse du carré de la distance, Res. Beob. magn. Ver. Leipzig, 1840; *Œuvres,* V.

G. Lejeune-Dirichlet. — Leçons sur les forces qui agissent en raison inverse du carré de la distance; éditées par *Grube.* Leipzig, 1876.

B. Riemann. — Pesanteur, électricité et magnétisme, d'après les leçons de Riemann, rédigées par *Hattendorf.* Hannover, 1876.

B. Riemann. — Équilibre de l'électricité sur des cylindres à section circulaire et à axes parallèles. (Tiré des papiers laissés par Riemann.) *Œuvres de Riemann,* 1re édition, p. 413; Leipzig, 1876. Fondements d'une théorie générale des fonctions d'une variable complexe. Dissertation inaugurale; Göttingen, 1851. *Œuvres,* p. 3. Théorie des fonctions abéliennes, *Crelle,* 1857, LIV; *Œuvres,* p. 81.

G. Roch. — Sur le nombre des constantes arbitraires dans les fonctions algébriques; *Crelle,* 1864, LXIV.

B. Riemann. — Sur l'annulation des fonctions $\mathfrak{I}$; *Crelle,* 1866, LXV; *Œuvres,* p. 198.

CINQUIÈME SECTION.

LES DIRECTIONS GÉOMÉTRICO-ALGÉBRIQUES.

G. Lamé. — Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie, 1818.

J. Plücker. — Développements analytico-géométriques; 1er vol., 1828, p. 228; 2e vol., 1830, p. 242. Recherches sur les courbes (surfaces) algébriques de tous les degrés. *Annales de Gergonne*, 1828-1829, XIX. Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues; *Crelle*, 1837, XVI. Système de Géométrie analytique; Berlin, 1835. Théorie des courbes algébriques, fondée sur une nouvelle manière de traiter la Géométrie analytique; Bonn, 1839.

C.-G.-J. Jacobi. — Theoremata nova algebraica circa systema duarum æquationum inter duas variabiles propositarum; *Crelle*, 1835, XIV; *Œuvres*, éd. Weierstrass, III. De relationibus quæ locum habere debent intra puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum evolutione paradoxi algebraici; *Crelle*, XV; *Œuvres*, III.

A. Cayley. — Sur la réduction de $du\sqrt{U}$, lorsque U est une fonction du quatrième degré; *Journal de Cambridge et Dublin*, 1846, I; *Œuvres*, I, n° 33. Sur la transformation cubique d'une fonction elliptique; *Philosophical Magazine*, 1858, XV; *Œuvres*, III, n° 210. Sur quelques formules pour la transformation des intégrales elliptiques; *Crelle*, 1858, LV; *Œuvres*, IV, n° 235. — (*Voy.* aussi Brioschi, *Annali di Mat.*, 1860, III.)

Ch. Hermite. — Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Premier Mémoire; *Crelle*, 1856, t. LII. — (*Voy.* aussi Cayley, *Crelle*, L, p. 287 et LV, p. 24.) Sur la transformation du 3ième ordre des fonctions elliptiques; *Crelle*, 1861, LX.

S. Aronhold. — Réduction algébrique à la forme fondamentale des transcendantes elliptiques de l'intégrale $\int F(x, y)\,dx$, où $F(x, y)$ est une fonction rationnelle arbitraire de x et y, lorsqu'il existe entre ces dernières quantités une équation générale du troisième degré; Berlin, *Monatsberichte*, 1861. Sur une nouvelle manière algébrique de traiter l'intégrale d'une différentielle irrationnelle de la forme $\Pi(x, y)\,dx$, où $\Pi(x, y)$ est une fonction rationnelle arbitraire des variables x, y entre lesquelles il existe une équation générale du second ordre; *Crelle*, 1862, LXI.

F. Brioschi. — Sur la théorie des formes cubiques à trois indéterminées; *Comptes rendus*, 1863, LVI.

Mac Laurin. — De linearum geometricarum proprietatibus generalibus tractatus, 1748.

J. Plücker. — (*Voir* plus haut.)

O. Hesse. — Sur l'élimination des variables entre trois équations algébriques du second degré à deux variables; *Crelle,* 1844, XXVIII. Sur les points d'inflexion des courbes du troisième ordre; *Crelle,* 1844, XXVIII. Résolution algébrique des équations du neuvième degré, etc.; *Crelle,* 1846, XXXIV. Sur les courbes du troisième ordre et les sections coniques qui touchent ces courbes en trois points différents; *Crelle,* 1847, XXXIV.

J. Steiner. — Théorèmes de Géométrie; *Crelle,* 1845, XXXII; *Œuvres,* II. Théorèmes sur les courbes du second et du troisième ordre; *Crelle,* 1845, XXXII; *Œuvres,* II.

G. Salmon. — Traité des courbes planes d'ordre supérieur; 1er éd., Dublin, 1852.

J. Steiner. — Propriété des courbes du quatrième ordre, relativement à leurs tangentes doubles, XLIX, 1852; *Œuvres,* II.

O. Hesse. — Sur les déterminants et leurs applications à la Géométrie, en particulier aux courbes du quatrième ordre; *Crelle,* 1853, XLIX. Sur les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre; *Crelle,* 1853, XLIX. Sur les tangentes doubles des courbes du quatrième ordre; *Crelle,* 1857, LV.

B. Riemann. — Sur la théorie des fonctions abéliennes pour le cas $p = 3$; *Œuvres,* 1re éd., p. 456-472.

G. Roch. — De theoremate quodam circa functiones abelianas; *Habilitationschrift,* Halle, 1863. Sur la troisième espèce des intégrales abéliennes du second ordre; *Crelle,* 1865, LXV. Sur les tangentes doubles aux courbes du quatrième ordre; *Crelle,* 1864, LXVI. Sur les fonctions thêta à plusieurs variables; *ibid.*, LXVI. Sur les intégrales abéliennes de troisième espèce; *ibid.*, 1866, LXVIII. Sur le nombre des constantes arbitraires dans les fonctions algébriques; 1864, LXIV.

A. Clebsch. — Sur un théorème de Steiner et quelques points de la théorie des courbes algébriques; *Crelle,* 1863, LXIII. Sur l'application des fonctions abéliennes à la Géométrie; *ibid.*, LXIII. Sur les courbes planes dont les coordonnées sont des fonctions rationnelles d'un paramètre; *ibid.*, 1864, LXIV. Sur les courbes dont les coordonnées sont des fonctions elliptiques d'un paramètre; *ibid.*, LXIV.

H.-A. Schwarz. — De superficiebus in planum explicabilibus primorum septem ordinum, *Crelle,* 1864, LXIV.

A. Brill. — Sur les courbes dont les coordonnées sont des fonctions hyperelliptiques d'un paramètre; *ibid.*, 1865, LXV. Note sur les tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre avec un point double; *Mathematische Annalen,* 1872, VI.

L. Cremona. — Sur les transformations géométriques des figures planes; *Mémoires de l'Académie de Bologne,* 2e série, 1863, 1865, II, V.

A. Cayley. — Sur la transformation des courbes planes; *Proceedings of the Lond. Math. Soc.*, 1865; *Œuvres,* VI. Sur la correspondance de deux points sur une courbe; *Proc. of the Lond. Math. Soc.*, 1866; *Œuvres,* VI; *Philosophical Transactions,* 1868.

A. Clebsch et *P. Gordan.* — Théorie des fonctions abéliennes; Leipzig, 1866.

A. Brill. — Essai sur la théorie des transformations univoques; *Habilitationschrift,* Giessen, 1867. Note sur le nombre des modules d'une classe d'équations algébriques. *Math. Ann.*, 1869, I. Deuxième Note, etc.; *Math. Ann.*, 1870, II.

L. Cremona. — Sur la transformation des courbes hyperelliptiques; *Comptes rendus de l'Institut lombard,* 1869. Sur les intégrales des différentielles algébriques (fragments de leçons); *Mémoires de l'Académie de Bologne,* 2e série, 1869, X.

F. Casorati et *L. Cremona.* — Sur le nombre des modules des équations et des courbes algébriques d'un genre donné; *Comptes rendus de l'Institut lombard,* 1869.

H. Weber. — Sur la théorie de l'inversion des intégrales abéliennes; *Crelle,* 1869, LXX.

L. Cremona. — Préliminaires d'une théorie géométrique des surfaces; Bologne, 1866; *Mémoires de l'Acad. de Bologne,* 2e série, VI, VII.

E. Bertini. — Journal de Battaglini, t. VII; H. G. Zeuthen, *Comptes rendus,* t. LXX et *Math. Ann.*, 1870, III.

A Voss. — *Gœtt. Nachr.*, 1873; A. Clebsch, *Leçon*; *voy.* Noether, *Math. Ann.*, VIII.

J. Lüroth. — Note sur les coupures d'une surface de Riemann; *Math. Ann.*, 1871, IV.

A. Clebsch. — Sur la théorie de la surface de Riemann; *Math. Ann.*, 1872, VI.

L. Schläfli. — Sur les relations linéaires entre les $2p$ cycles de première espèce et les $2p$ cycles de seconde espèce dans la théorie des fonctions abéliennes de MM. Clebsch et Gordan; *Crelle,* 1873, LXXVI.

F. Casorati. — Les relations fondamentales entre les modules de périodicité des intégrales abéliennes de première espèce; *Annali di Matematica,* 2e série, II.

A. Brill. — Sur deux problèmes d'élimination; *Goett. Nachr.*, 1870. Sur les courbes d'un faisceau qui touchent une courbe donnée en deux points; *Math. Ann.*, 1871, III. Pour la théorie de l'élimination et des courbes algébriques; *Math. Ann.*, 1871, IV. Sur deux problèmes de contact; *Math. Ann.*, IV. Sur l'élimination entre un certain système d'équations; *ibid.*, 1871, V. Sur la correspondance des systèmes de points sur une courbe; *ibid.*, 1872, VI.

M. Noether. — Pour la théorie de la correspondance univoque des figures algébriques dans l'espace à un nombre quelconque de dimensions; *Math. Ann.*, 1869, II. Sur un théorème de la théorie des fonctions algébriques; *Math. Ann.*, 1872, VI.

A. Brill et *M. Noether.* — Sur les fonctions algébriques et leur application à la Géométrie; *Math. Ann.*, 1873, VII. (*Voir* aussi une Note dans la traduction par Fiedler des *Courbes planes* de Salmon, 1873.)

Sylvester. — (Dans les *Courbes planes* de Salmon, 2[e] éd., 1873, et dans la traduction de Fiedler, 1873.) Théorie de la résiduation dans les cubiques.

E. Bertini. — La Géométrie des séries linéaires sur une courbe plane suivant la méthode algébrique; *Annali di Mat.*, 2[e] série, 1894, XXII.

Clebsch-Lindemann. — Leçons sur la Géométrie, t. I; 4[e] et 6[e] Parties, 1876; Remarque de Noether dans le *Compte rendu* publié dans le *Zeitschrift für Math. u. Phys.*, 1877.

Klein-Fricke. — Fonctions modulaires elliptiques, t. I, 1890, section 3, ch. 2.

E. Study. — Un théorème de réciprocité dans la théorie des fonctions algébriques; *Berichte der Sächs. Geselschaft der Wiss.*, 1890.

SIXIÈME SECTION.

LA THÉORIE DES POINTS SINGULIERS.

A. Cayley. — Sur les singularités supérieures des courbes planes; *Quarterly Journal*, 1865, VII; *Œuvres*, V, n° 374. Note sur les singularités supérieures des courbes planes; *Crelle*, LXIV.

L. Kronecker. — Sur le discriminant des fonctions algébriques d'une variable; *Monatsberichte de Berlin*, 1862; Leçons de 1870 publiées dans le *Journal de Crelle*, XCI, et dont la suite annoncée n'a pas encore paru.

K. Weierstrass. — Leçons sur les fonctions abéliennes, 1869, 1873, etc. (*Voir* plus bas, septième Section.)

M. Hamburger. — Sur le développement des fonctions algébriques en séries; *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1871, XVI.

L. Königsberger. — Leçons sur la théorie des fonctions elliptiques; Leipzig, 1874; 1re Partie, 9e leçon.

M. Noether. — Sur les fonctions algébriques; *Goett. Nachr.*, 1871. Sur la théorie de la correspondance univoque des figures algébriques; *Math. Ann.*, 1874, VIII. Sur les systèmes de valeurs singulières d'une fonction algébrique et les points singuliers d'une courbe algébrique; *ibid.*, 1875, IX. Développement rationnel des opérations dans la théorie des fonctions algébriques; *ibid.*, 1883, XXIII. Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions algébriques, *ibid.*, 1889, XXXIV. Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier; *Rendiconti du Cercle mathématique de Palerme*, 1890, IV.

A. Brill et *M. Noether.* — Sur les fonctions algébriques et leur application à la Géométrie; *Math. Ann.*, 1873, VII.

O. Stolz. — Sur les points singuliers des fonctions et des courbes algébriques; *Math. Ann.*, 1874, VIII. La multiplicité des points d'intersection de deux courbes algébriques; *ibid.*, 1879, XV.

De la Gournerie. — Note sur les singularités élevées des courbes planes; *Journal de Liouville*, 2e série; XIV et XV. Note sur le nombre des points d'intersection que représente un point multiple commun à deux courbes planes; *Comptes rendus*, 1873, LXXVII.

L. Painvin. — Sur l'abaissement de la classe d'une courbe produit par la présence d'un point de rebroussement; *Bulletin*, 1873, IV. Note sur l'intersection de deux courbes; *ibid.*, 1873, V.

G.-H. Halphen. — Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre. Première Partie : théorèmes généraux sur les intersections des courbes planes algébriques; *Bulletin de la Soc. math.*, 1873, I, II. Sur les points singuliers des courbes algébriques planes; *Savants étrangers*, 1877, XXVI (remis en 1874.) Sur une série de courbes analogues aux développées; *Liouville*, 3e série, II. Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane qui satisfont à une équation différentielle algébrique ; *ibid.*, 3e série, II. Sur une question d'élimination, ou sur l'intersection de deux courbes en un point singulier; *Bulletin de la Soc. math.*, 1875, III. Sur la conservation du genre des courbes algébriques dans les transformations uniformes; *ibid.*, 1875, IV. Sur le contact des courbes planes avec les coniques et les courbes du troisième degré; *ibid.*, 1875, IV. Sur les correspondances entre les points de deux courbes; *ibid.*, 1876, V. Sur le genre des courbes algébriques; *Comptes rendus de l'Association française*, 4e session; Nantes, 1875. Étude sur les points singuliers; Appendice à la traduction française (*O. Chemin*) des *Higher plane curves* de Salmon; Paris, 1884.

H.-J. Stephen Smith. — Sur les singularités élevées des courbes planes; *Proceedings of the London Math. Soc.*, 1876, VI.

E. Klein. — Une nouvelle relation entre les singularités d'une courbe algébrique; *Berichte de la Société d'Erlangen*; déc. 1875, et *Math. Ann.*, X.

H.-G. Zeuthen. — Note sur les singularités des courbes planes; *Math. Ann.*, 1876, X. Sur un groupe de théorèmes et formules de la Géométrie énumérative; *Acta Mathematica*, 1882, I.

A. Brill. — Sur les singularités des courbes algébriques, etc.; *Math. Ann.*, 1879, XVI. Sur la multiplicité des points d'intersection de deux courbes planes; *Sitzungsberichte de l'Acad. de Münich*, 1888. Sur les valeurs d'une fonction de deux variables dans le voisinage d'un zéro; *ibid.*, 1891. Sur la résolution des singularités élevées d'une courbe algébrique en singularités élémentaires; *Deutsche Math. Vereinigung*, 1892, Münich.

G. B. Guccia. — Sur une question concernant les points singuliers des courbes algébriques planes; *Comptes rendus*, 1886, CIII.

E. Bertini. — Sur quelques théorèmes fondamentaux des courbes planes algébriques, *Rendiconti de l'Institut lombard*, 1888, XXI. Sur le nombre de points d'embranchement des courbes algébriques; *ibid.*, 1891, XXIII. Démonstration d'un théorème sur la transformation des courbes algébriques, *Rivista di Matem.*, 1891; *Math. Ann.*, XLIV.

Ch.-A. Scott. — Sur les singularités élevées des courbes planes; *American Journal*, 1892, XIV.

H.-F. Baker. — Exemples de l'application du polygone de Newton à la théorie des points singuliers des fonctions algébriques; *Transactions philosophiques de Cambridge*, 1894, XV. (Extrait dans les *Math. Ann.*, XLV.)

SEPTIÈME SECTION.

LA DIRECTION DE WEIERSTRASS, A PARTIR DE 1869.

K. Weierstrass. — Les trois Mémoires signalés dans la troisième Section. — Sur l'intégration par les logarithmes des différentielles algébriques; *Monatsber. de Berlin*, 1857. Leçons sur la théorie des fonctions abéliennes à partir de 1869; leçons d'introduction dans les semestres d'été de 1863 et de 1866. (d'après des Notes ou rédactions de Wagner, Wedekind, Lüroth, Jürgens, Mangoldt, Hettner, Knoblauch, Schottky, Schur). — Quelques théorèmes relatifs à la théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables; lithographié, 1879. Mémoires sur la théorie des fonctions; Berlin, 1886 (Mém. V).

O. Biermann. — Théorie des fonctions analytiques; Leipzig, 1887.

E. Netto. — De transformatione æquationis $y^n = R(x)$, designante

R(x) functionem integram rationalem variabilis x, in æquationem $\eta^2 = R_1(\xi)$; *Dissert.*, Berlin, 1870.

F. Schottky. — Sur la représentation conforme des surfaces planes plusieurs fois connexes; *Dissert.*, Berlin, 1875. Sur la représentation conforme des surfaces planes plusieurs fois connexes; *Crelle*, 1877, LXXXIII.

G. Hettner. — Sur la réduction aux intégrales hyperelliptiques d'une certaine classe de différentielles algébriques; *Dissert.*, Berlin, 1877. Sur les équations algébriques entre deux variables qui admettent un faisceau de transformations en elles-mêmes rationnelles et réversibles; *Goett. Nachr.*, 1880.

O. Valentin. — De æquatione algebrica quæ est inter duas variabiles in quamdam formam canonicam transformata; *Dissert.*, Berlin, 1879.

F. Kötter. — Application des fonctions abéliennes à un problème de Statique, etc.; *Crelle*, 1885, CIII.

E.-B. Christoffel. — Démonstration algébrique du théorème sur le nombre des intégrales linéairement indépendantes de première espèce; *Annali di Mat.*, 2e série; 1880, X.

HUITIÈME SECTION.

REPRÉSENTATION SOUS FORME INVARIANTE.

H. Weber. — Théorie des fonctions abéliennes d'espèce 3; Berlin, Reimer, 1876. Remarques sur cet écrit dans le *Journal de Crelle*, 1879, LXXXVIII. Sur certains cas d'exception dans la théorie des fonctions abéliennes; *Math. Ann.*, 1877, XIII.

L. Kraus. — Note sur un groupe spécial extraordinaire sur des courbes algébriques; *Math. Ann.*, 1879, XVI.

M. Noether. — Sur la représentation invariante des fonctions algébriques; *Math. Ann.*, 1880, XVII. Note sur les courbes normales pour $p = 5, 6, 7$; *Math. Ann.*, 1885, XXVI. Développement rationnel des opérations dans la théorie des fonctions algébriques; *Math. Ann.*, 1883, XXIII. Sur la théorie des différentielles et des fonctions abéliennes; *Math. Ann.*, XXXVII, première Partie : expressions différentielles; deuxième Partie : fonctions, 1890. (*Sitzungsberichte d'Erlangen*, 1884 et 1886).

H.-A. Schwarz. — Sur les équations algébriques entre deux variables qui admettent un faisceau de transformations en elles-mêmes rationnelles et réversibles; *Crelle*, 1875, LXXXVII.

G. Hettner. — Sur les équations algébriques entre deux variables qui

admettent un faisceau de transformations en elles-mêmes rationnelles et réversibles; *Goett. Nachr.*, 1880.

F. Klein. — Sur la théorie de Riemann des fonctions algébriques et de leurs intégrales; Leipzig, 1882.

M. Noether. — Sur les courbes algébriques qui admettent un faisceau de transformations univoques en elles-mêmes; *Math. Ann.*, 1882, XX. Suite au Mémoire précédent; *Math. Ann.*, 1882, XXI.

H. Poincaré. — Sur un théorème de M. Fuchs; *Acta Math.*, 1884, VII.

A. Hurwitz. — Sur les figures algébriques qui admettent une transformation univoque en elles-mêmes; *Goett. Nachr.*, 1887; *Math. Ann.*, XXXII. Sur les figures algébriques et leurs transformations univoques en elles-mêmes; *Math. Ann.*, 1892, XLI.

E. Picard. — Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes (Mémoire couronné en 1888); *Liouville*, 4e série, 1889, V. Sur les transformations irrationnelles des courbes algébriques en elles-mêmes; *Bulletin de la Soc. math. de France*, 1893, XXI.

E.-B. Christoffel. — Sur la forme canonique des intégrales de première espèce de Riemann; *Annali di Matematica;* 1878, 2e série, IX.

F. Klein. — Sur les fonctions sigma hyperelliptiques; *Math. Ann.*, 1886, XXVII. Pour la théorie des fonctions hyperelliptiques d'un nombre quelconque de variables; *Goett. Nachr.*, 1887. Sur les fonctions sigma hyperelliptiques; *Math. Ann.*, 1888, XXXII. Sur les covariants irrationnels; *Goett. Nachr.*, 1888. Pour la théorie des fonctions abéliennes; *ibid.*, 1889. Pour la théorie des fonctions abéliennes; *Math. Ann.*, 1889, XXXVI. — Formes principales sur la surface de Riemann; *Comptes rendus*, 1889. — Des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann; *Comptes rendus*, 1889. — Note dans les *Proceedings of the London Math. Soc.*, 1889. Leçons sur les surfaces de Riemann; autographiées; Goettingen, 1er cahier, 1891-1892; 2e cahier, 1892.

Klein-Fricke. — Fonctions modulaires elliptiques, t. II, 1892.

G. Pick. — Pour la théorie des fonctions elliptiques; *Math. Ann.*, 1886, XXVIII. Pour la théorie des fonctions abéliennes; *Math. Ann.*, 1886, XXIX.

H. Burkhardt. — Essais sur la théorie des fonctions sigma hyperelliptiques; *Math. Ann.*, 1888, XXXII. Esquisse d'une systématique générale des fonctions hyperelliptiques du premier ordre (d'après les leçons de F. Klein); *Math. Ann.*, 1889, XXXV.

Brioschi : Rendiconti de l'Académie des Lincei, 1886-1890; *Goett. Nachr.*, 1890. *Wiltheiss :* Math. Ann., XXIX-XXXVIII, 1886-1890; *Goett. Nachr.*, 1889. *Krazer :* Math. Ann., 1888, XXXIII. *Pascal :* Goett.

Nachr., 1888, 1889; Annali di Mat., 2ᵉ série, XVII, XVIII. *Osgond* : Dissert., Erlangen, 1890. *White* : Dissert., Goettingen, 1891. *Wirtinger* : Monatshefte de Vienne, 1891; Math. Ann., 1891, XL.

NEUVIÈME SECTION.

FONCTIONS ABÉLIENNES PROPREMENT DITES.

J. Plücker, 1839. *Göpel* : Crelle, XXXV. *G. Rosenhain* : Mém. des sav. étr. publié en 1851; Lettre à Jacobi, *Crelle*, 1844, XL, 1849. *K. Weierstrass* : 1849, etc. *J. Steiner* : 1852. *O. Hesse* : 1863.

Ch. Hermite. — Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes; *Comptes rendus*, 1855, XL.

B. Riemann. — Théorie des fonctions abéliennes; *Crelle*, 1857, LIV; *Œuvres*, 1ʳᵉ éd., p. 81. Pour la théorie des fonctions abéliennes dans le cas de $p = 3$; *Œuvres*, p. 456; leçon de 1862.

F. Prym. — Nouvelle théorie des fonctions ultra-elliptiques; *Denkschrifte de l'Acad. de Vienne*, 1863, XXIV; première Partie, jusqu'au § 17. Theoria nova functionum ultraell.; *Dissert.*, Berlin, 1863; 2ᵉ éd. de la *Nouvelle théorie, etc.* avec des remarques nouvelles, Berlin, 1885.

G. Roch. — Habilitationschrift, 1863. Sur les tangentes doubles, etc.; *Crelle*, 1864, LXVI.

A. Clebsch. — Sur l'application des fonctions abéliennes à la Géométrie; *Crelle*, LXIII, LXIV.

L. Königsberger. — Sur la transformation des fonctions abéliennes du premier ordre; *Crelle*, LXIV, LXV.

S. Aronhold. — Sur la dépendance des 28 tangentes doubles d'une courbe générale du quatrième degré; *Monats. de l'Acad. de Berlin*, 1864.

J. Thomae. — La transformation générale des fonctions thêta; *Dissert.* Göttingen, 1864. Détermination de $d\log\mathfrak{I}(0,\ldots,0)$ par les modules de classes; *Crelle*, 1863, LXVI.

B. Riemann. — Sur l'annulation des fonctions $\mathfrak{I}$; *Crelle*, 1865, LXV.

A. Brill. — Sur les courbes, etc. ($p = 2$); *Crelle*, 1865, LXV.

E. Prym. — Pour la théorie des fonctions sur les surfaces à deux feuillets; *Denkschrifte de la Naturforsch. Gesellsch. de Suisse*, 1866, XXII.

L. Kronecker. — Sur les formes bilinéaires; *Monats. de l'Acad. de Berlin*, 1866; *Crelle*, LXVIII, leçon de 1864.

A. Clebsch et *P. Gordan*. — Théorie des fonctions abéliennes; Leipzig, 1866.

J. Thomae. — Quelques théorèmes sur l'*Analysis situs* des surfaces de Riemann; *Zeitschrift für Math. und Phys.*, 1867, XII.

M. Henoch. — De functionum abelianarum periodis; *Dissert.*, Berlin, 1867.

A. Cayley. — Note sur l'algorithme des tangentes doubles d'une courbe du quatrième ordre; *Crelle*, 1867, LXVIII.

R. Sturm. — Recherches sur le réseau de surfaces du second ordre; *Crelle*, 1868, LXX.

C.-F. Geiser. — Sur les tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre; *Math. Ann.*, 1868, I. — Sur les théorèmes de Steiner relatifs aux tangentes doubles des courbes du quatrième ordre; *Crelle*, 1870, LXXII. *Voy.* aussi *W. Frahm* : Remarque, etc., *Math. Ann.*, VII; *E. Toeplitz* : Sur un réseau de surfaces, etc., *Math. Ann.*, XI.

A. Clebsch. — Sur la théorie des formes binaires du sixième ordre et la tripartition des fonctions elliptiques; *Abhandlungen de la Gesell. der W. de Göttingen*. 1869, XIV.

C. Jordan. — Traité des substitutions et des équations algébriques; Paris, 1870. (Extrait : sur les équations de la division, etc.; *Math. Ann.*, I, 1869.)

A. Clebsch. — Sur la connexion d'une classe de représentations de surfaces et la dimidiation des fonctions abéliennes; *Math. Ann.*, 1870, III.

L. Fuchs. — Sur la forme des arguments des fonctions thêta; *Crelle*, 1871, LXXIII.

J. Thomae. — Essai sur la théorie des fonctions abéliennes; *Crelle*, 1872, LXXV. Représentation des quotients de deux fonctions thêta, etc.; *Math. Ann.*, VI, XVIII.

W. Godt. — Sur le connexe du premier ordre et de seconde classe; *Dissert.*, Göttingen, 1873. *Voy. Clebsch-Lindemann,* Leçons sur la Géométrie, 1re éd., sixième et septième Parties. Leipzig, 1876.

A. Pringsheim. — Pour la transformation du second degré des fonctions hyperelliptiques du premier ordre; *Math. Ann.*, 1875, IX.

H. Weber. — Théorie des fonctions abéliennes d'espèce trois; Berlin, 1876. Remis à la Soc. de Göttingen en 1874; remarques dans le *Journal de Crelle*, 1879, LXXXVIII.

J. Thomae. — Réunion de formules qui servent dans l'application des

fonctions elliptiques et des fonctions de Rosenhain; Halle, 1876. Sur une certaine classe de fonctions abéliennes; Halle, 1877.

A. Pringsheim. — Pour la théorie des fonctions hyperelliptiques, en particulier du troisième ordre ($p = 4$); *Math. Ann.*, 1877, XII.

A. Cayley. — Sur les fonctions thêta doubles et leur rapport avec une surface du quatrième degré à seize points doubles: *Crelle*, 1877, LXXXIII. Autres recherches sur les fonctions thêta doubles; *Crelle*, 1877, LXXXIII.

C.-W. Borchardt. — Sur la représentation de la surface de Kummer du quatrième ordre avec seize points doubles au moyen de la relation biquadratique de Göpel entre quatre fonctions thêta de deux variables; *Crelle*, 1877, LXXXIII.

A. Cayley. — Sur la surface du quatrième degré à seize points doubles; *Crelle*, LXXXIV, XCIV.

H. Weber. — Sur la surface de Kummer du quatrième ordre avec seize points doubles et sa relation avec les fonctions thêta de deux variables; *Crelle*, 1877, LXXXIV.

K. Rohn. — Transformation des fonctions hyperelliptiques $p = 2$, etc.; *Math. Ann.*, 1879, XV.

F. Brioschi. — La relation de Göpel pour les fonctions hyperelliptiques d'ordre quelconques; *Annali di Mat.*, 1881, X.

F. Klein. — Sur les configurations, etc.; *Math. Ann.*, 1885, XXVII.

P. Domsch. — Représentation des surfaces du quatrième ordre à conique double, etc.; *Dissert.*, Leipzig, 1885.

E. Reichardt. — Représentation de la surface de Kummer, etc.; *Nova acta Leopoldina*, 1867, L, et *Math. Ann.*, XXVIII.

L. Schleiermacher. — Sur les fonctions thêta à deux variables; *Sitzungsberichte de la Société d'Erlangen*, 1886, XVIII.

E. Picard. — Sur les intégrales de différentielles totales, etc.; *Liouville*, 4e série, 1885, I. Mémoire sur la théorie des fonctions algébriques de deux variables, etc.; *ibid.*, 1888, V.

E. Pascal. — Annali di Mat., XVIII et XIX.

W. Wirtinger. — Goett. Nachr., 1889; Monatshefte de Vienne, 1890, I; *Math. Ann.*, 1891, XL.

F. Schottky. — Sur les relations entre les seize fonctions thêta de deux variables; *Crelle*, 1889, CV.

F. Caspary. — Sur les deux formes, etc.; *Comptes rendus*, 1891.

C. Humbert. — Théorie générale des surfaces hyperelliptiques; *Liouville;* 4[e] série, 1893, IX.

H. Weber. — Sur certains cas d'exception dans la théorie des fonctions abéliennes; *Math. Ann.,* 1877, XIII.

A. Cayley. — Mémoire sur les fonctions thêta doubles; *Crelle,* 1877, LXXXV.

H. Weber. — Sur la théorie de la transformation des fonctions thêta, en particulier de trois variables; *Annali di Mat.,* 2[e] série, 1878, IX. — Application des fonctions thêta de deux variables, etc.; *Math. Ann.,* 1878, XIV.

Caspary. — Crelle, 1881, XCIV.

M. Noether. — Sur les transformations uni-bivoques; *Sitzungsberichte de la Société d'Erlangen,* 1878, X. Sur une classe de doubles plans représentables sur le plan simple; *Math. Ann.,* 1888, XXXIII. Sur la théorie des fonctions thêta de quatre arguments; *Math. Ann.,* 1878, XIV.

E. de Paolis. — Transformation plane double du troisième ordre du premier genre et son application aux courbes du quatrième ordre; *Mémoires de l'Acad. des Lincei;* 1878, 3[e] série, II.

F. Schottky. — Abrégé d'une théorie des fonctions abéliennes de trois variables; Leipzig, 1880.

A. Cayley. — Sur les fonctions thêta triples; *Crelle,* 1878, LXXXVII. Algorithme pour les caractéristiques des fonctions thêta triples; *ibid.,* 1878, LXXXVII.

C.-W. Borchardt. — Remarque sur le précédent Mémoire (de Cayley); *ibid.,* 1878, LXXXVII.

A. Cayley. — Sur les fonctions thêta triples; *ibid.,* LXXXVII.

M. Noether. — Sur les équations du huitième degré et leur rôle dans la théorie des courbes du quatrième degré; *Math. Ann.,* 1879, XV.

A. Cayley. — Sur l'addition dans les fonctions thêta doubles; *Crelle,* 1878, LXXXVIII. — *Philosophical Transactions;* 1879, CLXXI.

H.-B. Forsyth. — Mémoire sur les fonctions thêta, en particulier sur les fonctions de deux variables; *ibid.,* 1881, CLXXIII.

C. Jordan. — Mémoire sur les caractéristiques des fonctions thêta; *Journal de l'École Polytechnique,* 1879, XLVI[e] Cahier.

H. Stahl. — Le théorème d'addition des fonctions thêta de p arguments; *Crelle,* 1879, LXXXVIII.

M. Noether. — Sur les caractéristiques des fonctions thêta; *Sitzungsberichte de la Société d'Erlangen*, 1879, XI.

H. Stahl. — Démonstration d'un théorème de Riemann sur les caractéristiques des fonctions thêta; *Crelle*, 1879, LXXXVIII.

M. Noether. — Pour la théorie des fonctions thêta d'un nombre arbitraire d'arguments; *Math. Ann.*, 1879, XVI.

L. Kraus. — Note relative aux groupes spéciaux extraordinaires sur les courbes algébriques; *Math. Ann.*, 1879, XVI.

H. Stahl. — Pour la solution du problème d'inversion de Jacobi; *Crelle*, 1880, LXXXIX.

G. Frobenius. — Sur le théorème d'addition des fonctions thêta de plusieurs variables; *Crelle*, 1880, LXXXIX.

M. Noether. — Sur la représentation invariante des fonctions algébriques; *Math. Ann.*, 1880, XVII.

F. Prym. — Recherches sur la formule des thêta de Riemann et sa théorie des caractéristiques. Leipzig, 1882.

A. Krazer. — Théorie des séries thêta doublement infinies fondée sur la formule des thêta de Riemann; Leipzig, 1882. — Sur les fonctions thêta dont les caractéristiques sont formées avec des tiers de nombres entiers; *Math. Ann.*, 1883, XXII.

Schleicher. — Représentation et inversion des quotients de thêta dont les caractéristiques sont formées avec des tiers de nombres entiers; Bayreuth, 1880.

Sievert. — Essais, etc. Festschrift pour le jubilé de la 150[e] année de l'Université d'Erlangen; Nürnberg, 1893.

A. Cayley. — Sur les bitangentes à une quartique plane; *Crelle*, 1882, 1883, XCIV.

A. Ameseder. — Étude géométrique des courbes planes du quatrième ordre, relativement à leurs coniques tangentes. *Sitzungsberichte de l'Acad. de Vienne*, 1882, 1883.

G. Frobenius. — Sur les groupes de caractéristiques des fonctions thêta; *Crelle*, 1883, XCVI. — Sur les fonctions thêta de plusieurs variables; *ibid.*

H. Weber. — Sur le groupe de Galois de l'équation du 28[e] degré dont dépendent les tangentes doubles à une courbe du quatrième ordre; *Math. Ann.*, 1883.

O. Staude. — Sur la représentation paramétrique du rapport des fonc-

tions thêta de deux variables; *Math. Ann.*, 1884. Sur les caractéristiques algébriques des fonctions thêta hyperelliptiques; *Math. Ann.*, 1884, XXV.

G. Frobenius. — Sur la relation entre les 28 tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre; *Crelle*, 1885, XCIX.

F. Klein. — Sur les fonctions sigma hyperelliptiques; *Math. Ann.*, 1886, XXVII; 1888, XXXII.

H. Burkardt. — Essai, etc.; *ibid.*, 1888.

G Humbert. — Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à l'étude des courbes algébriques; *Liouville*, 4e série, 1886, II.

M. Noether. — Sur le problème d'inversion dans la théorie des fonctions abéliennes; *Math. Ann.*, 1886, XXVIII.

F. Schottky. — Pour la théorie des fonctions abéliennes de quatre variables; *Crelle*, 1886, CII. Sur les fonctions spéciales abéliennes de quatrième rang; *ibid.*, 1887, CIII.

K. Bobek. — Sur les courbes du quatrième ordre, d'espèce 2, leurs systèmes de coniques tangentes et leurs doubles tangentes; *Denkschrifte de l'Acad. de Vienne*, 1887, LIII.

G. Frobenius. — Sur les fonctions de Jacobi de trois variables; *Crelle*, 1888, CV.

A. v. Braunmühl. — Sur le groupe de Göpel des caractéristiques des fonctions thêta p^{uples}, formées avec des tiers de nombres entiers; *Math. Ann.*, 1888, XXXII; *Sitz. de la Société d'Erlangen*, 1886, XVIII; *Abhandl. de l'Acad. de Bavière*, 1887; *Math. Ann.*, 1890, XXXVII.

M. Noether. — Pour la théorie des courbes tangentes aux courbes planes du quatrième ordre; *Abhandl. de l'Acad. de Bavière*, 1889, XVII.

F. Schottky. — Étude algébrique sur les fonctions thêta de trois arguments; *Crelle*, 1889, CV.

H. Burkhardt. — Esquisse d'une systématique générale des fonctions hyperelliptiques du premier ordre; d'après les leçons de F. Klein; *Math. Ann.*, 1889, XXXV.

F. Klein. — Pour la théorie des fonctions abéliennes; *Math. Ann.*, 1889, XXXVI. Leçon (autogr.) sur les surfaces de Riemann; deuxième Partie, Goettingen, 1892.

G. Rohn. — Sur les coniques tangentes et les tangentes doubles de la courbe générale du quatrième ordre; *Crelle*, 1890, CVII.

W. Weiss. — Sur une théorie algébrique des faisceaux de courbes tan-

gentes non adjointes qui appartiennent à une courbe algébrique; *Sitzungsberichte de l'Acad. de Vienne,* 1890; *Société Math. de Prague,* 1892; *Sitz. de Vienne,* 1893.

W. F. Osgood. — Pour la théorie des fonctions abéliennes relatives à la figure algébrique $y^m = \mathrm{R}(x)$; *Dissert.*, Erlangen, 1890.

F. Schottky. — Sur les équations caractéristiques de surfaces planes symétriques et les fonctions abéliennes correspondantes; *Crelle,* 1890, CVI. — Théories des fonctions elliptico-hyperelliptiques de quatre arguments; *Crelle,* 1891, CVIII.

J. Thomae. — Sur les fonctions thêta, dont les arguments sont égaux à un système de tiers de périodes; *Zeitschrift für Math. und Phys.,* 1891.

E. Pascal. — Représentation géométrique des caractéristiques de genre 3 et de genre 4 et leurs groupes de substitutions; *Annali di Mat.* 2e série, 1892, XX.

H. Stahl. — Sur une formule générale pour la résolution du problème d'inversion de Jacobi; *Crelle,* 1893, CXI.

H.-D. Thomson. — Systèmes de coupures hyperelliptiques et coordination des caractéristiques algébriques et transcendantes de fonctions thêta; *Amer. Journal,* 1893, XV.

DIXIÈME SECTION.

CORRESPONDANCES ALGÉBRIQUES ET GROUPES DISTINGUÉS.

Cayley. — Note sur les correspondances de deux points sur une courbe; *Comptes rendus,* 1866, LXII; *Œuvres,* V, n° 377; *Proceedings of the London Math. Soc.,* 1866, I; *Œuvres,* VI; n° 385. Second Mémoire sur les courbes qui satisfont à des conditions données; le principe de correspondance; *Phil. Trans.,* 1886, CLVIII; *Œuvres,* VI, n° 407.

H.-G. Zeuthen. — Nouvelle démonstration du théorème sur les séries de points correspondants sur deux courbes; *Math. Ann.*, 1870, III. Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode de détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque; *Math. Ann.*, 1891, XL.

Brill. — Sur deux problèmes d'élimination de la théorie des courbes qui satisfont à des conditions données; *Goett. Nachr.*, 1870. Sur la correspondance des systèmes de points sur une courbe; *ibid.*, 1871. Pour la théorie de l'élimination et des courbes algébriques; *Math. Ann.*, 1871, IV. Sur deux problèmes de contact; *ibid.,* 1871, IV. Sur l'élimination dans certains systèmes d'équations; 1871, V. Sur la correspondance des systèmes de points sur une courbe; *ibid.*, 1872, VI.

A. Brill et *M. Noether*. — Sur les fonctions algébriques, etc.; *Math. Ann.*, 1871, VII.

A. Brill. — Sur la formule de correspondance; *ibid.*, VII. Sur les correspondances algébriques; *ibid.*, XXXI, XXXVI.

A. Clebsch. — Leçons sur la Géométrie; Leipzig, 1876.

Lindemann. — Extrait d'une seconde lettre concernant l'application des intégrales abéliennes à la Géométrie des courbes planes, adressée à M. Hermite; *Crelle*, XXXXIV.

H. Schubert. — Calcul de la Géométrie énumérative; Leipzig, 1879.

A. Hurwitz. — Mémoires de 1886 et 1887 (*voir* plus bas).

K. Bobek. — Sur le principe de correspondance généralisé; *Sitz. de l'Acad. de Vienne*, 1886.

G. Castelnuovo. — Une application de la Géométrie énumérative aux courbes algébriques; *Rendic. du Cercle Math. de Palerme*, 1888, III. Nombre des espaces qui coupent plusieurs droites dans un espace à n dimensions; *Rendic. de l'Acad. des Lincei*, 1889. Nombre des involutions rationnelles portées par une courbe de genre donné; *ibid.*, 1889.

L. Kronecker. — Sur le nombre des classes différentes de formes quadratiques de déterminant négatif; *Crelle*, 1859, LVII.

R. Dedekind. — Lettre à Borchardt sur la théorie des fonctions modulaires elliptiques; *ibid.*, 1877, LXXXIII.

F. Klein. — Pour la théorie des fonctions modulaires elliptiques; *Sitz. de l'Acad. de Munich*, 1879; *Math. Ann.*, XVII. Sur les formes normales en nombre infini des intégrales elliptiques de première espèce; *Sitz. de l'Acad. de Munich*, 1880; *Math. Ann.*, XVII. Nouvelles recherches sur les fonctions modulaires elliptiques des plus petites dimensions; *Berichte de Leipzig*, 1885.

W. Fiedler. — Sur une classe particulière de fonctions modulaires irrationnelles des fonctions elliptiques; *Dissert.* Leipzig, 1886.

Friedrich. — Les équations modulaires des modules de Galois de la deuxième à la cinquième dimension; Leipzig, 1886.

J. Gierster. — Sur les relations entre les nombres de classes des formes quadratiques binaires de déterminant négatif; *Math. Ann.*, 1880, XVII.

F. Klein. — Leçons sur les fonctions modulaires elliptiques, rédigées par R. Fricke, 2 vol.; Leipzig, 1890-1892.

A. Hurwitz. — Sur la théorie des équations modulaires; *Goett. Nachr.*, 1883. — Sur les relations entre les nombres de classes des formes quadra-

tiques binaires de déterminant négatif; *Math. Ann.*, 1884, XXV. Sur les relations entre les nombres de classes et les correspondances modulaires quand les dimensions sont des nombres premiers; *Berichte de Leipzig*, 1885. Sur les correspondances algébriques et le principe de correspondance généralisé; *ibid.*, 1886, et *Math. Ann.*, XXVIII. Sur les figures algébriques qui admettent une transformation univoque en elles-mêmes; *Goett. Nachr.*, 1887, et *Math. Ann.*, XXXII. J. T.

Le Rapport de M. L. Henneberg, dont il nous reste à parler, concerne le développement de la théorie des *travures simples* et les principaux problèmes que pose cette théorie.

La théorie toute récente des travures réticulaires offre un exemple intéressant de développement que peut prendre une théorie sous l'inspiration de nécessités pratiques. Depuis longtemps déjà l'art du constructeur a substitué, aux maçonneries lourdes et massives de l'ancien temps, des charpentes plus sveltes et plus légères en bois et surtout en tiges de fer. Ces dernières joignent à l'avantage d'une grande résistance sous un faible volume celui d'un façonnage commode. Ces tiges interviennent uniquement par les tensions ou compressions *longitudinales* qu'elles supportent et qu'elles se transmettent les unes aux autres sous les efforts extérieurs auxquels leur ensemble se trouve soumis.

Calculer la longueur et la disposition qu'il convient de donner aux tiges de cet ensemble, en vue d'un but à atteindre, se rendre compte des propriétés générales de leur configuration et enfin déterminer les tractions ou les compressions qu'elles subissent, tels sont les problèmes fondamentaux de cette théorie.

Dans une première approximation, on peut regarder les tiges comme inextensibles. Le problème revêt alors une forme notablement plus simple.

L'hypothèse contraire conduirait à un des chapitres les plus difficiles de la théorie de l'Élasticité; elle a été moins étudiée, et donne en tous les cas des résultats bien moins élégants et jusqu'ici moins intéressants pour le mathématicien pur. Aussi l'auteur s'en tient-il au cas de la rigidité parfaite. Il convient peut-être de rappeler que bien souvent l'hypothèse de tiges non extensibles laisserait indéterminée la question de la distribution

des tensions, preuve évidente de la nécessité qu'il y a de recourir alors à l'élasticité.

Dans cet article, consacré à un résumé des travaux publiés sur les travures réticulaires, l'auteur rappelle d'abord les premiers écrits de Ritter et surtout ceux de Culmann dont la *Statique graphique* a été le berceau de la théorie nouvelle.

Au commencement de ce siècle, Möbius et Chasles ont, comme on sait, mis au jour une doctrine particulièrement féconde, que Plunker a développée ensuite dans sa *Théorie des complexes.*

Nous voulons parler de la réciprocité polaire qui naît du complexe linéaire. Cette doctrine abstraite, où l'on admirait surtout des rapports ingénieux et nouveaux entre les figures de l'espace, s'est tout à coup trouvée avoir un rôle pratique à remplir, et, pour lui assigner ce rôle, il a suffi d'un théorème de Maxwell convenablement interprété, peu de temps après sa découverte, par Cremona.

Le théorème de Maxwell est le suivant :

Si l'on fait agir des forces représentées en grandeur par les lignes d'une figure, entre les extrémités des lignes correspondantes de la figure réciproque, les points de cette figure sont en équilibre sur l'influence de ces forces.

Par *figures réciproques* Maxwell entendait la projection, sur le plan d'un parallèle, des arêtes de deux polyèdres polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à un paraboloïde de révolution.

Mais Cremona remarqua qu'il suffisait de faire tourner l'une des deux figures d'un angle de 90° autour de l'axe de révolution, pour que les deux figures deviennent les projections de deux polyèdres polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à un complexe linéaire, ayant comme axe central l'axe de révolution du paraboloïde.

Cremona a développé sa belle remarque dans un petit livre plein d'intérêt, publié en français en 1885 (¹).

(¹) CREMONA, *Les figures réciproques en Statique graphique*; Paris, Gauthier-Villars.

M. Hanck a fait observer que le paraboloïde de Maxwell pourrait être remplacé par une surface quelconque de révolution du second degré.

La notion de travure a été généralisée par M. Mohr, puis par M. Fœppl qui a étendu cette notion au cas de l'espace.

L'auteur passe en revue les travaux qui ont été publiés sur la configuration des travures, il rappelle que le nombre n des nœuds et le nombre m des tiges sont liés par la relation

$$m = 2n - 3;$$

il en rappelle diverses conséquences. La détermination des tensions dans une travure donnée a été l'objet des premières recherches de Ritter et de Culmann. Leurs deux méthodes supposent qu'on peut pratiquer dans la travure des sections ne rencontrant chacune que trois tiges; cette hypothèse suffit dans beaucoup de cas; mais enfin il était désirable de résoudre le cas général. M. Saviotti a fait un premier pas vers la solution et indiqué une méthode de *fausse position* qui s'applique parfaitement dans les exemples qu'il a traités. C'est l'auteur même de l'article que nous analysons, M. Henneberg, qui a donné la première solution complète; M. Müller-Breslau en a donné une autre depuis.

Les travures dans l'espace ont été moins étudiées. L'auteur cite à ce propos les travaux de MM. Fœppl, Müller-Breslau et Grübler.

G. K.

MÉLANGES.

PROPOSITION TOUT A FAIT ÉLÉMENTAIRE, A SUBSTITUER AU LEMME DE CAUCHY DANS LA THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONS;

Par M. Ch. MÉRAY,

Professeur à la Faculté des Sciences de Dijon.

1. Au nombre des théorèmes qui ont un caractère absolument vital pour toute l'Analyse, il faut ranger, en première ligne selon moi, ceux qui font dépendre la convergence initiale des développements par la formule de Taylor, des fonctions composées, intégrales, implicites, de la *seule* possession (ou à peu près) de la même propriété par celles intervenant comme données dans les opérations génératrices de ces diverses fonctions. Si l'on veut se reporter, en particulier, aux nos **247***, **301***, **307***, **362*** et suivants de mes *Leçons nouvelles sur l'Analyse, etc.* (¹), où je les ai repris et méthodiquement enchaînés, on constatera immédiatement que leur point d'appui essentiel, commun à tous, est le lemme suivant, dont le principe est dû à Cauchy (²) :

Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans les aires limitées S_x, S_y, ..., *avec les olomètres* δ_x, δ_y, ... (**89***), (**139***), *et si l'on représente par* r_x, r_y, ... *des quantités positives inférieures à* δ_x, δ_y, ... *respectivement, par* M *une limite supérieure de* $\operatorname{mod} f(x,y,\ldots)$ *pour toutes valeurs de* x, y, ... *tombant dans ces aires accrues de zones additionnelles dont les épaisseurs sont comprises entre* r_x, r_y, ... *d'une part et* δ_x, δ_y, ... *d'autre part* (**181***), *on a, dans tout l'intérieur des mêmes aires et pour toutes valeurs des indices de différentiation* p, q, ..., *l'inégalité*

$$(1) \qquad \operatorname{mod} f^{(p,q,\ldots)}(x,y,\ldots) < \mathrm{M}\,\frac{1.2\ldots p}{r_x^p}\,\frac{1.2\ldots q}{r_y^q}\cdots \qquad (\mathbf{183}^*)$$

(¹) Paris, 1894, Gauthier-Villars et fils. Les numéros de renvoi affectés d'astérisques viseront ici la première Partie de cet Ouvrage.

(²) Briot et Bouquet, *Théorie des fonctions doublement périodiques, etc.* 1859, p. 45.

La démonstration habituelle met en jeu des considérations bien détournées et disparates, bien compliquées en somme, puisqu'elle impose des références aux propriétés des intégrales définies (mêmes multiples), à celles de l'exponentielle imaginaire ou plutôt des lignes trigonométriques auxquelles on continue à ramener cette fonction, etc. (¹). Tenant, au contraire, à donner à ce lemme une assiette peu étendue et parfaitement délimitée, à le dégager notamment de la moindre allusion spéciale à l'Analyse infinitésimale ou à la monographie des transcendantes, pour pouvoir ensuite fonder sur lui, avec netteté et en pleine sécurité, toutes les parties de la théorie générale des fonctions, j'en ai donné deux démonstrations (s'appliquant du moins à un fait équivalent) qui sont tirées exclusivement des principes courants de l'Algèbre proprement dite. La dernière, publiée en 1891 dans ce Recueil, puis reproduite au nº **130***, est d'une brièveté, les moyens mis en action sont d'une simplicité qui la rendent très supérieure à l'autre datant de 1872 (*Nouv. Précis d'Analyse infinitésimale*, p. 80); on peut néanmoins lui reprocher encore un de ces tours de main, une de ces considérations peu directes, qui sont acceptés sans doute parce qu'ils réussissent, mais qui prouvent les choses sans les éclairer, et qui, pour ce motif, sont de véritables difformités dans les raisonnements où ils se mêlent.

2. Il me semble impossible de faire mieux, si du moins on veut conserver à ce lemme l'*exacte* étendue de l'énoncé ci-dessus, et continuer à le placer *tout entier* au seuil de la théorie des fonctions. Mais, si l'on prend garde que la formule (1), considérée comme garantie de la convergence des développements fondamentaux mentionnés tout à l'heure, doit son efficacité à *sa structure propre* exclusivement, *point du tout à cette circonstance particulière que la lettre* M *y représente une limite supérieure de* mod$f(x, y, \ldots)$, *plus ou moins rapprochée de son véritable maximum,* on présumera la possibilité d'instituer une démonstration plus élémentaire encore, au prix de quelque sacrifice consenti sur la petitesse de M. Je viens précisément d'y réussir en

(¹) BRIOT et BOUQUET, *loc. cit.* — E. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. II, p. 238, 1892. — Etc.

procédant comme je le fais dans le numéro suivant, où la modification apportée à l'énoncé du n° **1** est indiquée par des caractères saillants.

Il est bien vrai, dois-je ajouter, que, dans la discussion des développements dont j'ai parlé, la substitution de la formule (2, *inf.*) à la formule (1), procédant immédiatement des idées de Cauchy, diminue les valeurs minimums des rayons de convergence sur lesquels on peut compter pour ces séries; mais la chose est sans importance, parce que, dans toutes les théories et même dans la monographie des fonctions, le point capital est que l'*existence de quelque* groupe de rayons de convergence soit assurée, nullement que les valeurs minimums considérées pour ceux-ci soient plus grandes ou plus petites (**202***), (**302***, VI). Au surplus, et par rapport à leurs maximums effectifs dans chaque cas particulier, les valeurs obtenues pour ces rayons en partant de la formule (1), sont généralement si petites, qu'on ne peut pas les considérer comme en fournissant une approximation, même très grossière. Quand il arrive, par exemple, que ces rayons sont illimités, la formule en question ne le dit jamais.

3. *Si la fonction $f(x, y, \ldots)$ est olotrope dans les aires limitées S_x, S_y, ... avec les olomètres δ_x, δ_y, ...* (**89***), (**139***), *et si l'on représente par r_x, r_y, ... des quantités positives inférieures à δ_x, δ_y, ... respectivement, puis par $\mathcal{A}$* UNE CONSTANTE POSITIVE CONVENABLEMENT CHOISIE, *on a, dans tout l'intérieur des mêmes aires et pour toutes valeurs des indices de différentiation p, q, ..., l'inégalité*

$$(2)\qquad \operatorname{mod} f^{(p,q,\ldots)}(x, y, \ldots) < \mathcal{A}\,\frac{1.2\ldots p}{r_x^p}\,\frac{1.2\ldots q}{r_y^q}\cdots.$$

I. *Soient*

$$(3)\qquad F(x, y, \ldots) = \sum (a_{m,n,\ldots}\,x^m y^n \ldots)$$

la somme d'une série entière admettant δ_x, δ_y, ... pour rayons de convergence, et δ'_x, δ'_y, ..., δ''_x, δ''_y, ... des quantités positives donnant

$$(4)\qquad \delta'_x < \delta''_x < \delta_x,\qquad \delta'_y < \delta''_y < \delta_y,\qquad \ldots$$

Pour toutes valeurs de x, y, ... *remplissant les conditions*

$$(5) \qquad \operatorname{mod} x \leqq \delta'_x, \qquad \operatorname{mod} y \leqq \delta'_y, \qquad \ldots,$$

on a

$$(6)\ \operatorname{mod} F^{(p,q,\ldots)}(x,y,\ldots) < \frac{\alpha}{\left(1-\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)\left(1-\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)\cdots}\ \frac{1.2\ldots p}{(\delta''_x-\delta'_x)^p}\ \frac{1.2\ldots q}{(\delta''_y-\delta'_y)^q}\cdots,$$

formule où α *désigne une certaine constante positive.*

L'hypothèse admise et les inégalités (4) assurant la convergence de la série (3), de celle aussi des modules de ses termes, pour $\operatorname{mod} x = \delta''_x$, $\operatorname{mod} y = \delta''_y$, ... (114*), la variante $\alpha_{m,n,\ldots}\delta''^m_x\delta''^n_y\ldots$ où $\alpha_{m,n,\ldots} = \operatorname{mod} a_{m,n,\ldots}$, est infiniment petite, et en particulier finie. Quels que soient les indices m, n, ..., on a donc

$$\alpha_{m,n,\ldots}\delta''^m_x\delta''^n_y\ldots < \alpha,$$

où α représente quelque quantité positive convenable; on a, en d'autres termes,

$$\alpha_{m,n,\ldots} < \alpha\frac{1}{\delta''^m_x}\ \frac{1}{\delta''^n_y}\cdots$$

Quand les conditions (5) sont remplies, on en conclut

$$\begin{aligned}
&\operatorname{mod} D^{p,q,\ldots}_{x,y,\ldots}(a_{m,n,\ldots}x^m y^n\ldots)\\
&= [m(m-1)\ldots(m-p+1)][n(n-1)\ldots](n-q+1)]\ldots\alpha_{m,n,\ldots}(\operatorname{mod} x)^{m-p}(\operatorname{mod} y)^{n-q}\ldots\\
&< \frac{\alpha}{\delta''^p_x\,\delta''^q_y\ldots}[m(m-1)\ldots(m-p+1)][n(n-1)\ldots(n-q+1)]\ldots\left(\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{m-p}\left(\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{n-q}\ldots\\
&< \alpha\,\frac{1.2\ldots p}{\delta''^p_x}\ \frac{1.2\ldots q}{\delta''^q_y}\cdots\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+1+m-p-1)}{1.2\ldots(m-p)}\\
&\quad\times\frac{(q+1)\ldots(q+1+n-q-1)}{1.2\ldots(n-q)}\cdots\left(\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{m-p}\left(\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{n-q}\cdots.
\end{aligned}$$

Il en résulte (157*, 3°)

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod} F^{(p,q,\ldots)}(x,y,\ldots) &< \sum[\operatorname{mod} D^{(p,q,\ldots)}_{x,y,\ldots}(a_{m,n,\ldots}x^m y^n\ldots)]\\
&< \alpha\,\frac{1.2\ldots p}{\delta''^p_x}\ \frac{1.2\ldots q}{\delta''^q_y}\cdots\sum\left[\frac{(p+1)(p+2)\ldots(p+1+\mathrm{m}-1)}{1.2\ldots\mathrm{m}}\right.\\
&\qquad\left.\times\frac{(q+1)\ldots(q+1+\mathrm{n}-1)}{1.2\ldots\mathrm{n}}\cdots\left(\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{\mathrm{m}}\left(\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{\mathrm{n}}\cdots\right].
\end{aligned}$$

La somme qui figure dans ce dernier membre, et qui doit être étendue à toutes les combinaisons de valeurs nulles et positives des entiers $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, ..., est évidemment celle d'une progression géométrique ayant $p+1$ raisons égales à $\frac{\delta'_x}{\delta''_x}$ (<1), $q+1$ raisons égales à $\frac{\delta'_y}{\delta''_y}$ (<1), ...; elle a donc pour valeur

$$1:\left[\left(1-\frac{\delta'_x}{\delta''_x}\right)^{p+1}\left(1-\frac{\delta'_y}{\delta''_y}\right)^{q+1}\cdots\right] \qquad (113^*),$$

et la substitution de cette expression dans l'inégalité précédente conduit immédiatement à la formule (6) qu'il s'agissait d'établir.

II. *L'exactitude de notre énoncé peut être affirmée quand les dimensions des aires* S_x, S_y, ... (89*) *sont inférieures à des quantités positives* δ'_x, δ'_y, ..., *limitées par les inégalités*

$$(7) \qquad \delta'_x < \delta_x - r_x, \qquad \delta'_y < \delta_y - r_y, \qquad \ldots.$$

A cause de ces conditions, et en posant

$$(8) \qquad r_x + \delta'_x = \delta''_x, \qquad r_y + \delta'_y = \delta''_y, \qquad \ldots,$$

on a évidemment les inégalités (4). Si, de plus, on nomme x_0, y_0, ... des valeurs initiales des variables prises à volonté dans les aires considérées, puis si, à partir d'elles, on développe $f(x, y, \ldots)$ par la formule de Taylor, on trouvera

$$(9) \qquad f(x, y, \ldots) = \sum [a_{m,n,\ldots}(x-x_0)^m (y-y_0)^n \ldots],$$

série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., admettant δ_x, δ_y, ... pour rayons de convergence, et les inégalités

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \delta'_x, \qquad \operatorname{mod}(x - x_0) < \delta'_y, \qquad \ldots$$

subsistent tant que x, y, ... restent intérieures aux mêmes aires.

On obtiendra donc immédiatement l'inégalité (2) dans le cas qui nous occupe, en appliquant la formule (6) à la série (9), en ayant égard aux égalités (8), et en posant

$$\alpha:\left[\left(1-\frac{\delta'_x}{r_x+\delta_x}\right)\left(1-\frac{\delta'_y}{r_y+\delta'_y}\right)\cdots\right] = \mathcal{A}.$$

III. *Notre proposition est vraie, quelles que soient les dimensions des aires* S_x, S_y, ...

Si δ'_x, δ'_y, ... représentent des quantités positives satisfaisant

aux inégalités (7), on peut évidemment subdiviser les aires S_x, S_y, ... en des nombres limités de fragments dont les dimensions sont inférieures à δ'_x pour la première, à δ'_y pour la seconde, à ..., et les combinaisons d'une subdivision de S_x, avec une subdivision de S_y, avec ... sont aussi en nombre limité N.

Comme notre énoncé s'applique à chacune de ces diverses combinaisons (II), sauf l'adoption successive, pour la constante $\mathcal{A}$, de certaines valeurs convenables $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}''$, ..., $\mathcal{A}^{(N)}$, il s'appliquera évidemment aussi aux aires considérées tout entières, en attribuant à $\mathcal{A}$ une valeur quelconque supérieure à toutes celles-ci.

4. Cette simplification du lemme de Cauchy, qui déjà facilite considérablement sa démonstration, offre un intérêt doctrinal peut-être encore plus grand. Elle dégage effectivement de toute considération *spéciale,* de tout artifice, elle rattache étroitement aux *principes mêmes* de l'existence des séries entières, renfermés dans le théorème fondamental d'Abel (**114***), sa partie capitale, celle qui lie, d'une manière si remarquable et si nette, les grandeurs relatives des modules des dérivées d'une fonction olotrope, à leurs indices de différentiations et aux olomètres de celle-ci. En outre , et si cette entreprise n'avait pas perdu irrévocablement tout intérêt, elle permettrait évidemment d'exposer la théorie des fonctions *réelles,* en laissant absolument de côté les allusions aux quantités imaginaires dont elle semblait ne pouvoir se passer; c'est la justification de ce que j'ai avancé dans la préface de mes *Leçons* (p. XVIII).

A la vérité, elle ne s'applique pas à l'autre partie du lemme, consistant à dire que, dans la formule (2), la valeur de la constante $\mathcal{A}$ peut être abaissée jusqu'à la quantité M figurant dans la formule (1), partie qui, si elle n'est pas essentielle, comme je l'ai dit, n'en prête pas moins un appui indispensable à d'autres théorèmes importants (**133***), (**201***), (**273*** *et suiv.*), (où l'on remarquera que l'intervention des quantités imaginaires est en général inéluctable). Mais, une fois assis sur la formule (2), les principes généraux de la théorie des fonctions fournissent, pour le point restant ainsi en souffrance, une démonstration facile et surtout très directe; c'est ce que je ferai voir dans une autre occasion.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften. N°s 56, 57 et 59. In-8°, cart. Leipzig, Engelmann.

N° 56. Die Gesetze der Ueberkaltung u. Gefrierpunktserniedrigung. 2. Abhandlungen von Ch. Blagden. (1788). Herausgeg. von A. J. v. Oettingen 49 p. 80 pf. — 57. Abhandlungen über Thermometrie von Fahrenheit, Réaumur, Celsius. 1724, 1730-1733, 1742. Herausgeg. von A. J. v. Oettingen. 140 p. avec 17 fig. 2 m. 40 pf.

Dixon (A.-C.). — *The Elementary Properties of the Elliptic Functions, with Examples.* In-8°, 140 p. London, Macmillan. 5 sh.

Kunze (C.-L.-A.). — *Das geometrische Figurenspiel für Kinder u. Erwachsene.* 10e édition. In-12, 8 p. avec 20 planches et 7 petites planches. Weimar, Böhlau. (Dans un étui). 2 m.

Zermelo (E.). — *Untersuchungen zur Variations-Rechnung.* (*Dissert.*) Gr. in-8°, 97 p. avec 8 fig. Berlin, Mayer et Müller. 2 m. 50 pf.

Ziwet (A.). — *An Elementary Treatise on Theoretical Mechanics.* Part 3. *Kinetics.* In-8°. London, Macmillan. 8 sh. 6 d.

Schlesinger (L.). — *Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.* (En 2 volumes.) Tome II. Gr. in-8°, xx-486 p. Leipzig, Teubner. 16 m.

Hermann v. Helmholtz. — *Gedächtnissrede.* Von W. v. Bezold. Avec portrait d'après Lenbach. Gr. in-8°, 31 p. Leipzig, Barth. 1 m.

Burr van Bleck (E.). — *Zur Kettenbruchentwickelung Lamé'scher und ähnlicher Integrale.* Inauguraldiss. In-4°, 91 p. Göttingen.

Dumont (F.). — *Essai d'une théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre.* T. II. In-8°, 90 p. Annecy, impr. Depollier et Cie.

Glauner (Th.). — *Ueber den Verlauf der Potentialfunctionen im Raume.* Inauguraldiss. In-8°, 62 p. Göttingen.

Lie (S.). — *Untersuchungen über unendliche continuirliche Gruppen.* In-8°, 108 p. Leipzig, Hirzel. 5 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

WEBER. — LEHRBUCH DER ALGEBRA, in zwei Bänden. Erster Band, xvi-655 p. in-8°; Braunschweig, Vieweg und Sohn; 1895.

Ce *Traité d'Algèbre* ne peut manquer d'avoir un grand succès; l'excellent géomètre qui en est l'auteur s'est illustré par d'importantes recherches d'Algèbre et d'Analyse; nous avons essayé naguère de dire les rares mérites de son *Traité des fonctions elliptiques :* ces mérites se retrouvent ici, peut-être avec un souci plus grand de la pédagogie, car c'est véritablement un *Lehrbuch,* un livre où l'on pût apprendre l'Algèbre, que M. Weber a voulu écrire, et il y a pleinement réussi. Son goût pour la concision n'est que la recherche de la simplicité dans la pensée et d'une forme de langage adéquate à cette pensée; il ne dit jamais rien que d'essentiel, mais il a grand soin de ne rien omettre qui soit essentiel; dans le fond et dans la forme, son livre est véritablement *clair*.

C'est l'habitude en Allemagne, dans les livres de cette nature, que de reprendre les choses au début; il serait intéressant de savoir si cette habitude correspond à une forme d'esprit, à un certain goût logique, ou si elle dépend de l'organisation de l'enseignement dans les gymnases et dans les universités; quoi qu'il en soit, M. Weber n'y manque pas et il a mis au début quelques pages d'introduction sur le concept de nombre, en se plaçant au point de vue de M. Dedekind. Le reste est divisé en trois Livres : les fondements, les racines, les grandeurs algébriques.

I. Le premier Livre débute par les opérations sur les polynomes; mais, dès la multiplication, on reconnaît la tendance de l'Ouvrage; c'est là que l'auteur montre que le produit de deux polynomes, dont chacun a ses coefficients entiers sans autre commun diviseur que l'unité, est un polynome de la même nature, et c'est là d'ailleurs la véritable place de cette proposition si simple et si importante. Notons encore, dans ces commencements, le problème de l'interpolation, pour le cas où les valeurs données du polynome

de degré n que l'on cherche correspondent aux valeurs $0, 1, 2, \ldots, n$ de la variable, placé immédiatement après la formule du binome, ainsi que l'étude rapide des progressions arithmétiques d'ordre supérieur. Le Chapitre suivant contient toutes les propositions essentielles sur les déterminants et les équations linéaires.

Après avoir défini les racines d'une équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, l'auteur montre algébriquement, en supposant successivement $n = 2$ et n impair, que toute équation de la forme

$$x^n = a + bi$$

a une racine réelle ou imaginaire; il donne ensuite la résolution trigonométrique de ces équations, et applique ces résultats à la résolution des équations du second, du troisième et du quatrième degré; il aborde alors le théorème fondamental de l'Algèbre, qu'il établit d'après le procédé bien connu qui consiste à montrer que le module du premier membre de l'équation proposée ne peut avoir d'autre minimum que zéro; il va sans dire que la démonstration est présentée de manière à ne laisser place à aucune objection qui concerne la rigueur; il reproduit ensuite, en la simplifiant d'après une remarque de M. Dedekind, la démonstration de M. Lipschitz (¹), qui fournit un moyen plus pratique pour calculer effectivement les racines d'une équation donnée. On remarquera aussi la forme précise et la démonstration simple donnée pour cette proposition : les racines d'une équation varient d'une façon continue avec les coefficients. Étant donnée une équation

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

dont le premier membre, pour un système de valeurs numériques attribuées aux coefficients $a_1, \ldots, a_n$, peut se mettre sous la forme

$$f(x) = (x - a)^\alpha (x - b)^\beta (x - c)^\gamma, \quad \ldots,$$

où $a, b, c, \ldots$ sont des nombres réels ou imaginaires différents, on peut fixer deux nombres positifs ε, ρ assez petits pour que, si l'on décrit autour des points $a, b, c, \ldots$ des cercles de rayon ρ, toute équation de la forme

$$f(x) + \varphi(x) = 0,$$

(¹) Voir *Bulletin*, 2ᵉ série, t. IV, p. 385.

où $\varphi(x)$ est un polynome de degré $n-1$ dont les coefficients ont des modules moindres que ε, ait précisément α, β, γ,... racines dans les cercles qui ont respectivement pour centres les points a, b, c,... M. Weber traite ensuite des fonctions symétriques. Après avoir montré comment on pouvait les calculer au moyen des formules de Newton, il établit, par la méthode de Cauchy et par celle de Gauss, le théorème fondamental sur la possibilité d'exprimer, et cela d'une seule façon, toute fonction symétrique entière à coefficients entiers de n variables, en fonction entière à coefficients entiers des fonctions symétriques élémentaires de ces n variables; il s'arrête un instant sur les discriminants, et la formation du discriminant de l'équation du quatrième degré lui fournit l'occasion d'introduire les deux invariants de la forme biquadratique; il traite de l'élimination, établit les propositions fondamentales sur la divisibilité et la décomposition des fonctions de plusieurs variables, expose la transformation de Tschirnhausen pour l'appliquer à la résolution des équations du troisième et du quatrième degré et à la réduction de l'équation du cinquième degré. Le Chapitre suivant est consacré aux transformations linéaires. Après avoir exposé brièvement la décomposition en carrés d'une forme quadratique et la loi de l'inertie, M. Weber passe aux formes binaires pour montrer la formation des covariants d'une forme

$$a_0(x-\alpha_1 y)(x-\alpha_2 y)\dots(x-\alpha_u y)$$

au moyen de sommes de produits de facteurs tels que $x-\alpha_i y$, $\alpha_p-\alpha_q$; il donne ensuite, pour la forme cubique, l'invariant et les covariants fondamentaux en montrant de la façon la plus simple que tout autre covariant entier de la forme s'exprime en fonction entière de l'invariant et des covariants fondamentaux. Il traite des mêmes questions pour la forme biquadratique, mais en se bornant à démontrer que tous les invariants s'expriment au moyen des invariants fondamentaux.

Un Chapitre spécial est consacré à la forme particulière sous laquelle M. Hermite a traité de la transformation de Tschirnhausen. Rappelons en quelques mots le point essentiel des recherches de M. Hermite, qui remontent à 1859. Considérant une équation

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

et posant

$$F_0 = a_0 x + \frac{a_1}{n},$$
$$F_1 = a_0 x^2 + a_1 x + \frac{2 a_2}{n},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$F_{n-2} = a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \ldots + \frac{n-1}{n} a_{n-1},$$

une transformation de Tschirnhausen peut se mettre sous la forme

$$y = t_{n-2} F_0 + t_{n-3} F_1 + \ldots + t_0 F_{n-2},$$

où $t_0, t_1, \ldots, t_{n-2}$ sont des coefficients arbitraires; la transformation est préparée de manière que le coefficient de y^{n-1} dans l'équation transformée en y soit nul; les autres coefficients de cette équation seront des fonctions de $a_0, a_1, \ldots, a_n, t_0, \ldots t_{n-2}$; *ces fonctions sont des invariants simultanés* des deux polynomes

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n,$$
$$t_{n-2} - \frac{(n-2)}{1} t_{n-3} x + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2} t_{n-4} x^2 - \ldots \pm t_0 x^{n-2}.$$

Cette belle proposition s'applique très simplement à la transformation et à la résolution des équations du troisième degré. Cette même transformation permet d'introduire la forme quadratique en $t_0, t_1, \ldots, t_{n-2}$ d'une part, en $a_0, a_1, \ldots, a_n$ de l'autre, à laquelle M. Sylvester a donné le nom de *Bézoutiant* : elle n'est autre chose que la somme des carrés des racines de l'équation en y, et M. Weber montrera plus tard, dans le cas où les quantités $a_1, a_2 \ldots, a_n$ sont réelles, comment la décomposition en carrés de cette forme (en $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$) permet de calculer le nombre de racines réelles de l'équation proposée. Pour le moment, il fait, de la considération de cette forme, une belle application à la réduction de l'équation générale du cinquième degré à la forme normale (Klein)

$$z^5 + 15 z^4 - 10 \gamma z^2 + 3 \gamma^2 = 0,$$

et cela sans introduire d'autre irrationnalité que la racine carrée du discriminant de cette équation.

II. La deuxième Partie se rapporte à la résolution numérique

des équations; ceux qui aiment l'Algèbre éprouveront quelque plaisir à voir avec quelle ampleur M. Weber développe cette belle théorie, qu'ils regrettent d'avoir vu disparaître de nos programmes d'enseignement.

Les formules précédemment obtenues pour les équations du troisième et du quatrième degré permettent d'abord de reconnaître sur les coefficients de ces équations le nombre des racines réelles. La considération du Bézoutiant conduit en général, comme on l'a déjà dit, à la solution du même problème : l'auteur développe avec détails cette dernière méthode. Les suites de Sturm permettent, plus généralement, de trouver le nombre de racines distinctes comprises entre deux nombres donnés; l'un des premier exemples d'une suite de Sturm que donne l'auteur, avant même d'avoir expliqué comment la recherche du plus grand commun diviseur entre un polynome et sa dérivée permet d'obtenir une pareille suite, est fourni par le premier membre d'une équation aux inégalités séculaires mise sous forme de déterminant et les mineurs principaux de ce déterminant. M. Weber développe aussi la méthode de M. Hermite, en la rattachant à la transformation de Tschirnhausen : il donne quelques indications sur ces *caractéristiques* de Kronecker, qui fournissent l'extension du théorème de Sturm aux équations à plusieurs inconnues, et rattache à cette notion la première des trois démonstrations que Gauss a données du théorème fondamental de l'Algèbre. Pour ce qui est de la séparation des racines, il développe successivement les théorèmes de Budan, de Newton, de Descartes et compare géométriquement les différents critériums par une méthode que l'on doit à M. Klein; il passe ensuite à la recherche des limites des racines, au théorème de Rolle, et aux intéressantes propositions que l'on doit à Laguerre touchant la séparation des racines d'une équation qui n'a pas de racines imaginaires. Le calcul numérique des racines (interpolation, méthodes de Newton, de Daniel Bernoulli, de Gräffe) est traité avec soin; signalons encore, dans le même ordre d'idées, l'exposition d'une méthode due à Gauss pour la recherche des racines réelles ou imaginaires d'une équation trinome.

Un Chapitre spécial est consacré aux fractions continues; l'auteur a l'occasion d'y aborder de belles théories arithmétiques : l'équivalence des nombres irrationnels, les irrationnelles du

second degré, la réduction de ces irrationnelles, les lois de leur développement en fractions continues, l'équation de Pell et, par occasion, les formes quadratiques binaires à coefficients entiers; à la fin de ce Chapitre, il traite rapidement de la recherche des racines rationnelles et, plus généralement, des diviseurs rationnels d'un polynome à coefficients entiers. Un autre Chapitre se rapporte aux équations binomes, traitées tout d'abord au point de vue de la pure Algèbre, indépendamment de la représentation trigonométrique de leurs racines; la théorie de ces équations est alors parallèle à celle des congruences binomes, en Arithmétique, et c'est pour l'auteur l'occasion d'exposer cette dernière théorie. La théorie de la division des arcs se rattache immédiatement à celle de l'équation binome, quand on considère l'expression trigonométrique des racines; dans les équations de la division, la considération du produit des racines fournit immédiatement les égalités

$$2^{\frac{n-1}{2}}\prod_{(\nu)}\cos\frac{2\nu m\pi}{n}=\pm 1,$$
$$2^{\frac{n-1}{2}}\prod_{(\nu)}\sin\frac{2\nu m\pi}{n}=\pm\sqrt{n},$$

qui servent de base à la démonstration d'Eisenstein de la loi de réciprocité des restes quadratiques.

III. C'est le troisième Livre, consacré aux nombres algébriques, qui constitue la partie la plus originale et la plus intéressante du Volume. L'auteur y a exposé, tout d'abord, la théorie de Galois et il faut reconnaître que, de ce point de vue, les choses s'éclairent singulièrement. Outre que la considération du groupe de Galois fait évanouir, dans les propositions indispensables de la théorie des substitutions, toute différence entre les cas où l'on a affaire à des variables indépendantes et celui où l'on a affaire aux racines d'une équation déterminée, la plupart des questions qui se présentent, dans cette belle et difficile théorie, s'engendrent en quelque sorte d'une façon nécessaire, et l'on n'aborde guère un problème qu'au moment même où le lecteur se le pose de lui-même; lorsqu'on est arrivé à exposer ainsi un ensemble de propositions, il semble qu'on puisse être assuré de s'être vraiment placé au point de vue qui domine la théorie.

L'auteur, comme les tendances générales de son Livre pouvaient le faire prévoir, a pris pour point de départ la notion de *corps*. Rappelons que M. Dedekind appelle ainsi un ensemble de nombres tel que tout nombre obtenu en ajoutant, multipliant ou divisant deux nombres de cet ensemble, appartienne encore à l'ensemble. Il est clair que tout corps contient l'ensemble des nombres rationnels proprement dits. Un corps peut d'ailleurs aussi contenir des variables indéterminées; il contient alors, parmi ses éléments, toutes les fonctions rationnelles de ces variables dont les coefficients sont les éléments purement numériques du corps; mais il doit être bien entendu que les variables doivent alors garder leur caractère, être toujours représentées par des *lettres*. Un diviseur Ω' d'un corps Ω est un corps dont tous les éléments sont contenus dans Ω. Quoique Kronecker se soit placé à un point de vue différent, dont ce n'est pas le lieu de discuter ici les avantages, il est bien évident que la notion de corps et celle de domaine de rationnalité, sont équivalentes. Tous les éléments d'un corps sont dits *rationnels* dans ce corps. On peut considérer des polynomes dont les coefficients appartiennent à un corps, et les notions d'irréductibilité, de décomposition en facteurs premiers, reçoivent une extension facile et immédiate. Si α est une racine d'une équation dans Ω, c'est-à-dire d'une équation $F(x) = 0$ dont les coefficients appartiennent au corps Ω, le corps $\Omega(\alpha)$, obtenu par l'adjonction de α à Ω, contiendra, outre les éléments de Ω, toutes les fonctions rationnelles de α dont les coefficients sont des éléments de Ω, fonctions qui peuvent être réduites facilement à des polynomes de degré $n-1$, si l'équation, irréductible dans Ω, que vérifie α est de degré n; n est le degré du corps $\Omega(\alpha)$.

Galois a montré comment l'adjonction de racines $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ d'équations

$$(1) \qquad A(x) = 0, \quad B(x) = 0, \quad C(x) = 0, \quad \ldots,$$

dont on suppose seulement que les coefficients appartiennent à Ω, et que toutes les racines soient inégales entre elles, revient à l'adjonction d'une seule racine d'une équation convenablement choisie. Ce n'est pas la démonstration même de Galois que rap-

porte M. Weber; ayant formé, comme Galois, l'équation

$$F(\xi) = 0,$$

au moyen d'une fonction rationnelle ξ de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, telle que l'on n'ait pas

$$\xi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = \xi(\alpha', \beta', \gamma', \ldots),$$

à moins d'avoir

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma', \quad \ldots,$$

en supposant que $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ soient des racines respectives des équations (1), désignons par $\xi, \xi', \xi'', \ldots$ les racines nécessairement distinctes de l'équation $F(\xi) = 0$; ces racines correspondront manifestement aux divers arrangements que l'on peut déduire de l'arrangement $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, en prenant pour $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les diverses racines respectives des équations (1); si maintenant $\theta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ est une fonction rationnelle de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, en remplaçant, dans $\theta(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, par ces divers arrangements, on obtiendra une suite de quantités

$$\theta, \quad \theta', \quad \theta'', \quad \ldots,$$

distinctes ou non, qui correspondront manifestement aux racines $\xi, \xi', \xi'', \ldots$; il suffit maintenant de se reporter à la formule d'interpolation de Lagrange pour voir que le polynome en t,

$$\psi(t) = F(t)\left(\frac{\theta}{t-\xi} + \frac{\theta'}{t-\xi'} + \frac{\theta''}{t-\xi''} + \ldots\right),$$

qui est symétrique par rapport aux racines de l'équation $F(t) = 0$ et dont les coefficients appartiennent, par conséquent, à Ω, fournit l'expression rationnelle de θ en fonction de ξ, puisque l'on a évidemment

$$\theta = \frac{\Psi(\xi)}{F'(\xi)}.$$

Le même mode de raisonnement sera employé dans divers cas.

Si $F(x) = 0$ est une équation irréductible dans Ω, dont les racines soient $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, les corps $\Omega(\alpha), \Omega(\alpha_1), \ldots, \Omega(\alpha_{n-1})$ sont dits *conjugués;* un élément *primitif* dans $\Omega(\alpha)$ est une fonction rationnelle de α qui prend n valeurs distinctes quand on y remplace α par $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$; chaque élément de $\Omega(\alpha)$ s'ex-

prime rationnellement au moyen de n'importe quel élément primitif. Un élément imprimitif β de $\Omega(\alpha)$ est une fonction rationnelle de α qui ne prend, dans les mêmes conditions, que n_1 valeurs, n_1 étant plus petit que n; n_1 est nécessairement un diviseur de n et le corps $\Omega(\beta)$ est un diviseur de $\Omega(\alpha)$ de degré $\frac{n}{n_1}$; inversement, tout corps qui divise $\Omega(\alpha)$ et qui contient Ω, peut être obtenu par l'adjonction à Ω d'un élément imprimitif de $\Omega(\alpha)$. Un corps $\Omega(\alpha)$, qui ne contient pas d'autres éléments imprimitifs que les éléments de Ω est dit *primitif*. Si $F(x) = 0$ est une équation dans Ω, irréductible ou non, mais à racines distinctes $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, le corps $\Omega(\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1})$ est le *corps de Galois* de cette équation. Le corps de Galois peut être obtenu par l'adjonction à Ω d'une fonction rationnelle de $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ qui prend $1.2\ldots m$ valeurs distinctes quand on y permute $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$, de toutes les façons possibles; si ρ est un élément primitif du corps de Galois, ρ est une fonction rationnelle de $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$; inversement, ces quantités sont des fonctions rationnelles de ρ; l'équation *irréductible* que vérifie ρ est une équation *normale*, c'est-à-dire une équation irréductible telle que toutes ses racines s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'elles; c'est une *résolvante de Galois* de l'équation $F(x) = 0$. Le corps de Galois est *normal*, c'est-à-dire qu'il est identique à tous ses conjugués. Si l'on désigne par $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{p-1}$ les racines de la résolvante, en la supposant de degré p, les racines $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$ de $F(x)$ sont toutes des fonctions rationnelles de l'une quelconque ρ_a des racines de la résolvante; si, dans ces fonctions rationnelles, on remplace ρ_a par ρ_b, on retrouve les mêmes racines $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ rangées dans un même ordre; en d'autres termes, à toute substitution (ρ_a, ρ_b) du corps de Galois correspond une substitution des éléments $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$. Toute substitution (ρ_a, ρ_b) équivaut à une substitution (ρ, ρ_c) de l'élément ρ_c, convenablement choisi, à l'élément ρ; inversement, toute substitution (ρ, ρ_c) peut être mise sous la forme (ρ_a, ρ_b) où l'un des éléments ρ_a, ρ_b est arbitraire, l'autre étant déterminé par celui-là et par ρ_c; les p substitutions des éléments $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ que l'on obtient en exprimant rationnellement ces quantités au moyen de ρ, et en rempla-

çant successivement ρ par ρ, ρ_1, ..., ρ_{p-1}, forment un groupe; c'est le groupe de Galois de l'équation $F(x) = 0$, groupe dont les éléments correspondent manifestement aux p substitutions

$$(\rho, \rho), \quad (\rho, \rho_1), \quad \ldots, \quad (\rho, \rho_{p-1})$$

du corps de Galois. Toute équation rationnelle dans Ω entre α, α_1, ..., α_{m-1} subsiste quand on effectue, sur ces quantités, une substitution du groupe de Galois; toute fonction rationnelle dans Ω de α, α_1, ..., α_{m-1}, qui garde la même valeur quand on effectue sur α, α_1, ..., α_{m-1} une substitution quelconque du groupe de Galois, est un élément de Ω; inversement, un groupe de substitutions qui jouit de ces propriétés, coïncide avec le groupe de Galois. Le degré p du groupe de Galois est un diviseur de $1.2.3\ldots m$; le quotient est le degré d'*affect* de l'équation $F(x) = 0$; si ce degré est 1, l'équation est sans affect; telle est l'équation générale de degré m dans le corps formé par les fonctions rationnelles à coefficients entiers de ces coefficients, regardés comme des variables : le groupe de Galois est alors identique au groupe symétrique des racines. Le problème de la résolution de l'équation $F(x) = 0$ consistera à augmenter son affect par l'adjonction à Ω de quantités algébriques convenables. On reconnaît de suite que l'équation $F(x) = 0$ est réductible ou non, suivant que son groupe de Galois est transitif ou non, et le caractère nécessaire de la notion de transitivité apparaît ainsi clairement. De même, pour la notion de primitivité et d'imprimitivité relative à un groupe de substitutions : si l'on considère une équation *irréductible* $f(x) = 0$ à racines α, α_1, ..., α_{n-1} et dont le groupe de Galois est par conséquent transitif, l'existence d'un élément imprimitif Θ dans le corps $\Omega(\alpha)$, prenant seulement r valeurs quand on remplace α par α, α_1, ..., α_{n-1}, montre clairement la possibilité de séparer ces racines en $s = \frac{n}{r}$ suites de r éléments, telles qu'une substitution quelconque du groupe de Galois ne fasse jamais que permuter les éléments de l'une de ces suites, ou remplacer en bloc une suite par une autre; en d'autres termes, le groupe de Galois est imprimitif; et le corps imprimitif $\Omega(\alpha)$, du $n^{\text{ième}}$ degré, par l'adjonction à Ω du corps du $s^{\text{ième}}$ degré $\Omega' = \Omega(\Theta)$,

est ramené à un corps $\Omega'(\alpha)$ du $r^{\text{ième}}$ degré. Inversement, la primitivité ou l'imprimitivité du groupe de Galois permet de conclure à la primitivité ou à l'imprimitivité du corps $\Omega(\alpha)$.

Il est naturel maintenant d'étudier le rôle d'un sous-groupe ou diviseur du groupe de Galois. Désignons par

$$N = \Omega(\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$$

le corps de Galois d'une équation de degré n, par P le groupe de Galois de cette équation supposé de degré p, par $\pi = 1$, π_1, $\pi_2, \ldots, \pi_{p-1}$ les substitutions de ce groupe; soit enfin Q un sous-groupe de P, de degré q, c'est-à-dire contenant q substitutions; on pourra décomposer P en j suites de substitutions que l'on peut représenter symboliquement par

$$Q, \quad Q\pi_1, \quad Q\pi_2, \quad \ldots, \quad Q\pi_{j-1},$$

chaque substitution contenue dans $Q\pi_1$, par exemple, étant obtenue par la composition, avec π_1, d'une substitution de Q; $j = \frac{p}{q}$ est l'indice du diviseur Q par rapport à P. A chaque diviseur Q de P correspond une fonction rationnelle (dans Ω) de α, $\alpha_1, \ldots,$ α_{m-1} qui garde la même valeur quand on y effectue les substitutions de Q, et non quand on y effectue une autre substitution de P; cette fonction *appartient* au sous-groupe Q; inversement, chaque fonction rationnelle Ψ (dans Ω) de α, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ appartient à un diviseur déterminé Q de P; en y effectuant les substitutions contenues dans le symbole $Q\pi_1$, elle prend une autre valeur Ψ_1, la même pour toutes ces substitutions; de même aux substitutions $Q\pi_2, \ldots, Q\pi_{j-1}$ correspondent les valeurs $\Psi_2, \ldots,$ Ψ_{j-1}; le groupe de substitutions comprises dans P qui conservent à Ψ_1 sa valeur peut être représenté par le symbole $\pi_1^{-1}Q\pi_1$; les groupes

$$Q, \quad \pi_1^{-1}Q\pi_1, \quad \pi_2^{-1}Q\pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_{j-1}^{-1}Q\pi_j$$

sont des sous-groupes conjugués : les quantités $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_{j-1}$ sont des racines d'une équation irréductible dans Ω de degré j, et toute fonction rationnelle (dans Ω) de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, qui reste invariable par les substitutions du groupe Q, s'exprime rationnellement au moyen de Ψ : c'est le célèbre théorème de La-

grange; en adjoignant à Ω la fonction Ψ, le groupe du corps N se réduit à Q.

Si les différents groupes $\pi^{-1}Q\pi$, conjugués de Q, sont identiques, les quantités $\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{j-1}$ s'expriment rationnellement au moyen de l'une d'elles et $\Omega(\Psi)$ est un corps normal; Q est alors un diviseur normal (sous-groupe distingué ou invariant); si enfin Q n'est pas un diviseur normal, le plus grand commun diviseur des sous-groupes conjugués $\pi^{-1}Q\pi$, c'est-à-dire le groupe formé par les substitutions communes à ces groupes, est certainement normal. Un groupe normal, qui n'a pas d'autre diviseur normal que lui-même, est dit *simple*.

Si les groupes conjugués $\pi^{-1}Q\pi$ n'ont pas d'autre substitution commune que la substitution identique, le corps de Galois coïncide avec le corps $\Omega(\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{j-1})$, et l'équation, irréductible dans Ω, $\varphi(t) = 0$, dont les racines sont $\Psi, \Psi_1, \ldots, \Psi_{j-1}$, admet les mêmes résolvantes de Galois que l'équation proposée $F(x) = 0$; la résolution de l'équation $\varphi(t) = 0$ entraîne la résolution complète de l'équation $F(x) = 0$, dont l'équation $\varphi(t) = 0$ est une résolvante totale. Au contraire, si les sous-groupes conjugués $\pi^{-1}Q\pi$ ont un plus grand commun diviseur R de degré r, l'adjonction des racines de l'équation $\varphi(t) = 0$ au corps Ω permet seulement de décomposer en facteurs de degré r la résolvante de Galois de l'équation primitive, dont l'équation $\varphi(t) = 0$ est une résolvante partielle. On peut dire encore, en général, que le degré du groupe de Galois de l'équation $\varphi(t) = 0$ est égal à l'indice $\frac{p}{r}$ de R par rapport à P.

Le problème de la résolution d'une équation peut se poser maintenant comme il suit : adjoindre au corps Ω des quantités algébriques les plus simples, de façon à rendre possible la décomposition de la résolvante de Galois ou l'abaissement du groupe de Galois dans le nouveau corps, qui peut être représenté par $\Omega(\varepsilon)$, ε étant une racine d'une certaine équation irréductible dans Ω; si l'on désigne par $g(t) = 0$ la résolvante de Galois de l'équation proposée, par $g_1(t, \varepsilon)$ un facteur de $g(t)$, irréductible dans $\Omega(\varepsilon)$, et si les racines de l'équation $g_1(t, \varepsilon) = 0$ sont $\rho, \rho_1, \ldots, \rho_{q-1}$, les substitutions

$$(\rho, \rho), \quad (\rho, \rho_1), \quad \ldots, \quad (\rho, \rho_{q-1})$$

forment un sous-groupe Q, d'indice j par rapport au groupe de Galois P; si Ψ est une fonction qui appartienne au groupe Q, Ψ s'exprimera rationnellement au moyen de ε, et le corps $\Omega(\Psi)$ sera un diviseur de $\Omega(\varepsilon)$; le degré de $\Omega(\varepsilon)$ ou le degré de l'équation irréductible dans Ω que vérifie ε sera donc un multiple de j; si ce degré est égal à j, c'est que ε est une fonction rationnelle de Ψ, ou si l'on veut un élément du corps de Galois $\Omega(\rho)$, ou encore, suivant le langage de Kronecker, une irrationnalité naturelle de l'équation proposée.

Il reste à compléter, en se plaçant toujours au point de vue des diviseurs du groupe de Galois, les résultats déjà obtenus dans le cas où ce groupe est imprimitif. Supposons que l'équation proposée soit irréductible dans Ω, de degré n et que ses n racines puissent être disposées dans s lignes de r éléments, telles qu'une substitution du groupe de Galois permute les éléments d'une ligne, ou, en bloc, les éléments d'une ligne avec les éléments d'une autre ligne. Les substitutions qui ne font que permuter les éléments des lignes constituent un diviseur normal Q du groupe de Galois P; le groupe Q dont nous désignerons l'indice par j est d'ailleurs intransitif. Si Ψ est une fonction qui appartienne à Q, l'équation proposée, par l'adjonction de Ψ, peut se décomposer en s facteurs du $r^{\text{ième}}$ degré. Ψ est racine d'une résolvance partielle du $j^{\text{ième}}$ degré, qui est une équation normale. Dans le corps normal $\Omega(\Psi)$, les groupes de Galois des équations obtenues en égalant à zéro les s facteurs sont les mêmes; j est d'ailleurs un multiple de s. Inversement un groupe transitif ne peut avoir un diviseur normal intransitif (autre que la substitution identique) sans être imprimitif. Finalement, on arrive à la proposition suivante : une équation irréductible $f(x) = 0$, si elle devient réductible par l'adjonction d'une racine d'une équation normale du $j^{\text{ième}}$ degré, se décompose alors en facteurs irréductibles de même degré et de même groupe. Le nombre de ces facteurs est un diviseur de j, et, par conséquent, est égal à j, si j est premier.

Nous avons essayé de résumer fidèlement cette exposition de la théorie générale, en laissant toutefois de côté quelques propositions élémentaires de la théorie des substitutions (décomposition en transpositions, en cycles, groupe symétrique, groupe alterné, propriétés des groupes transitifs qui contiennent une transposi-

tion, un cycle de trois éléments, etc.), propositions qu'il faut bien placer quelque part, et dont les unes étaient immédiatement indispensables, tandis que les autres seront utilisées dans la suite. Nous résumerons plus brièvement les applications, quel qu'en soit l'intérêt.

M. Weber traite d'abord des équations générales du troisième et du quatrième degré, puis des équations abéliennes, dont la résolution se ramène à la résolution d'équations cycliques; la résolution d'une équation cyclique dépend de la résolution d'autres équations cycliques dont les degrés sont les facteurs premiers du degré de l'équation proposée. D'un autre côté, la résolvante de Lagrange permet de ramener la résolution des équations cycliques à la résolution des équations de la forme

$$x^n = A.$$

La belle théorie de la division du cercle, dont on ne saurait dire si elle est plus intéressante par les résultats qui lui sont propres, ou par le rôle essentiel qu'elle a joué dans la genèse de la théorie générale des équations algébriques, fait l'objet d'un Chapitre spécial : ce Chapitre se termine par quelques indications sur la théorie des nombres entiers (complexes) dans le corps $R(\alpha)$ formé par l'adjonction au corps des nombres rationnels proprement dits d'une racine de l'une des équations

$$x^2 + 1 = 0, \qquad x^2 + x + 1 = 0.$$

M. Weber traite ensuite de la résolution des équations par radicaux, ou, ce qui revient au même, au moyen d'une chaîne d'équations cycliques de degré premier. Il désigne sous le nom d'*équations métacycliques* les équations dont on peut ainsi obtenir la résolution complète. Pour qu'une équation soit métacyclique, il faut et il suffit, d'après la théorie générale, qu'il y ait une chaîne de groupes

$$P, P_1, P_2, \ldots,$$

tels que chacun soit un diviseur normal de celui qui le précède, le premier étant le groupe de Galois de l'équation, tandis que le dernier se réduit à la substitution identique. Étendant quelque peu le sens donné à ce mot par Kronecker, l'auteur désigne sous

le nom de *groupe métacyclique* tout groupe P permettant de déterminer une suite

$$P, P_1, P_2, \ldots, 1,$$

dans laquelle, comme tout à l'heure, chaque groupe est un diviseur normal de celui qui le précède, mais d'indice premier par rapport à lui. Une équation irréductible est métacyclique lorsque, par l'adjonction successive de racines d'équations cycliques, *une* de ses racines finit par devenir rationnelle.

Pour une équation générale de degré supérieur à 4, le groupe alterné est simple; il en résulte qu'une pareille équation ne peut être résolue par radicaux. Il convient de rapprocher de cette célèbre proposition, la suivante : Pour chaque degré premier, il y a une infinité d'équations à coefficients entiers qui n'ont pas d'affect. Le problème de la résolution par radicaux conduit à poser le problème de la résolution par radicaux réels et l'on reconnaît ainsi le caractère général de la circonstance qui se présente dans le cas irréductible de l'équation du troisième degré.

Les équations métacycliques de degré premier offrent un intérêt tout particulier : ici intervient la notion des groupes métacycliques dans le sens de Kronecker, groupes auxquels M. Weber donne le nom de *groupes linéaires*. Si x_z est une racine d'une équation de degré premier z, et si l'on convient de supposer

$$x_{z'} = x_z,$$

quand on a $z' \equiv z (\bmod n)$, l'ensemble des substitutions qui changent une racine x_z en une autre racine x_{az+b}, en désignant par a, b des entiers dont le premier n'est pas divisible par n, forment un groupe, c'est un groupe *linéaire*. Galois a montré que le groupe d'une équation métacyclique de degré premier est linéaire; inversement, toute équation irréductible de degré premier dont le groupe est linéaire est une équation métacyclique. Si l'on suppose, dans la définition du groupe linéaire, que a ne puisse prendre que les valeurs qui soient des restes quadratiques de n, on obtient, au lieu du groupe linéaire, le groupe mi-métacyclique de Kronecker. Une intéressante application de cette théorie, que nous ne pouvons qu'indiquer, est faite aux équations du cinquième degré.

Les lois si simples relatives aux équations métacycliques de degré premier permettent d'aborder le problème de la formation de toutes les équations métacycliques de degré premier donné, et la construction de leurs racines. On sait que Kronecker a entièrement résolu ce problème, qu'Abel avait posé et sur lequel il avait laissé quelques indications. M. Weber en reprend l'étude, par un procédé très intéressant, qu'il avait fait connaître récemment dans les *Sitzungsberichte* de la Société pour le développement des Sciences naturelles, de Marburg.

C'est ici que se termine le premier Volume de l'Algèbre de M. Weber; d'après l'annonce placée sur la couverture, le second Volume contiendra la théorie générale des groupes finis et son application à divers problèmes particuliers; il se terminera par la théorie des nombres algébriques. J. T.

PIETRO RICCARDI. — SAGGIO DI UNA BIBLIOGRAFIA EUCLIDEA. Gr. in-4°, Bologna, Gamberini et Parmegiani; 1887-1893.

Le patient et savant auteur de la *Bibliographie galiléenne* a réuni, sous le titre qui précède, trois importants Mémoires insérés dans le *Recueil de l'Académie de Bologne* (1887, 1888 et 1893), et dont l'objet est de présenter la série chronologique et le classement méthodique des éditions, traductions, imitations et paraphrases d'Euclide, ainsi que des divers travaux imprimés concernant le vieux géomètre grec. De 1482 à 1890, M. Riccardi a bien noté quinze cents volumes, et il ne se vante pas d'être complet. Quel bibliographe véritable peut avoir cette prétention? Il n'en est pas moins certain que son œuvre est des plus utiles; que si son premier Mémoire présentait des lacunes sensibles, elles sont largement comblées dans les suivants; qu'enfin les recherches entreprises ou provoquées par M. Riccardi ont abouti à l'éclaircissement de nombre de questions obscures et au redressement d'erreurs multiples.

Toutefois, l'œuvre n'est pas dès maintenant achevée, et elle offre encore aux chercheurs bien des problèmes à résoudre.

La bibliographie du XVIe siècle et celle du commencement du

XVII[e] est en effet un véritable chaos, par suite des habitudes de la librairie d'alors. Pour écouler les stocks et pour profiter des célèbres foires de Francfort, où se traitaient les affaires pour les Ouvrages neufs, on rajeunissait les vieilles éditions en refaisant les feuillets de titre avec une autre date, souvent même avec un autre nom de libraire ou même un autre nom de ville, à la suite d'arrangements réciproques. Dans ces conditions, on n'est pour ainsi dire jamais sûr que telle indication bibliographique soit inexacte; d'un autre côté, comme il n'est pas aisé de confronter les exemplaires appartenant à des bibliothèques différentes, il est souvent difficile d'affirmer l'identité réelle de deux éditions présentant des dates différentes, avec une même composition typographique.

Je prends pour exemple le volume in-folio : *Textus de Sphœra Iohannis de Sacrobosco cum additione, etc. et Geometria Euclidis Megarensis* (en réalité, il s'agit de la Géométrie de Boèce). M. Riccardi en cite une édition de Paris, 1500 (*Per impressorem Wolfgangum Hopylium*), une à Venise (*Serra*), 1501, d'autres à Paris, chez Henri Estienne, 1507, 1511, 1516, 1519, chez Simon Colinœus, 1521, 1531, 1532, 1534, d'autres enfin à Venise, 1527, 1531, 1559. Dans le précieux *Répertoire des Ouvrages pédagogiques du* XVI[e] *siècle,* Paris, 1886, que M. Riccardi n'a pas utilisé, les éditions sont en partie sous le titre complet, en partie seulement sous la rubrique *Sphera*, parce que le dépouillement n'a pas été correctement fait; je relève en outre une édition à Paris, chez Simon Colinœus, de 1538, plus six autres in-folio douteuses, Paris, 1494, 1498, 1534 (R. Calderius); Venise, 1508 (Rubœus), 1518 (Giunta); Leipzig, 1509. (Il y a de fait une autre édition in-folio de la sphère de Sacrobosco, à Paris, chez J. Petit, 1508 et 1515, bien distincte de la précédente, en ce qu'elle ne contient pas la Géométrie de Boèce, mais le commentaire de Ciruelo et les questions de Pierre d'Ailly.)

On voit, pour la bibliographie de ce seul Volume, combien il y aurait encore de recherches à faire, si l'on voulait reconnaître le nombre d'éditions réellement distinctes.

Or, s'il ne s'agissait que de la reproduction du texte de Sacrobosco ou de Boèce, l'intérêt de la question serait minime; mais ces textes sont accompagnés de commentaires du XVI[e] siècle (en

particulier de Lefèvre d'Étaples), et il serait utile, au point de vue historique, d'en apprécier la valeur.

Mais on se trouve dans un cercle vicieux, puisque pour pouvoir faire, sans trop de perte de temps, des recherches fructueuses sur un sujet de ce genre, il faudrait une bonne bibliographie et que celle-ci fait défaut.

Or, il en sera toujours ainsi tant qu'on n'entreprendra pas de bibliographies par siècles ou autres périodes déterminées, et que pour les premières de ces périodes on ne s'appuiera pas sur des descriptions exactes et complètes d'exemplaires avec indication de la bibliothèque où ils se trouvent. Les modèles, donnés par le prince Boncompagni dans son *Bullettino*, devraient d'ailleurs être adoptés, car la minutie des détails dans lesquels ils entrent, inutile à la vérité pour les temps modernes, est essentielle pour les premiers âges de la librairie.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici un autre desideratum ; il y aurait lieu, en France comme en Italie, de suivre rigoureusement la règle ordinairement suivie maintenant en Allemagne, de ne pas changer, d'après les habitudes de la langue où l'on écrit, les prénoms des auteurs pas plus que leurs noms. Les Italiens peuvent nous reprocher de dire Galilée et Bonaventure Cavalieri, par exemple, mais il est aussi choquant pour nous de lire dans un index Pietro Fermat ou Pietro Ramus (¹). Au moins M. Riccardi n'a-t-il pas été jusqu'à supprimer les H initiales, comme on l'a fait parfois en Italie, ce qui enlève précisément toute utilité aux index pour les pays étrangers.

PAUL TANNERY.

WOLDEMAR WOIGT. — KOMPENDIUM DER THEORETISCHEN PHYSIK, in zwei Bänden. Erster Band : *Mechanik starrer und nichtstarrer Körper. — Wärmelehre* (Compendium de Physique théorique, en deux volumes. Premier volume : *Mécanique des corps solides ou non. Théorie de la chaleur*). Leipzig, Veit et Cie, in-8°, x-610 p.; 1895.

M. Woldemar Woigt, professeur de Physique mathématique à

(¹) Il serait même convenable de conserver les formes latines pour les auteurs qui ont écrit en latin, en imprimant leurs noms en italique, par exemple, pour les distinguer.

l'Université de Gœttingue, s'est proposé de réunir, dans le court espace de deux volumes, les théories les mieux acquises de la Physique mathématique. La première, la plus grave difficulté d'un pareil projet, c'est évidemment de trouver une règle précise, qui permette de choisir entre les innombrables recherches dont la Physique mathématique fait l'objet, celles qui doivent être exposées et celles, beaucoup plus nombreuses, qui doivent être passées sous silence. M. Woigt s'est arrêté à la règle suivante : laisser de côté tous les problèmes spéciaux et, en particulier, tous ceux qui ont un intérêt purement mathématique, pour ne traiter que les problèmes qui ont un intérêt général au point de vue de la Physique.

Cette règle, sévèrement appliquée, élague un nombre considérable de questions qui, assurément, ne sont pas dépourvues d'intérêt, mais qui, en somme, ne sont pas, pour le physicien, de première utilité; on ne peut que la trouver très sage.

Peut-être certains lecteurs s'étonneront-ils de voir, dans ce *Compendium*, l'étude des corps cristallisés tenir, dans la plupart des questions, le premier rang et les propriétés des corps isotropes se présenter comme des cas particuliers. A coup sûr, nul ne contestera que la stricte logique ne donne raison à M. Woigt. Mais, d'autre part, on rappellera que l'ouvrage a, avant tout, un but pratique; qu'il est destiné à fournir au physicien les éléments théoriques qui lui servent constamment, et que, sauf en Optique, le physicien a plus souvent affaire aux corps isotropes qu'aux corps cristallisés. Sera-t-il permis de faire observer à ces esprits chagrins, s'il en est, que l'appréciation du degré d'importance d'un problème est chose subjective; que l'opinion d'un physicien peut, sur ce point, différer de l'opinion d'un autre; qu'elle s'inspirera, en général, des recherches qui ont surtout occupé ce physicien, des questions qui l'ont particulièrement passionné; que M. Woigt, dont la vie a été consacrée aux études les plus minutieuses et les plus difficiles de physique cristalline, a bien le droit de professer, touchant l'importance des problèmes concernant les corps cristallisés, des idées différentes de celles qui sont communément acceptées.

D'ailleurs, si le physicien, qui demande seulement un traité de

Physique théorique le plus court et le plus condensé possible, se plaignait de la place un peu large occupée dans le *Compendium* par les équations relatives aux corps cristallisés, il serait bientôt contredit par l'homme de science, qui s'intéresse surtout aux idées de l'auteur, et qui est heureux de trouver, dans ce livre, un résumé succinct de travaux publiés par M. Woigt dans des recueils souvent difficiles à consulter. Il nous est arrivé, autrefois, de donner une théorie de la pyro et de la piézo-électricité, dont les principaux résultats avaient été trouvés, depuis plusieurs années, par le professeur de Gœttingue; ce plagiat involontaire nous eût été épargné par le *Compendium*, où la théorie des phénomènes pyro-électriques est développée à titre d'exemple de la notion de potentiel.

Parmi les Chapitres consacrés aux corps cristallisés, il en est un qui nous semble particulièrement utile et conforme au but pratique du livre : c'est celui où l'auteur examine la symétrie des divers systèmes cristallins et montre quelle réduction les éléments de symétrie propres à chaque système apportent au nombre des coefficients indépendants des diverses formes de fonctions que l'on peut avoir à traiter en Physique. Tous ceux qui se sont occupés de physique cristalline savent combien les erreurs se glissent aisément dans les réductions de ce genre; ils seront heureux d'en trouver ici les résultats établis d'avance par des méthodes sûres.

M. Woigt ayant eu surtout pour but d'exposer les théorèmes généraux et les équations fondamentales de la Physique mathématique, on ne trouve guère, dans son *Compendium*, de discussion touchant les principes physiques des théories ou les hypothèses sur lesquelles elles reposent; on y lit, par exemple, d'une part, la théorie de l'élasticité fondée sur l'attraction moléculaire, d'autre part, la théorie qui regarde les tensions comme de simples forces de liaisons; mais, nulle part, on ne trouve les raisons qui militent pour ou contre l'adoption de l'une ou de l'autre théorie; de même, la tension superficielle est introduite dans l'étude de la capillarité sans aucun examen des hypothèses qui ont conduit à la considérer; sans doute, le lecteur comprendra qu'un *Compendium* ne saurait accorder une large place à des discussions presque philoso-

phiques; toutefois, le physicien regrettera parfois de ne pas trouver, dans le livre dont nous rendons compte, au moins une esquisse de certaines de ces discussions.

Peut-être regrettera-t-il aussi que certaines parties du livre aient une tournure trop générale et trop abstraite; il éprouvera surtout ce sentiment en étudiant les applications de la Thermodynamique; sans doute, les théorèmes généraux de Gibbs sur les systèmes formés de p composants distribués en n phases mettent, dans beaucoup de questions de Chimie, un ordre admirable; cependant, une étude complète du passage de l'état liquide à l'état gazeux, ou de la dissociation dans un système qui renferme des gaz parfaits, intéresserait peut-être davantage un plus grand nombre de lecteurs.

Ces légères critiques ne doivent pas étonner, ni tromper sur notre pensée; il serait bien étrange qu'un physicien soit, pendant six cents pages, toujours d'accord avec un autre; mais nous avons pensé qu'en montrant le peu que nous trouvions à reprendre dans le livre de M. Woigt et le caractère tout subjectif des quelques reproches que nous nous sommes permis de formuler, nous marquerions, mieux que par de longs éloges, toute l'estime que nous avons pour cet Ouvrage et toute l'utilité que nous lui attribuons.

A ces quelques remarques joignons seulement la liste des Chapitres traités dans ce premier Volume :

Introduction. — Lois physiques et constantes, unités et dimensions.

PREMIÈRE PARTIE. — *Mécanique des corps solides.*

Chapitre I. — Mouvement d'un point matériel.

Chapitre II. — Mouvement d'un système de points matériels (ce Chapitre contient la théorie cinétique des gaz).

Chapitre III. — Mouvement des corps solides (ce Chapitre contient la théorie des systèmes cycliques et la théorie électrodynamique de Maxwell, la théorie moléculaire de l'élasticité, l'étude de la symétrie cristalline).

Chapitre IV. — Les fonctions potentielles (ce Chapitre contient la théorie moléculaire de la pyro et de la piézo-électricité).

DEUXIÈME PARTIE. — *Mécanique des corps non solides.*

Chapitre I. — Équations fondamentales de l'équilibre et du mouvement des corps non solides.

Chapitre II. — Hydrostatique (ce Chapitre contient la théorie de la capillarité et la théorie de l'équilibre électrique sur les corps conducteurs).

Chapitre III. — Dynamique des fluides parfaits (ce Chapitre renferme la théorie de la conductibilité calorifique et élastique).

Chapitre IV. — Élasticité et acoustique.

Chapitre V. — Frottement interne et *elastische Nachwirkung.*

TROISIÈME PARTIE. — *Théorie de la chaleur.*

Chapitre I. — Transformations thermomécaniques.

Chapitre II. — Transformations thermochimiques.

P. DUHEM.

LA GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE D'AUGUSTE COMTE. Nouvelle édition précédée de la *Géométrie de Descartes.* 1 vol. in-8°, 112-598 p., 3 pl. Paris, Louis Bahl; Rio de Janeiro, F. Briguiet, 1894.

La Géométrie analytique d'Auguste Comte, parue en 1843, était devenue excessivement rare. Les adeptes du Positivisme, répandus sous des latitudes très diverses, accueilleront sans doute avec faveur cette œuvre de leur Maître, à laquelle il semble avoir attaché quelque prix : cette réédition excitera ailleurs une curiosité qui ne peut guère manquer d'en assurer le succès. J. T.

MÉLANGES.

RÉPONSE AUX REMARQUES DE M. CANTOR (¹);

PAR M. H.-G. ZEUTHEN.

J'accepte volontiers la traduction donnée par M. *Cantor* des paroles que j'avais citées en allemand, et les explications suivantes de M. Cantor me montrent que, dans la mienne, je m'étais rendu coupable d'un malentendu. J'avais trop fixé mon attention sur ce qui est toujours pour moi l'*essentiel* dans la phrase de M. Cantor, savoir les rapports présumés des quatre premiers Livres d'Apollonius avec les lecteurs qui ne voulaient savoir que le strict nécessaire pour résoudre le problème Délique. Le renvoi de ces lecteurs aux coniques d'Apollonius, et la supposition qu'un tel lecteur arrivât au bout du Livre IV, caractérisent selon moi assez mal le riche continu de ces livres pour me permettre de dire encore que les remarques de M. Cantor en *voilent* les plus grandes beautés. Qu'on se rappelle que le mot souligné, opposé à la prétention de donner le contenu *nu* (*nackte Inhalt*), n'était qu'une réplique à une remarque dont l'adresse n'était pas douteuse pour moi.

Si j'ai cru qu'il ne fallait pas négliger entièrement mes explications de la Géométrie supérieure des anciens et mes contributions à en faire voir la portée, les hypothèses que j'y ai fondées ne sont nullement mes seuls motifs de cet espoir. Je fais ici cette remarque parce que, à côté de sa correction de ma traduction, M. Cantor s'occupe exclusivement de deux de ces hypothèses. Il y oppose quelques faits historiques, auxquels je crois avoir eu tous les égards possibles en formant ces hypothèses (²).

Quant à la dernière de ces hypothèses, celle que M. Cantor appelle la grande pièce de résistance de mes *Coniques dans l'antiquité*, je n'ai pas parlé, dans mon précédent article, de ma resti-

---

(¹) *Voir Bulletin*, t. XIX, p. 64 et suiv.

(²) Je n'oublierai jamais ce que je dois à cet égard à l'éminent historien des Mathematiques qui est à présent mon adversaire : j'ai toujours eu recours à ses *Leçons* pour éviter d'oublier les égards historiques dans mes explications mathématiques.

tution des lieux à trois et à quatre droites. C'est Apollonius qu caractérise la portée de son troisième Livre en parlant de ces pro blèmes. En remarquant, de mon côté, que les trois derniers théo rèmes de ce Livre contiennent de fait la démonstration qu'un conique quelconque est un *lieu à trois droites,* je rappelle seule ment *un fait,* que, du reste, j'aurais pu mentionner d'une manièr plus précise : ce sont les *démonstrations* de ces théorèmes qu contiennent cette propriété d'une conique quelconque. On l trouve *de fait,* mais non pas énoncée formellement, dans l'édi tion Heiberg, t. I, p. 442, ligne 10; p. 446, l. 2-3; p. 448, l. 24-25

Ma restitution du *lieu à quatre droites* contient trop de détail pour que je puisse émettre la prétention d'y avoir surmonté toute les difficultés de la manière la plus plausible. J'attends donc ave M. Cantor, et peut-être plus impatiemment que le célèbre histo rien, que d'autres connaisseurs de la Géométrie ancienne s'oc cupent de la même question.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JORDAN (C.). — COURS D'ANALYSE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE; 2e édition. **Tome II** : *Calcul intégral*. 1 vol. in-8°, XVIII-627 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1894.

Nous avons dit récemment (¹) dans quel sens M. C. Jordan avait, en publiant la seconde édition de son *Cours d'Analyse*, modifié l'exposition des principes; le *Calcul intégral* est naturellement modifié dans le même sens, et l'auteur a mis tous ses soins à préciser les concepts et les énoncés, en leur laissant toute la généralité ou toute la largeur possibles : il suffira de signaler, dans cet ordre d'idées, la façon nouvelle dont l'auteur a présenté la notion d'intégrale définie simple ou multiple, dans le cas des limites finies ou infinies, les conditions sous lesquelles on peut intégrer ou différencier sous le signe $\int$, modifier l'ordre des intégrations, etc.

La théorie du potentiel a été augmentée des propriétés fondamentales des fonctions harmoniques qui se déduisent immédiatement du théorème de Green. Le principe de Dirichlet est établi dans le cas simple où la surface limite est une sphère. On notera, dans le Chapitre relatif aux séries de Fourier, l'extension que l'auteur donne au *second théorème de la moyenne*, et encore, dans le Chapitre sur les intégrales complexes, diverses additions intéressantes, qui concernent notamment le cas où les extrémités du chemin d'intégration sont des points critiques, et le théorème relatif à l'existence de n racines infiniment petites de l'équation en z

$$f(z, u, v, w, \ldots) = 0,$$

dont le premier membre est une fonction analytique régulière pour $z = 0$, $u = 0$, $v = 0$, ..., telle que

$$f(z, 0, 0, 0, \ldots)$$

(¹) *Bulletin*, t. XVII, p. 149.

contienne z^n en facteur. On remarquera aussi, dans ce même Chapitre, une tendance plus accentuée à attribuer un rôle important aux séries entières dans la constitution de l'idée de fonction d'une variable complexe. Mais la modification la plus profonde de l'Ouvrage concerne la théorie des fonctions elliptiques et celle des fonctions abéliennes. Avec un art qu'on ne peut manquer d'admirer, M. C. Jordan est parvenu à exposer en deux cents pages les points les plus essentiels de la théorie des fonctions elliptiques. Nous croyons utile de résumer rapidement l'ordre qu'il a adopté : le lecteur sera ainsi renseigné sur la richesse et la variété des sujets qu'a traités M. Jordan.

Quelques pages sont d'abord consacrées à la notion de période (périodes primitives, réseau des périodes, impossibilité d'une fonction analytique uniforme ayant plus de deux périodes, etc.), puis à la décomposition en substitutions élémentaires d'une substitution linéaire à coefficients entiers. L'auteur introduit ensuite la notion de ce qu'il appelle le *triangle principal :* si $2\Omega_1$, $2\Omega_2$, $2\Omega_3$ sont trois périodes primitives liées par la relation

$$2\Omega_1 + 2\Omega_2 + 2\Omega_3 = 0;$$

si l'on considère un triangle MNP dont les côtés, parcourus dans un sens convenable, représentent respectivement ces périodes, ce triangle sera dit *principal* s'il n'a pas d'angle obtus. Le triangle symétrique de MNP par rapport à l'un des sommets représente, de la même façon, les trois périodes primitives $-2\Omega_1$, $-2\Omega_2$, $-2\Omega_3$; c'est encore un triangle principal; il n'y a que ces deux triangles qui soient principaux si les trois angles sont aigus; si l'un d'eux est droit, il y a deux autres triangles principaux; l'importance du triangle principal consiste en ce qu'il fournit les périodes primitives de module minimum et, par suite aussi, le moyen de choisir les deux périodes primitives, génératrices du réseau, de façon que, dans leur rapport, le coefficient de i soit le plus grand possible.

Après avoir établi les théorèmes généraux sur les fonctions doublement périodiques, l'auteur introduit, comme M. Weierstrass, les fonctions σu, ζu, pu dont il développe les propriétés élémentaires.

Partant ensuite de l'équation différentielle

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

où l'on suppose g_2, g_3 donnés de façon que le second membre ait ses trois racines e_1, e_2, e_3 inégales, il établit qu'elle est vérifiée par une fonction méromorphe de u, en admettant les propositions de la théorie des équations différentielles dont il a besoin; il est ensuite aisé, comme on sait, de démontrer que cette fonction est doublement périodique et d'établir les propriétés relatives aux pôles; mais l'intérêt de la démonstration de M. Jordan consiste à montrer d'une façon très simple comment les trois périodes auxquelles il est conduit forment un *triangle principal* et comment le coefficient de i, dans le rapport des deux premières, est positif. Il étudie dans le même ordre d'idées le cas où les trois racines e_1, e_2, e_3 sont réelles et celui où, l'une étant réelle, les deux autres sont imaginaires conjuguées, puis les cas particuliers où le triangle principal est isoscèle et rectangle, ou équilatéral.

Après avoir exposé les divers moyens de représenter une fonction elliptique qui admet les mêmes périodes que pu, il établit les propriétés fondamentales relatives à l'addition et à la multiplication. Un paragraphe intéressant traite de la détermination des quantités

$$U_\alpha = e^{-\frac{\eta_\alpha \omega_\alpha}{2}} \sigma\omega_\alpha,$$

et, en particulier, de celles de ces quantités qui correspondent aux périodes principales. Il passe ensuite à l'étude des cofonctions et de leurs quotients, et, en particulier, des fonctions classiques $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$, $\operatorname{dn} u$, puis à l'étude des fonctions ϑ, introduites *a priori;* il insiste sur le moyen pratique d'exécuter les calculs relatifs aux fonctions elliptiques. Il traite des fonctions de seconde et de troisième espèce, des développements en séries trigonométriques, des dérivées prises par rapport aux périodes et aux invariants g_2, g_3; l'étude de la fonction $J(\tau)$ fournit un exemple bien net de fonction modulaire; M. Jordan étudie aussi l'effet des sub-

stitutions élémentaires sur les produits

$$\varphi_1(\tau) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1+q^{2n}),$$

$$\varphi_2(\tau) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1-q^{2n-1}),$$

$$\varphi_3(\tau) = e^{-\frac{\pi i}{8}} q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{n=\infty} (1+q^{2n-1}).$$

La division est traitée avec détails pour la fonction pu. L'auteur montre comment le problème dépend de la division des périodes; il développe les réductions successives de ce dernier problème, et montre enfin comment sa résolution dépend de la résolution des équations modulaires. Abordant ensuite le problème de la transformation, il traite, toujours pour la fonction pu, de la transformation du second ordre et de la transformation d'ordre impair et montre, en particulier, d'après M. Kiepers, comment le produit

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=\frac{n-1}{2}} p'^2 \frac{2\mu\omega_1}{n},$$

lorsque n est premier à 3, est le cube d'une fonction rationnelle et symétrique de

$$p\frac{2\omega_1}{n}, \quad p\frac{4\omega_1}{n}, \quad p\frac{(n-1)\omega_1}{n},$$

et développe les conséquences de cette proposition pour la formation des équations modulaires. Il consacre quelques pages à la *multiplication complexe* et termine cet important Chapitre en traitant de l'intégration des différentielles abéliennes de genre 1; il donne à ce propos quelques développements sur la méthode de M. Bruns pour l'intégration des différentielles elliptiques

$$R(x, \sqrt{X})\, dx,$$

où X est un polynome du quatrième degré, sur l'intégration de l'équation d'Euler, et les polygones de Poncelet.

Le Chapitre sur les intégrales abéliennes ne figurait pas dans la première édition.

L'auteur part d'une relation algébrique irréductible préparée au moyen de transformations birationnelles ou homographiques de manière à en simplifier le plus possible les singularités : il introduit le système de coupures canoniques que M. Lüroth a appris à former. Il expose ensuite la conception de la surface de Riemann et les propositions essentielles relatives à la connexité, aux systèmes de coupures, aux lignes *équivalentes;* définit les *intégrales abéliennes* et leurs périodes (premières et deuxièmes périodes cycliques, et périodes polaires), démontre le théorème d'Abel, traite de la réduction des intégrales abéliennes et enfin du problème de l'inversion.

En résumé, cette seconde édition constitue à bien des égards un Livre nouveau, et c'est ce qu'il importe de faire savoir au lecteur. Quant au mérite de ce Livre, aux services qu'il ne peut manquer de rendre tant aux étudiants qu'à leurs maîtres, le nom de l'auteur nous dispense assurément d'en rien dire. J. T.

MÉLANGES.

NOTICE SUR CAYLEY (1);

PAR M. BRIOSCHI.

J'ai le pénible devoir d'annoncer à l'Académie la perte de son illustre Associé étranger, Arthur Cayley; je crois être l'interprète des sentiments de l'Assemblée et de tous ceux qui cultivent les Sciences mathématiques, en adjoignant cette Notice sur la vie et les œuvres du grand mathématicien anglais.

Arthur Cayley naquit le 16 août 1821 à Richmond, dans le comté de Surrey. Son père était associé dans la maison de com-

---

(1) Extrait des *Atti della reale Academia dei Lincei.*

merce Thornton, Melville et Cayley, commerçants à Petersbourg. Arthur eut deux frères, l'un mort en bas âge, l'autre très versé dans la littérature italienne et traducteur de Dante.

En l'année 1829, la famille Cayley abandonna la Russie et élut domicile à Blackheath, près Londres. Là, Arthur commença ses études dans une école privée, puis fut envoyé, à l'âge de quatorze ans, au *King's College* de Londres pour les continuer. Le directeur du collège remarqua bien vite les aptitudes extraordinaires du nouvel élève pour les études mathématiques, et conseilla à son père de lui faire abandonner la carrière du commerce pour suivre les cours de l'Université de Cambridge; le conseil fut aussitôt suivi, et Arthur fut admis extraordinairement au *Trinity College* à l'âge de dix-sept ans. Il en sortit en 1842, après avoir obtenu les grades les plus élevés dans les études classiques et mathématiques. Un de ses biographes mentionne que Cayley ne brilla pas parmi les jeunes gens les plus habiles en gymnastique; il fut pourtant, durant de longues années, l'un des membres les plus actifs du Club alpin.

Les brillants succès de Cayley lui valurent le rare honneur d'être élu *fellow* au *Trinity College,* en cette même année 1842; mais il ne put occuper cette position que pendant quelques années, car il ne voulut pas entrer dans les ordres sacrés. Une nécessité impérieuse obligea alors Cayley à choisir une carrière plus rémunératrice que celle des Mathématiques; et, en effet, après avoir rapidement obtenu le titre de *master,* il entra dans l'étude de Me Cristie, notaire à Londres. On raconte qu'en postulant sa charge, Cayley ne souffla pas mot de sa brillante carrière universitaire; aussi Me Cristie fut-il profondément étonné quand il connut la véritable situation du candidat. Cayley devint bientôt l'élève favori de l'étude Cristie, et vit enfin sa position financière solidement établie. Il resta dans cette étude pendant quatorze ans, de 1849 à 1863; et il n'est pas superflu de remarquer que la partie de l'œuvre scientifique de Cayley, conçue dans cette période, suffirait seule à rendre son nom impérissable.

En l'année 1863, une femme intelligente et généreuse, lady Sadler, laissa en mourant une certaine somme pour fonder, à l'Université de Cambridge, une chaire, dont le titulaire devait enseigner les Mathématiques pures et appliquées et contribuer

aux progrès de cette Science. L'Université s'empressa d'offrir cette chaire à Cayley, qui n'hésita pas à abandonner la position plus lucrative qu'il avait à Londres pour se consacrer complètement aux Mathématiques. Il se maria en 1863 et vint habiter, à Cambridge, une maison modeste, mais agréable; quelques-uns d'entre nous l'y visitèrent et reçurent l'accueil le plus cordial.

Il mourut le 26 du mois de juin, après avoir souffert quelque temps d'une maladie de vessie, laissant une veuve et deux fils qui l'avaient constamment entouré de leur affection. Les plus grandes institutions scientifiques anglaises se firent représenter à ses obsèques par leurs maîtres les plus éminents.

Le mot de prédilection de Cayley : *Potius esse quam videri,* donne une juste idée de ses qualités morales; mais, pour juger de ses rapports avec les autres géomètres, on ne peut donner de meilleur témoignage que les paroles prononcées par M. Hermite à l'Académie des Sciences, pendant la séance du 4 février :

« J'ai eu une part dans quelques-unes des recherches de Cayley; les mêmes questions nous avaient rapprochés au commencement de notre carrière, et le souvenir me restera à jamais de sa bonté, de sa grande simplicité, de son entier dévouement à la Science. Je joins ce souvenir, qui m'est bien cher, à mes douloureux regrets, à l'hommage que j'adresse à sa mémoire. »

L'œuvre scientifique de Cayley est si prodigieuse, si vaste, qu'il est difficile de la résumer. Elle se compose de 800 Mémoires et d'un Livre sur la *Théorie des fonctions elliptiques*. Les *Collected mathematical Papers,* le plus digne monument que le Conseil de l'Université de Cambridge puisse élever à la mémoire de l'illustre géomètre, se composent déjà de sept Volumes, et cinq nouveaux Volumes seront encore nécessaires pour rassembler tous les écrits de Cayley.

Bien que Cayley soit revenu souvent sur ses pas pour traiter les mêmes questions, il n'y a pas de différences dans la méthode et la forme de ses divers écrits, et les résultats obtenus par cette méthode et cette forme si personnelles en démontrent la singulière puissance. Il est donc nécessaire de faire une classification avant de procéder à l'examen des différents travaux.

La classification la plus commode me paraît être la suivante : Mémoires se rapportant : 1° à la théorie des formes; 2° à la théorie des fonctions elliptiques et hyperelliptiques; 3° aux recherches géométriques; 4° à la Mécanique rationnelle.

Quelques petits travaux d'analyse sur les intégrales définies et l'intégration des équations échappent à cette classification; mais leur importance n'est pas comparable à celle des travaux compris dans les quatre classes établies plus haut.

La première classe s'étend à tous les travaux de Cayley sur les déterminants, sur les transformations linéaires, sur les hyperdéterminants et, en général, sur toutes les questions réunies sous le titre : *Théorie des formes*. Le premier travail de Cayley est de l'année 1841, il était encore élève au *Trinity College*. Le titre, *Sur un théorème de Géométrie de position*, est géométrique, mais le théorème est relatif à la multiplication des déterminants, et la recherche géométrique de la relation entre les distances de cinq points dans l'espace est une application de ce théorème. On voit déjà apparaître dans ce travail de jeunesse la forme élégante et symétrique qui est le caractère prédominant de toutes les œuvres de Cayley.

La théorie des déterminants occupa à plusieurs reprises l'esprit de Cayley; il fit, le premier, connaître les propriétés de cette classe de déterminants, à laquelle il donna le nom de *déterminants gauches* et *symétriques gauches*, et il appliqua avec beaucoup de succès ces propriétés au problème de la transformation d'une forme quadratique en elle-même par des substitutions linéaires.

Les deux Mémoires des années 1845 et 1846, portant le titre *Sur la théorie des substitutions linéaires*, publiés d'abord dans le *Journal de Mathématiques*, de Cambridge, et reproduits dans le *Journal de Crelle*, sous le titre : *Mémoire sur les hyperdéterminants*, renferment les principes de ces recherches sur les propriétés invariantes de certaines fonctions algébriques qui ont tant agrandi le domaine de l'Algèbre et qui firent écrire au professeur Salmon : « C'est dans cette découverte de Cayley que se trouve l'origine de la nouvelle Algèbre. »

Quand Salmon exprimait ce jugement si conforme à la vérité, on n'avait pas encore étendu le concept d'invariance à d'autres

branches de l'Analyse; nous pouvons dire aujourd'hui que presque tous les progrès faits en Analyse dans la seconde moitié de ce siècle sont dus à l'extension donnée à ce concept.

Dans ces deux Mémoires, Cayley rappelle que Boole avait déjà reconnu l'invariance du discriminant et avait calculé, pour la première fois, l'invariant cubique d'une forme biquadratique; et que, en outre, Hesse avait établi certaines propriétés invariantes de la forme cubique ternaire.

La théorie des hyperdéterminants attira à plusieurs reprises l'attention de Cayley; mais c'est plus spécialement en l'année 1854 que, par ses œuvres et celles d'autres géomètres, la théorie des formes acquit le caractère d'une discipline spéciale.

Cayley adopta les dénominations de *covariants* et d'*invariants* introduits en Algèbre par Sylvester, établit pour la première fois, en 1854, les équations différentielles qui doivent vérifier ces formes algébriques, et commença, en cette même année, cette série de Mémoires ayant pour titre commun : *Sur les quantiques,* qui constituent à eux seuls un véritable Traité de la question.

La part qui appartient aux deux éminents géomètres Sylvester et Hermite, dans la création d'une théorie si féconde, et les travaux contemporains de Salmon et d'Aronhold, et les contributions des autres géomètres, sont exposés avec beaucoup de soin et d'érudition dans une publication récente; il serait trop long de revenir sur ce thème. Il me paraît utile d'ajouter une seule observation : les travaux de Cayley et de Sylvester pendant cette période portent les traces des nombreuses communications verbales que se firent les deux jeunes mathématiciens, résidant l'un et l'autre à Londres; aussi est-il malaisé de reconnaître, dans chaque cas, celui des deux qui a eu la première inspiration. Les découvertes de la loi de réciprocité, de l'invariant du dixième ordre des quantiques, du criterium relatif aux racines réelles et imaginaires, déterminé par les invariants, et des covariants associés, sont dues intégralement à Hermite.

La théorie fondée, son application aux différents problèmes d'Algèbre ne se fit pas attendre. Le problème de l'élimination, celui des fonctions symétriques, des fonctions de Sturm, et, enfin, le problème plus important de la transformation des

équations attirèrent vite l'attention de Cayley et des autres géomètres.

Ce fut en 1858 qu'Hermite fit connaître la formule générale de transformation des équations algébriques, par laquelle les coefficients de l'équation transformée résultent des invariants de l'équation primitive. Cayley, adoptant cette formule, l'appliqua avec le plus grand succès aux équations d'ordre trois, quatre et cinq, d'abord dans quatre Mémoires ayant pour titre : *Sur la transformation de Tschirnausen*, puis dans un autre : *Sur la transformation de Jerrard*.

Le problème de la détermination du nombre des invariants et des covariants indépendants fut l'objet de longues méditations de la part de Cayley, et, bien qu'il n'ait pas réussi à le résoudre dans toute sa généralité, ses recherches *Sur la répartition des nombres* ont une grande valeur. Ce problème lui tenait tellement au cœur que, lorsque Gordan eut démontré que le nombre de ces invariants était fini et les eut calculés pour les formes des premiers degrés, Cayley communiqua ce résultat important à l'Association britannique réunie à Édimbourg en 1871, et lui consacra son neuvième Mémoire sur les quantiques; plus récemment, en 1889, les travaux de Hilbert sur le même sujet l'amenèrent à s'en occuper de nouveau, dans le Tome XXXIV des *Mathematische Annalen*.

La formule d'élimination, relative au résultant de deux formes binaires, qui porte maintenant en Analyse le nom de *Cayley*, a son importance comme résultat; mais elle a acquis une plus grande importance à la suite de l'œuvre de Gordan, en conduisant au calcul du résultant en fonction des invariants simultanés.

La nouvelle Algèbre, créée particulièrement par l'œuvre de Cayley, a pris possession de tant de branches des Mathématiques que, si l'activité de son génie se fût arrêtée là, l'admiration des géomètres lui serait déjà due.

Mais la théorie des fonctions elliptiques d'abord, puis celles des fonctions hyperelliptiques lui doivent une nouvelle lumière.

Les premiers travaux de Cayley sur les fonctions elliptiques, et spécialement sur l'équation différentielle de Jacobi pour la transformation, bien que remarquables, ne portent pas autant son empreinte originale que le Mémoire de 1858 ayant pour titre : *Sur quelques formules pour la transformation des fonctions el-*

liptiques. Avec la célèbre transformation due à Hermite et avec les formules renfermées dans cet écrit, tous les éléments pour le passage de l'intégrale de Jacobi et d'Abel à celle de Weierstrass sont déterminés. La transformation des fonctions elliptiques fit plus d'une fois l'objet des efforts de Cayley, et à ses premiers Mémoires, publiés dans les *Philosophical Transactions* en 1874-1878, font suite de plus récents, que l'on trouve dans les Tomes IX et X de l'*American Journal of Mathematics* (1807-1888). Il prit le germe de ses travaux dans la formule de transformation de Jacobi et, avec une habileté de calcul qui lui était particulière, il présenta les équations modulaires sous une nouvelle forme, et révéla la propriété de certaines courbes de pouvoir être représentées.

Pendant l'hiver de l'année 1882, Cayley fut prié de donner une série de leçons à l'université Johns Hopkins, de Baltimore; il accepta et développa à un nouveau point de vue la théorie des fonctions abéliennes de Clebsch et Jordan, publiée en 1866; on trouve ces leçons rassemblées dans les Tomes V et VII de l'*American Journal*. C'est, à mon avis, un des travaux les plus médités de Cayley, bien qu'une notation un peu compliquée en rende l'étude difficile.

Cayley tira de l'étude des propriétés des fonctions thêta la matière d'une série de Mémoires. Il commença, en 1877, avec un travail *Sur les fonctions thêta doubles en relation avec une surface à 16 nœuds;* pendant les années 1879, 1880, je distinguerai, dans les *Philosophical Transactions,* l'important Mémoire *Sur les fonctions thêta doubles singulières,* et dans deux Volumes du *Journal de Mathématiques,* de Borchardt, le travail *Sur les fonctions thêta doubles et triples.*

Ce qui prédomine dans ces écrits, c'est la façon originale dont Cayley envisage les divers aspects des problèmes qu'il traite. C'est là un très grand mérite, et pourtant cette originalité même est cause que ces travaux n'ont pas eu une influence correspondante sur le développement normal des Mathématiques.

Je n'ai pas l'intention d'énumérer toute l'œuvre de Cayley sur les fonctions elliptiques et hyperelliptiques ; mais, en restant dans les limites qui me sont permises, je ne dois pas oublier de citer

l'unique Ouvrage qu'il ait publié : *Treatise of elliptic Functions,* édité en 1876. Il adopta dans ce livre les notations de Jacobi et exposa les différentes parties de cette théorie difficile avec une clarté singulière et une grande rigueur de démonstration; il fut par là très utile à ceux qui voulaient s'initier à cette théorie. En publiant son Livre, dix ans avant le grand Traité d'Halphen, Cayley donna un exemple excellent.

En examinant les sept Volumes des *Mathematical Papers* déjà publiés et les travaux de Cayley qui fourniront la matière des cinq autres, il apparaît clairement que les problèmes de Géométrie exercèrent sur lui une grande attraction. On pourrait dire de lui, comme de quelques autres parmi les plus éminents géomètres, qu'à chaque progrès réalisé en Analyse correspond un progrès en Géométrie, et réciproquement. C'est pourquoi il lui arrivait de revenir à plusieurs reprises sur les mêmes questions géométriques; il les traitait à nouveau lorsque les découvertes en Analyse faites, soit par lui, soit par d'autres, lui fournissaient un instrument plus puissant pour les résoudre.

En l'année 1844, il publia un premier Mémoire *Sur les courbes planes du troisième ordre,* bientôt suivi d'un autre en 1845; plusieurs propriétés nouvelles de ces courbes y sont démontrées, mais la méthode de recherche est indirecte. L'étude des formes cubiques ternaires, la découverte de leurs invariants, covariants, contrevariants offraient un moyen de pénétrer plus avant dans la connaissance des propriétés de ces courbes. Cayley, reprenant cette étude dans son beau Mémoire des *Philosophical Transactions,* de la Société royale de Londres, en 1856, y laissa des traces durables; dans ce Mémoire apparaît pour la première fois la courbe qui porte son nom.

Le Mémoire de 1847, *Recherches sur l'élimination et la théorie des courbes,* auquel fit suite un autre en 1864 et avec le même titre, sont un exemple de l'intérêt que portait Cayley aux progrès de la théorie des formes et de la théorie des êtres géométriques. Lui-même l'affirme par ces paroles : « Mon but a été de donner une idée précise des théorèmes à démontrer, pour former une théorie toute analytique des polaires réciproques; je n'ai fait qu'avancer ces théorèmes (sans chercher à les démontrer) pour

faire voir leur liaison avec la théorie de l'élimination et avec celle des hyperdéterminants; c'est à cette dernière, en particulier, qu'il faut etc., etc. »

Les recherches de Cayley sur les tangentes doubles d'une quartique, sont précédées par le Mémoire de 1859 *Sur les tangentes doubles d'une courbe plane*. Déjà le nombre des tangentes avait été déterminé par Plucker et Jacobi; et Hesse avait déterminé l'équation du 14[e] degré donnant les points de contact de la quartique avec ses tangentes doubles, quand le travail magistral de Salmon en 1858 : *On the double tangents to plane curves* posa la solution du problème sur d'autres bases. Le Mémoire ci-dessus mentionné de Cayley traite la question dans toute sa généralité, en suivant les traces de Salmon; et, avec une habileté de calcul incomparable, il donna la solution complète du problème pour une courbe de degré quelconque. Peut-être ce Mémoire n'est-il pas assez connu et apprécié; il contribua d'ailleurs lui-même à ce résultat en abandonnant la méthode précédente dans ses Mémoires de 1882 et 1883 : *On the bitangents of a plane quartic*, pour reprendre la méthode particulière aux quartiques, indiquée par Riemann et développée plus tard par Weber.

Les singularités des courbes planes, les correspondances de points, la classification des courbes dans l'espace, sont les sujets de différents Mémoires de Cayley : les principaux sont justement examinés dans une récente publication due à Brill et Nœther.

Dans son Mémoire de 1849, *Sur les plans tangents triples des surfaces du troisième ordre*, Cayley donna les principes de ses recherches répétées sur les propriétés géométriques des surfaces. La représentation des 45 plans tangents triples, contenue dans ce Mémoire, sert d'introduction à tous les travaux sur la matière, spécialement en Angleterre, et, après les travaux de Salmon sur la Théorie des surfaces réciproques, et de Cayley lui-même dans son grand travail de 1869, *A Memoir on cubic surfaces*, on peut dire que dans le champ analytique le sujet est épuisé.

La surface de Steiner, qui a fait l'objet d'importants travaux de Kummer, Weierstrass, Cremona et Schröter; la surface du quatrième ordre, qui porte le nom de Kummer; la surface de l'onde, qui a des rapports avec la précédente, occupèrent Cayley

à plusieurs reprises, et tout particulièrement cette dernière. La recherche de l'équation des lignes de courbure de la surface de l'onde fit le thème d'un de ses écrits de jeunesse, et aussi celui d'un de ses derniers travaux, que j'ai eu la bonne fortune de publier en 1892 dans les *Annali di Matematica*.

Il consacra trois Mémoires à la Théorie générale des quartiques doués de nœuds, pendant les années 1869-1870.

L'œuvre de Cayley sur la Théorie des surfaces, se rapportant soit à l'étude des singularités, soit à celle de surfaces particulières, telles que les surfaces gauches, contribua, avec un des travaux les plus estimés de Cremona, à leur classification. Il fut amené, par la théorie des formes, à faire des recherches originales sur les surfaces développables.

Le problème des polygones inscrits ou circonscrits à une conique, auquel Cayley consacra dix ou douze courtes Notes, reçut de lui une nouvelle solution, dont la valeur fut accrue par la polémique qu'elle créa avec Poncelet. Enfin, nous devons citer dans cet ordre d'idées deux Mémoires *Sur la représentation géométrique de certaines intégrales*.

Il n'y a aucune partie de la Géométrie où l'activité de Cayley n'ait pénétré, et où il n'ait laissé de traces de son génie. Nous devons ajouter à nos nombreuses citations des travaux sur la Géométrie de position, sur la Géométrie à plusieurs dimensions, sur la Géométrie non euclidienne, sur la Géométrie de Gauss, et d'autres encore.

Mais, quand on porte son attention vers les travaux de Cayley sur la Dynamique et la Mécanique céleste, on est de plus en plus émerveillé de son activité infatigable. Tout d'abord, il rendit un signalé service à la théorie de la Mécanique rationnelle avec ses deux excellentes Communications : *On the recent progress of theorical Dynamics* faites à la réunion de l'Association britannique, l'une en 1857, l'autre en 1862. La première, débutant avec la Mécanique analytique de Lagrange, suit pas à pas, et avec quelle clarté d'exposition et quelle rigueur de citations, les rapides progrès qu'a vu faire la première moitié de ce siècle dans la Dynamique, avec Poisson, Jacobi, Hamilton, Bertrand, Bour et les autres; et c'est encore le meilleur écrit que pourra lire quelqu'un qui veut s'initier à cette étude.

Cayley était d'autant plus préparé à ces études historiques qu'il avait acquis dès sa jeunesse une grande culture dans cette partie des Mathématiques, et avait eu plus d'une occasion de traiter des problèmes de Dynamique. Dans son premier travail : *On the motion of rotation of a solid body*, il applique pour la première fois à ce problème les élégantes formules d'Olindes Rodrigues. En 1846, ignorant la découverte récente de Jacobi, il traita de nouveau le problème de la rotation du corps solide autour d'un point fixe, en admettant que l'origine des coordonnées soit ce point lui-même; et par l'introduction de deux fonctions spéciales, faciles à interpréter géométriquement, il ramena le problème, dans le cas particulier d'une fonction des forces nulles, à deux quadratures; et il donna à la solution toute sa généralitié par la variation des constantes arbitraires.

Après quelques moindres écrits sur la théorie de la Lune de Hansen, sur la solution du problème des trois corps de Jacobi et Hamilton, Cayley, par ses importants Mémoires de 1859 et 1862 : *On the problem of disturbed elliptic motion; — On the development of the disturbing function in the Lunar Theory-Disturbing Function in the Lunar and the Planety theories. — On the secular acceleration of the Moon's mean motion,* établit les principes de cette série de travaux sur l'Astronomie et la Mécanique céleste qui le rendit célèbre parmi les astronomes, et lui valut, en 1866, la nomination de membre du *Board of Visitors* de l'observatoire de Greenwich.

Dans tout cela, comme dans toute l'œuvre de Cayley, deux qualités sont dominantes : d'abord, la connaissance exacte de tout ce qui était publié sur ces questions; puis, une façon très originale de présenter soit ses solutions, soit celles des autres. Ainsi, pour indiquer un premier exemple de l'étude consciencieuse qu'il faisait des travaux d'autrui, ce fut lui qui reconnut l'omission d'un facteur dans certaines formules de la théorie de la Lune de Plana, omission qui causa une certaine discordance entre les travaux de Pontécoulant et ceux de Delaunay.

L'attraction d'un ellipsoïde sur un point intérieur, problème traité à plusieurs reprises par Cayley, est un second exemple digne d'être noté. Cinq de ses écrits sur la question sont consacrés aux solutions de Legendre, Jacobi, Laplace, Gauss et Ro-

drigues; puis il donna une solution nouvelle où l'étude de l'intégrale définie triple, attachée au problème, occupe une place importante.

Cayley fut jugé par son élève préféré, Glaisher, « le plus grand algébriste vivant », et ce jugement fut approuvé par l'illustre géomètre Salmon, qui fut son collaborateur.

Le rapide examen que j'ai fait de la majeure partie de son œuvre m'a laissé la vive impression de la grande influence qu'elle eut sur les progrès des Mathématiques; et mon opinion est que le nom d'Arthur Cayley restera dans l'histoire de la Science parmi ceux des plus perspicaces et des plus féconds innovateurs dans des branches multiples. Et il serait injuste de refuser, à ces innovateurs du milieu du siècle, une partie de l'honneur des découvertes actuelles.

La grande estime que j'ai toujours éprouvée pour le génie de Cayley m'a conduit à écrire ces pages, que vous jugerez peut-être dignes d'être dédiées à sa mémoire.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SCHLESINGER (L.). — HANDBUCH DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN; in zwei Bänder : Erster Band. xx-486 p. In-8°. Leipzig, Teubner, 1895.

Le but de M. Schlesinger est de présenter au Lecteur un Tableau d'ensemble de la théorie des équations différentielles linéaires, dans l'état où elle est parvenue aujourd'hui, trente ans environ après la publication du premier Mémoire de M. Fuchs. Il semble bien inutile d'insister sur les services que rendent de pareils livres, lorsque les auteurs sont maîtres de leur sujet et qu'ils le traitent avec une entière conscience. Ajouterai-je que la possibilité et l'incontestable opportunité d'un tel Ouvrage, sur un sujet qui, il y a cinquante ans, aurait semblé très particulier, est une preuve réjouissante de l'activité scientifique de notre époque?

Le Livre de M. Schlesinger s'ouvre par une intéressante Introduction historique où l'auteur résume clairement les diverses phases par lesquelles a passé le problème de l'intégration et de l'étude des équations différentielles; les points essentiels de cette histoire sont bien mis en lumière et le rôle de chacun y semble apprécié avec une pleine justice.

C'est les théories générales qui sont l'objet propre de ce premier Volume; on y rencontrera sans doute quelques applications; mais les recherches relatives aux équations différentielles linéaires dont les coefficients ou les intégrales jouissent de propriétés particulières seront exposées dans le second Volume, comme aussi celles qui dépendent de la théorie des groupes de substitutions.

L'auteur établit d'abord l'existence des intégrales, montre comment les points singuliers de ces intégrales sont les points où les coefficients de l'équation différentielle, en supposant que le premier soit égal à un, cessent d'être des fonctions régulières et définit les systèmes fondamentaux d'intégrales. Il passe ensuite à ce qu'il nomme les *théories formelles;* les unes concernent les analogies avec la théorie des équations algébriques : théorème de M. Appell sur les fonctions rationnelles des éléments d'un système

fondamental et de leurs dérivées qui se reproduisent multipliées par un facteur constant, quand on substitue à ces éléments ceux d'un autre système fondamental; recherche des solutions communes à deux équations différentielles linéaires, extension de l'algorithme d'Euclide; décomposition en facteurs symboliques du premier membre d'une équation différentielle linéaire; réduction d'une équation différentielle linéaire dont on connaît des intégrales particulières; les autres se rapportent à la théorie des équations adjointes, à l'intégration des équations différentielles avec second membre, enfin à la notion de l'irréductibilité d'après M. Frobenius. En supposant que, dans une région (E) du plan, où les intégrales de l'équation sont régulières en chaque point, les coefficients de l'équation satisfassent à certaines conditions déterminées, qui se conservent quand on différencie ces coefficients ou qu'on effectue sur eux des opérations rationnelles, l'équation est *irréductible* dans (E) quand elle n'a aucune solution commune avec une équation différentielle linéaire d'ordre moindre, dont les coefficients, dans (E), satisfont aux mêmes conditions; autrement elle est réductible. Cette notion conduit à des propositions analogues à celles qui concernent les équations algébriques; mais il y a une différence essentielle, parce que chaque intégrale d'une équation réductible ne satisfait pas nécessairement à une équation irréductible d'ordre moindre. Le cas où la condition imposée aux coefficients dans (E) est d'être univoques est particulièrement intéressant : le nombre des branches linéairement indépendantes de chaque solution particulière est alors égal à l'ordre de l'équation, si elle est irréductible. Il est clair que, si (E) est simplement connexe, l'équation (à coefficients univoques) est réductible : il en est de même si (E) est doublement connexe, ainsi qu'il résultera de l'étude de l'*équation fondamentale,* que M. Schlesinger va maintenant aborder.

Lorsque, dans une région doublement connexe où les coefficients sont uniformes, la variable décrit un contour simple U, les éléments $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'un système fondamental sont remplacés par des fonctions linéaires à coefficients constants de ces mêmes éléments; en d'autres termes, parcourir le contour U revient à effectuer sur les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ une substitution linéaire (α_{ij}); l'équation fondamentale relative au contour U est, comme

on sait, l'équation en ω dont on obtient le premier membre en remplaçant, dans le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$|\alpha_{ij}|,$$

les éléments α_{ii} de la diagonale principale par $\alpha_{ii}-\omega$. On y est encore amené en considérant la relation à coefficients constants qui doit exister entre les $n+1$ solutions $v, \theta v, \theta^2 v, \ldots, \theta^n v, \theta^n(v)$, dont la première est l'intégrale générale, et les autres ce que devient cette intégrale générale quand on décrit le contour U une fois, deux fois, ..., n fois. L'existence de solutions communes à deux équations différentielles linéaires se traduit par l'existence d'un facteur commun aux deux équations fondamentales correspondantes.

Quand les racines de l'équation fondamentale sont simples, il existe un système fondamental *canonique* composé d'éléments $u_1, u_2, \ldots, u_n$, tels que l'on ait

$$\theta u_i = \omega_i u_i,$$

en désignant toujours par θu_i ce que devient la fonction u_i quand on décrit U et par ω_i une racine simple de l'équation fondamentale. A une racine multiple ω_a de l'équation fondamentale correspond un groupe de solutions, qui se reproduisent, à une substitution linéaire près, quand on décrit U; ces solutions se décomposent en sous-groupes, comme l'a montré M. Hamburger.

Les nombres des éléments d'un sous-groupe peuvent s'obtenir de diverses façons; ils dépendent, par exemple, des *diviseurs élémentaires* du premier membre de l'équation fondamentale; quoi qu'il en soit, la considération de l'équation fondamentale conduit dans tous les cas à constituer un système fondamental canonique, formé par la réunion des éléments de tous les sous-groupes, et les propriétés que l'on vient de rappeler conduisent, dans le cas où le domaine considéré est formé par les environs d'un point singulier a, à mettre sous une forme analytique simple les éléments de ce système fondamental; ainsi les éléments d'un sous-groupe pourront se mettre sous la forme

$$u_1 = (x-a)^{r_a}\psi_{11}(x),$$
$$u_2 = (x-a)^{r_a}[\psi_{21}(x)+\psi_{22}(x)\log(x-a)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_m = (x-a)^{r_a}[\psi_{m1}(x)+\psi_{m2}(x)\log(x-a)+\ldots+\psi_{mm}(x)\log^{m-1}(x-a)],$$

où chacune des fonctions ψ est la somme de deux séries entières l'une en $x-a$, l'autre en $\frac{1}{x-a}$. Lorsque toutes les fonctions ψ qui figurent dans une intégrale ne contiennent qu'un nombre limité de termes en $\frac{1}{x-a}$, on dit que le point a est un point de *détermination* pour l'intégrale, qui est dite elle-même *déterminée* en ce point. Alors, en modifiant d'un nombre entier convenable l'exposant r_a, on peut s'arranger pour que toutes les fonctions ψ soient des séries entières en $x-a$, dont l'une au moins contienne un terme indépendant de $x-a$; si r'_a est la valeur modifiée de r_a, on dit alors que l'intégrale considérée appartient à l'exposant r'_a. On sait que l'un des premiers et fondamentaux résultats obtenus par M. Fuchs a été de reconnaître la forme des équations différentielles linéaires pour lesquelles toutes les intégrales sont déterminées en un point singulier; si ce point singulier est le point o, l'équation peut s'écrire

$$x^n P_n(x)y^{(n)} + x^{n-1} P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_0(x)y = 0,$$

où $P_n(x), P_{n-1}(x), \ldots, P_0(x)$ sont des séries entières en x, dont la première ne s'annule pas pour $x = 0$; c'est là ce que M. Frobenius a appelé la *forme normale;* on peut, si l'on veut, supposer $P_n(x) = 1$. On obtient la *fonction caractéristique* de l'équation différentielle linéaire en remplaçant y par x^ρ; et la considération de cette fonction caractéristique conduit naturellement à la notion de l'*équation déterminante*. Inversement, quand l'équation a la forme normale, ses intégrales sont déterminées au point $x = 0$. La démonstration que développe M. Schlesinger est due à M. Frobenius. L'auteur étudie ensuite les liens entre l'équation fondamentale et l'équation déterminante, la constitution des sous-groupes d'intégrales de M. Hambürger, les *criterium* pour l'existence ou la non-existence des termes logarithmiques dans les intégrales; la forme des intégrales dans les environs du point à l'infini, ou d'un point d'embranchement algébrique pour les coefficients.

Les équations différentielles linéaires pour lesquelles les coefficients sont des fonctions rationnelles de x (¹) et dont les inté-

(¹) La supposition que ces coefficients sont des fonctions algébriques n'est pas plus générale.

grales sont partout déterminées offrent un intérêt particulier qui est manifeste; on a justement attribué le nom de M. Fuchs à la classe formée par ces équations. Une propriété intéressante des intégrales de ces équations et relative à la façon dont elles se comportent sur le cercle de convergence a été mise en évidence par M. Thomé.

Quand on se donne les points singuliers d'une équation de M. Fuchs, ainsi que les racines des équations déterminantes correspondantes, racines qui, toutefois, doivent vérifier une certaine relation, on peut construire l'équation différentielle linéaire, qui comporte d'ailleurs un certain nombre de coefficients arbitraires; on est amené ainsi à étudier, en particulier, le cas de un ou deux points singuliers; le cas d'une équation différentielle du second ordre à deux points singuliers amène à la célèbre équation de Gauss, à laquelle M. Schlesinger consacre un important Chapitre.

Si, dans le cas où le point singulier que l'on considère est un point de détermination, les méthodes de M. Fuchs permettent, et cela par des procédés purement algébriques, d'obtenir un système fondamental canonique et de reconnaître comment il se comporte quand on fait le tour du point singulier, il n'en est plus de même quand on a affaire à un point d'indétermination, même en supposant toujours que, aux environs de ce point, les coefficients aient le caractère de fonctions rationnelles; alors, ainsi que l'observe l'auteur, on rencontre les mêmes difficultés que lorsqu'on veut étudier les intégrales à l'intérieur d'une couronne circulaire, et la détermination des éléments du système canonique repose sur des procédés d'une nature transcendante, qui permettent le calcul de ces éléments avec une approximation indéfinie, mais qui ne fournissent pas, *en général,* de renseignements sur la façon dont se comporte le système quand on fait le tour de la couronne.

L'un de ces procédés conduit à la résolution d'un système infini d'équations linéaires et M. Helge von Koch a montré le parti qu'on pouvait tirer des déterminants infinis pour atteindre ce résultat.

Un autre procédé, auquel se rattachent des résultats importants, est dû à M. Hambürger. Dans des cas particuliers, il arrive que le point singulier est un point de détermination pour certaines intégrales particulières, tout en étant un point d'indétermination

pour l'intégrale générale; on peut être renseigné sur ces intégrales particulières.

L'étude des solutions d'une équation différentielle linéaire autour du point ∞, quand l'équation déterminante relative à ce point est de degré zéro, ou, si l'on veut, quand ce point n'est un point de détermination pour aucune solution, conduit à quelques notions importantes. L'équation différentielle linéaire étant mise alors sous la forme

$$(\text{A}) \quad y^{(n)} + \left[\varphi_{1\varkappa}(x) + Q_{n-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right] y^{(n-1)} + \ldots + \left[\varphi_{n\varkappa}(x) + Q_0\left(\frac{1}{x}\right)\right] y = 0,$$

où $\varphi_{\lambda\varkappa}(x)$ est une fonction entière en x de degré au plus égal à $\lambda\varkappa$, tandis que les Q sont des séries entières en $\frac{1}{x}$ qui s'annulent pour $x = \infty$, on dit que cette équation est de rang $\varkappa + 1$.

L'équation différentielle linéaire

$$(\mathcal{A}) \qquad z^{(n)} + \varphi_{1\varkappa}(x) z^{(n-1)} + \ldots + \varphi_{n\varkappa}(x) z = 0,$$

obtenue en supprimant dans les coefficients les termes qui s'annulent pour $x = \infty$, et dont les solutions sont manifestement des fonctions transcendantes entières, est l'objet d'une étude particulière; l'équation

$$C^n + A_{n-1} C^{n-1} + \ldots + A_n = 0,$$

où $A_{n-\lambda}$, est, en général, le coefficient de $x^{\lambda\varkappa}$ dans $\varphi_{\lambda\varkappa}(x)$, est dite *équation caractéristique* (A), par extension du cas des équations linéaires à coefficients constants, équations qui se déduisent du type $(\mathcal{A})$ en supposant $\varkappa = 0$ (¹). L'auteur montre comment, pour

(¹) A propos de l'étude de cette équation que nous ne pouvons que mentionner dans cette rapide analyse, il convient de faire connaître à ceux de nos lecteurs qui voudront étudier le Livre de M. Schlesinger une inexactitude qui s'est glissée dans le passage dont nous parlons; cette inexactitude, M. Schlesinger a bien voulu nous la signaler; nous espérons calmer les scrupules bien honorables qu'il montre en publiant sa lettre :

« ... Dans le n° 95 (p. 341 et suivantes) on suppose essentiellement que le développement

$$w = C_0 + C_1 \xi + C_2 \xi^2 + \ldots$$

est convergent. Si cela n'a pas lieu, la détermination des fonctions w_λ, v_λ, z_λ est pourtant possible de la manière indiquée, mais alors les z_λ ne représentent pas

ces équations ($\mathcal{A}$), on peut parvenir à un système fondamental de solutions. Ces solutions, dans le cas général (A), entrent comme facteurs dans les *intégrales normales* ou *séries normales* de M. Thomé, le mot d'*intégrales* étant réservé au cas où les *séries* normales, qui satisfont formellement à l'équation différentielle, sont convergentes.

On sait reconnaître le cas particulièrement intéressant où l'équation (A) admet n intégrales normales; on montre encore que l'étude d'une équation différentielle linéaire de rang x peut être ramenée à l'étude d'une équation différentielle linéaire de rang un, cas auquel l'équation ($\mathcal{A}$) est à coefficients constants.

Le problème de l'intégration d'une équation différentielle à coefficients rationnels peut se poser dans les termes suivants : partant d'un système fondamental de solutions, système défini en un point, on suit un chemin déterminé quelconque, assujetti seulement à ne passer par aucun point singulier : définir le système fondamental avec lequel on arrive à l'extrémité du chemin. C'est, à coup sûr, un problème qui occupera encore longtemps les géomètres; il comporte toutefois des solutions partielles que M. Schlesinger développe à la fin de ce premier Volume. Après avoir montré comment le problème dépend de la détermination et de la composition de certaines substitutions linéaires, il développe divers modes de représentation des intégrales d'une équation différentielle linéaire qui s'appliquent le long d'un chemin quelconque, sans qu'on soit obligé de passer par le procédé tout théorique du prolongement des séries entières. L'un de ces modes de représentation, qui est dû à M. Fuchs, est particulièrement remarquable; il permet d'obtenir l'intégrale générale sous forme d'une série convergente dont les termes s'obtiennent au moyen d'intégrations répétées, effectuées sur des fonctions rationnelles et fournit, lorsque le chemin décrit par la variable est fermé, des renseignements sur les coefficients de l'équation fondamentale cor-

---

immédiatement des solutions de l'équation ($\mathcal{A}$), il faut, pour obtenir de telles solutions, multiplier les z_λ par certaines fonctions holomorphes. C'est ce que j'ai négligé de dire explicitement. De plus, il faut ajouter dans l'équation (16) (p. 343) au coefficient de u le terme

$$v_\lambda^n + D_{\lambda,n} + \varphi_x(v_\lambda^{n-1} + D_{\lambda,n-1}) + \ldots + \varphi_{nx}. »$$

respondante. M. Paul Günther a développé les calculs pour une équation du second ordre et pour un anneau circulaire à l'intérieur duquel il n'y a pas de points singuliers. Un autre mode de représentation des intégrales, qui conduit à quelques résultats importants, notamment pour les équations de rang un, repose sur la considération de la transformée de Laplace. Enfin, les dernières pages du Livre sont consacrées à l'étude des substitutions fondamentales et des invariants fondamentaux. J. T.

MÉLANGES.

SUR L'ÉQUATION D'EULER;

PAR M. V. JAMET.

Nous désignons ainsi, avec M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, p. 54) l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$(1)\qquad (x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}+a\frac{\partial z}{\partial x}-b\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

dans laquelle a, b désignent des constantes, et nous nous proposons de faire connaître, sous forme explicite, l'intégrale de cette équation assujettie à devenir identique à une fonction donnée de l'une quelconque des deux variables, quand on donne à l'autre une valeur déterminée. Nous rappellerons d'abord que toute expression de la forme

$$\int (x-\alpha)^b (y-\alpha)^a f(\alpha)\,d\alpha$$

est une intégrale de cette équation, pourvu que le contour, fermé ou non, suivant lequel on effectue l'intégration, ne dépende ni de x ni de y. Plus généralement l'expression

$$(2)\qquad A+\int (x-\alpha)^b (y-\alpha)^a f(\alpha)\,d\alpha+\int (x-\alpha)^a (y-\alpha)^b \varphi(\alpha)\,d\alpha,$$

où A désigne une constante, et où les deux intégrales sont calculées le long de deux contours différents, remplissant l'un et l'autre la condition ci-dessus, est une intégrale de l'équation (1). Or, nous voulons former une intégrale qui, pour $x = x_0$ devienne identique à une fonction donnée de y, soit $\Phi(y)$; et qui, pour $y = y_0$ devienne identique à une fonction donnée de x, soit $F(x)$.

Mais nous devons supposer aussi $F(x_0) = \Phi(y_0)$; car, si l'on désigne l'intégrale cherchée par $\theta(x, y)$, on doit trouver

$$\theta(x_0, y_0) = F(x_0) \qquad \text{et} \qquad \theta(x_0, y_0) = \Phi(y_0).$$

Soit donc A la valeur supposée connue, de $\theta(x_0, y_0)$; c'est là le sens que nous attribuerons à la lettre A, dans la formule (2). Nous supposerons aussi que les deux constantes x_0, y_0 sont différentes, et que, considérées comme des quantités complexes, elles sont représentées par deux points distincts, M, N. Nous poserons

$$f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{(x_0 - \alpha)^b (y_0 - \alpha)^a}, \qquad \varphi(\alpha) = \frac{h(\alpha)}{(x_0 - \alpha)^b (y_0 - \alpha)^a},$$

et nous supposerons la première intégrale calculée le long d'un contour fermé simple, contenant le point M et non le point N, et tel que la fonction $F(x)$, supposée holomorphe dans le voisinage du point x_0, soit également holomorphe dans tout ce contour, et par conséquent développable en une série entière par rapport à $x - x_0$, savoir

$$A + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n + \ldots.$$

Nous définissons d'une manière analogue le contour relatif à la deuxième intégrale, et nous supposons que le développement correspondant de la fonction $\Phi(y)$ est le suivant

$$A + B_1(y - y_0) + B_2(y - y_0)^2 + \ldots + B_n(y - y_0)^n + \ldots.$$

Pour rappeler ces hypothèses, nous désignons la première des deux intégrales par le symbole $\int_{x_0}$, la deuxième par le symbole $\int_{y_0}$, et l'intégrale (2) se présente alors sous la forme

$$(2\,bis) \quad A + \int_{x_0} \frac{(x-\alpha)^b (y-\alpha)^a g(\alpha)\,d\alpha}{(x_0-\alpha)^b (y_0-\alpha)^a} + \int_{y_0} \frac{(x-\alpha)^b (y-\alpha)^a h(\alpha)\,d\alpha}{(x_0-\alpha)^b (y_0-\alpha)^a}.$$

Si, dans cette expression, on fait $x = x_0$, et si l'on suppose que la fonction $g(\alpha)$ est holomorphe à l'intérieur du contour relatif à la première intégrale, celle-ci devient nulle; et l'expression (2 *bis*) se réduit à

$$A + \int_{y_0} \left(\frac{y-\alpha}{y_0-\alpha}\right)^a h(\alpha)\,d\alpha = A + \int_{y_0} \left(1 + \frac{y-y_0}{y_0-\alpha}\right)^a h(\alpha)\,d\alpha.$$

Nous préciserons davantage encore la forme de nos contours, en disant que ce sont des cercles décrits des points x_0 et y_0 comme centres, avec des rayons assez petits pour que toutes les conditions énoncées ci-dessus soient remplies. Alors le rapport $\frac{y-y_0}{y_0-\alpha}$ ayant un module moindre que l'unité, le second membre de l'égalité ci-dessus sera développable en une série ordonnée par rapport aux puissances entières et croissantes de ce rapport, savoir

$$\begin{aligned} A &+ \int_{y_0} h(\alpha)\,d\alpha + \frac{a}{1}(y-y_0)\int_{y_0} \frac{h(\alpha)}{\alpha - y_0}\,d\alpha \\ &+ \frac{a(a-1)}{1.2}(y-y_0)^2 \int_{y_0} \frac{h(\alpha)}{(\alpha-y_0)^2}\,d\alpha + \ldots \\ &+ \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots n}(y-y_0)^n(-1)^n \int_{y_0} \frac{h(\alpha)}{(\alpha-y_0)^n}\,d\alpha + \ldots, \end{aligned}$$

et le problème sera résolu, en ce qui concerne la détermination de la fonction $h(\alpha)$, si l'on peut déterminer celle-ci de telle sorte que l'on ait, quel que soit n,

$$(-1)^n \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2.3\ldots n} \int_{y_0} \frac{h(\alpha)}{(\alpha-y_0)^n}\,d\alpha = B_n.$$

Mais, sous la réserve des hypothèses faites au sujet de la fonction $h(\alpha)$, l'intégrale qui figure dans cette égalité sera égale à

$$\frac{2\pi\sqrt{-1}\,h^{(n-1)}(y_0)}{1.2.3\ldots\overline{n-1}} \quad \text{(formule de Cauchy)},$$

et l'on conclura

$$\frac{h^{(n-1)}(y_0)}{1.2.3\ldots\overline{n-1}} = \frac{(-1)^n}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{n!\,B_n}{a(a-1)(a-2)\ldots(a-n+1)}.$$

Si donc il existe une fonction $h(\alpha)$ remplissant les conditions

du problème, elle sera égale à la somme d'une série entière, savoir

$$(3)\qquad A+\sum_{p=0}^{p=\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{2\pi\sqrt{-1}}\,\frac{(p+1)!\,B_{p+1}(\alpha-y_0)^p}{a(a-1)(a-2)\ldots(a-p)},$$

pourvu que celle-ci soit convergente à l'intérieur d'un cercle décrit du point y_0 comme centre. Or je dis qu'elle est convergente pour toute valeur de α, intérieure au contour circulaire suivant lequel nous calculons la deuxième intégrale de la formule (2 *bis*). En effet, soit α' une imaginaire représentée par un point intérieur au même cercle, mais telle que le module de $\alpha'-y_0$ soit supérieur au module de $\alpha-y_0$. La série

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} B_{p+1}(\alpha'-y_0)^{p+1}$$

est absolument convergente, et il en est de même de la série

$$(4)\qquad \sum_{p=0}^{p=\infty}(p+1)B_{p+1}(\alpha'-y_0)^p,$$

formée avec les dérivées de ses termes, par rapport à α'. Mais on obtient les termes de la série (3) en multipliant ceux de la série (4), respectivement, par ceux de la série suivante

$$(5)\qquad \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{p=0}^{p=\infty}(-1)^n\frac{1.2.3\ldots p}{a(a-1)(a-2)\ldots(a-p)}\left(\frac{\alpha-y_0}{\alpha'-y_0}\right)^p,$$

et ceux-ci ne croissent pas au delà de toute limite quand p est de plus en plus grand. En effet, le terme général de cette série s'obtient en multipliant le terme précédent par le facteur

$$(6)\qquad \frac{p}{p-a}\,\frac{\alpha-y_0}{\alpha'-y_0},$$

dont le module a pour limite un nombre inférieur à 1, savoir

$$\operatorname{mod}\frac{\alpha-y_0}{\alpha'-y_0}.$$

Il s'ensuit que la série (5) est convergente; que, par conséquent,

ses termes tendent vers zéro. Donc ils ne croissent pas au delà de toute limite; donc la série (3) est convergente.

On déterminera de même la fonction $g(\alpha)$; mais on observera que la démonstration précédente n'est valable que si le facteur $\frac{p}{p-a}$ est fini pour toute valeur entière de p, c'est-à-dire si a n'est pas égal à un nombre entier positif. Toutefois, si, dans ce cas, la fonction Φ était un polynome entier, de degré $a-1$, la même méthode serait applicable, et l'on trouverait, pour l'expression de h, un polynome entier, de degré $a-1$, dont le développement serait encore donné par la formule (3), à condition que la limite supérieure du signe Σ y soit remplacée par $a-1$. Si b était aussi un nombre entier positif, et $F(x)$ un polynome entier de degré $b-1$, la fonction $g(\alpha)$ serait de même un polynome de degré $b-1$. Plus généralement, supposons que, dans le voisinage du point y_0, la fonction Φ soit développable par la série de Taylor, et adoptons, pour son développement, la forme suivante

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} \Phi(y) &= A + \frac{\Phi'(y_0)}{1}(y-y_0) \\ &+ \frac{\Phi''(y_0)}{1.2}(y-y_0)^2 + \ldots \\ &+ \frac{\Phi^{(a)}(y_0)}{1.2.3\ldots a}(y-y_0)^a + \frac{1}{1.2.3\ldots a}\int_{y_0}^{y}(y-t)^a\,\Phi^{(a+1)}(t)\,dt. \end{aligned}\right.$$

Si b n'est pas un nombre entier positif, nous désignerons par θ_1 l'intégrale de l'équation (1) qui, pour $y=y_0$ se réduit à $F(x)$, et qui, pour $x=x_0$ est égale au second membre de l'égalité précédente, diminué du terme complémentaire et de celui qui le précède. Nous observerons que, dans le cas actuel, l'équation (1) admet l'intégrale suivante

$$\int_{y_0}^{y}\frac{(y-t)^a(x-t)^b\,\Phi^{(a)}(t)\,dt}{(x_0-t)^b}$$

et nous en conclurons que la fonction

$$\begin{aligned} \theta_1 &+ \frac{(y-y_0)^a(x-y_0)^b}{(x_0-y_0)^b}\,\frac{\Phi^{(a)}(y_0)}{1.2.3\ldots a} \\ &+ \frac{1}{1.2.3\ldots a}\int_{y_0}^{y}\frac{(y-t)^a(x-t)^b}{(x_0-t)^b}\,\Phi^{(a+1)}(t)\,dt \end{aligned}$$

est une intégrale de l'équation (1), remplissant toutes les conditions du problème.

Si les nombres a et b sont, l'un et l'autre, entiers et positifs, nous adjoindrons, au développement précédent de la fonction $\Phi(y)$, le développement suivant de la fonction F

$$(8)\quad \begin{cases} F(x) = F(x_0) + \frac{x - x_0}{1} F'(x_0) + \ldots \\ \qquad + \frac{F^{(b)}(x_0)}{1.2.3\ldots b}(x - x_0)^b + \frac{1}{1.2.3\ldots b}\int_{x_0}^{x} (x - t)^b F^{(b+1)}(t)\, dt. \end{cases}$$

Aux seconds membres des formules (7) et (8) supprimons les termes complémentaires et ceux qui les précèdent immédiatement, et soient $\Phi_1(y)$ et $F_1(x)$ les polynomes obtenus. Soit aussi θ_1 l'intégrale de l'équation (1) qui, pour $x = x_0$, devient égale à $\Phi_1(y)$ et qui, pour $y = y_0$ devient égale à $F_1(x)$. L'intégrale cherchée sera, dans le cas actuel,

$$\theta_1 + \frac{(y - y_0)^a (x - y_0)^b}{(x_0 - y_0)^b} \frac{\Phi^{(a)}(y_0)}{1.2.3\ldots a} + \frac{(y - x_0)^a (x - x_0)^b}{(y_0 - x_0)^a} \frac{F^{(b)}(x_0)}{1.2.3\ldots b}$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots a}\int_{y_0}^{y} \frac{(y - t)^a (x - t)^b}{(x_0 - t)^b} \Phi^{(a+1)}(t)\, dt$$
$$+ \frac{1}{1.2.3\ldots b}\int_{x_0}^{x} \frac{(y - t)^a (x - t)^b}{(y_0 - t)^a} F^{(b+1)}(t)\, dt.$$

RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS PROJECTIFS;

PAR M. FR. MEYER (DE CLAUSTHAL).

Traduction annotée par H. FEHR.

DEUXIÈME PARTIE

(SUITE).

B. — Irrationalité des formes.

La question des formes irrationnelles a été soulevée dès les débuts de notre théorie et particulièrement sous l'influence de la

Géométrie; mais ce n'est que tout récemment que l'on a été conduit à une introduction systématique des covariants irrationnels, et l'on ne possède, sur ce sujet, encore aucune théorie complète.

Au point de vue historique, on constate deux directions. D'un côté, la pratique a donné lieu à des recherches sur les formes *canoniques* invariantes. D'autre part, on a soulevé le problème inverse, qui consiste à déterminer les formes qui auraient comme formes invariantes une ou plusieurs formes données; il s'agit, dans ce cas, de fixer le nombre de ces formes primitives et les équations dont elles dépendent.

Il est vrai que ce second problème n'a été traité que pour quelques cas isolés. Il constitue cependant un complément indispensable à la théorie des invariants rationnels et de leurs syzygies, et semble, par conséquent, avoir quelque avenir.

a. — Canonisation des formes.

Les bases (¹) se retrouvent déjà dans les premiers développements de la théorie des formes. Cayley et Sylvester (²) montrèrent que les formes binaires pouvaient être représentées à l'aide de puissances d'expressions linéaires $x - \alpha$, les α étant les racines de simples covariants (*canonisants*).

Plus tard, Gundelfinger (³) a traité cette question d'une manière tout à fait générale, en ayant recours à l'analyse. Il parvint ainsi à introduire, dans la théorie des invariants, une série de théorèmes tirés de la théorie des équations différentielles.

Rosanes (⁴) avait déjà étudié la canonisation d'une forme binaire f_n, pour examiner ensuite, au point de vue géométrique,

---

(¹) Nous avons pu réduire ce paragraphe aux points les plus essentiels, vu que ce Chapitre est traité en détail dans les Ouvrages de CLEBSCH, SALMON, BRUNO, GORDAN.

(²) *Voir* l'extension qu'en a donné LE PAIGE, *Belg. B.*, (3), II, p. 40-53; *C. R.*, XCII, p. 1048-9, 1103-5; XCIII, p. 264-265 et 509-512, 1881; *C. R.*, XCIV, p. 31, 69, 424; *Tor. Atti*, XVII, p. 299-320, 1882; *Rom. Acc. P. N.* XXXV, p. 54-84, 140-145; *Lisboa Jorn. de Sciencias math.*, IX, 1883.

(³) *Gött. Nachr.*, p. 115-121; 1883 et avec plus de détails dans le *J. f. Math.*, C, p. 413-424. — *Consulter* la remarque de HILBERT, *Math. Ann.*, XXX, p. 15.

(⁴) *Journ. f. Math.*, LXXV, p. 172-176, 1873; LXXVI, p. 312-330, 1873; *Math. Ann.*, VI, p. 264-312; 1873. — Nous reviendrons sur cette question en parlant de la théorie de l'Apolarité, Ch. II, D. *b*.

le cas plus général de n formes f_n. Les résultats obtenus sont en liaison très étroite avec la théorie des polygones et des polyèdres polaires.

De son côté, Reye (1) a été conduit à des résultats analogues en suivant une tout autre voie; il a, en outre (2), indiqué une généralisation de la remarque de Sylvester, d'après laquelle une forme cubique quaternaire peut être représentée à l'aide d'une somme de cinq cubes. Le Rapporteur a développé (3), avec beaucoup de détails, les relations qui existent entre le point de vue de Rosanes et celui de Reye, en montrant, en particulier, comment la représentation canonique dans des domaines d'ordre supérieur peut, à l'aide de la théorie des fonctions symétriques, être ramenée à des cas plus simples.

Quant aux formes binaires, nous avons encore à mentionner le Mémoire récent de G. Bauer (4) sur la forme canonique des formes f_{2n}; puis un travail de Hilbert (5), qui donne un critère permettant de reconnaître si une forme donnée est une puissance entière d'une autre forme binaire.

On doit encore (6) à Hilbert un principe, d'après lequel la présence des irrationalités est nettement mise en relief : on cherche les formes φ_ν (d'ordre ν), dont le composé (d'un ordre suffisamment élevé) avec f (d'ordre pair) ne diffère de cette dernière que par un facteur constant λ; cette quantité λ est un invariant irrationnel de f, tandis que les formes φ se présentent comme covariants irrationnels.

La théorie des équations et la transformation de Tschirnhausen ont également donné naissance à un grand nombre de formes

(1) *Journ. f. Math.*, LXXII, p. 293-326; 1870.

(2) *Journ. f. Math.*, LXXVIII, p. 114-122 et p. 123-129; 1874. — *Voir* les remarques historiques dans la biographie de Clebsch *Math. Ann.*, VII, p. 17.

(3) *Apolarität und rationale Curven*, Tubingue, 1883.

(4) *Münch. Ber.*, p. 3-20, 1892.

(5) *Math. Ann.*, XXVII, p. 158-160; 1886. Au point de vue de la méthode, *voir* plus loin II C. *b. d.* — Maisano avait déjà (1883) examiné les cas simples dans le *Rom. Acc. L.*, (3), VII, p. 231-233.

(6) *Leipz. Ber.*; 1885, p. 427-438; *Math. Ann.*, XXVIII, p. 381-446. — Dans le *Journ. de Math.*, (4), IV, p. 249-256, 1886, Hilbert a montré que son principe pouvait être étendu aux domaines ternaire et quaternaire.

canoniques. Nous signalerons ici seulement le Mémoire de Brill (¹) qui donne pour les f_6 deux formes très remarquables.

Il nous reste à considérer la représentation canonique caractéristique des formes (définies) d'ordre n, à variables et à coefficients réels, et conservant le même signe, indépendamment des valeurs réelles attribuées aux variables. Aux cas bien connus $n = 2$, m étant quelconque, et $m = 2$, n étant quelconque, Hilbert (²) a ajouté le suivant $n = 4$, $m = 3$, auquel correspond une représentation (à l'aide de trois paramètres arbitraires) sous la forme d'une somme de trois carrés. De plus, l'auteur a prouvé que, pour *toute* autre combinaison des nombres m et n, la représentation en somme de carrés est impossible.

b. — Retour des covariants aux formes primitives. Invariants et covariants irrationnels.

Dans la théorie des nombres, on est parvenu à grouper les types *non équivalents* de formes quadratiques binaires appartenant à un déterminant donné; ce sont des types tels qu'il est impossible de passer de l'un des types à un autre par une substitution linéaire (à coefficients entiers). Ce problème n'a pas été sans influence sur les premiers développements de la théorie des invariants, car, lorsque Hermite (³) se proposa d'en faire l'extension aux formes binaires d'ordre supérieur, il se vit obligé de développer d'abord les méthodes de la théorie des formes.

D'un autre côté, la Géométrie conduisit à des problèmes analogues. Le premier exemple, et en même temps le plus remarquable, est donné par la cubique plane $C_3 = 0$, admettant une courbe covariante $H_3 = 0$. Hesse découvrit non seulement cette

(¹) *Math. Ann.*, XX, p. 330-357; 1882. Ce sont les formes :

$$x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q \qquad \text{et} \qquad x^6 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + 1.$$

Voir encore, pour la représentation canonique de f_6 :

MASCHKE, *Gött. Nach.;* 1887, p. 421-424; *Math. Ann.*, XXX, p. 496-515; *Rom. Acc. L. R.*, (4), IV, p. 181-184; 1884; BRIOSCHI, *Acta Math.*, XII, p. 83-101; 1888; LINDEMANN, *Math. Ann.*, XXI, p. 71-109; BOLZA, *Math. Ann.*, XXX, 478-495.

(²) *Math. Ann.*, XXXII, p. 332-350; 1880.

(³) *Voir*, en particulier, le *Journ. für Math.*, XL, XLI; 1850, 1851.

dernière, mais il parvint encore à montrer que réciproquement, H_3 étant supposé donné, il y avait trois courbes correspondantes.

Mais ce ne fut que plus tard que l'on approfondit ces questions au point de vue de la théorie des formes.

Dans le domaine binaire, il y a un problème qui, par ses nombreuses applications géométriques, a pris quelque importance. C'est celui qui consiste à déterminer les types non équivalents de faisceaux de formes $f_n + k\varphi_n$ admettant comme déterminant fonctionnel une forme donnée $f_{2(n-1)}$ d'ordre $2(n-1)$. Brill (1) a montré le premier que ce problème admet un nombre fini de solutions, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune relation entre les coefficients de $f_{2(n-1)}$.

Si le cas $n = 3$, avec deux solutions, n'offrait pas de difficultés (2), il en fut tout autrement pour $n = 4$, conduisant à cinq solutions (3). L'équation du cinquième ordre, dont celles-ci dépendent, a été examinée par Stephanos (4), tandis que Brill (5) a étudié ces cinq faisceaux, particulièrement dans leurs relations avec les équations du sixième ordre. D'un autre côté, le Rapporteur (6) s'est occupé des liens qui rattachent ces faisceaux à la théorie des courbes rationnelles planes C_4 et C_6, puis à la théorie des cubiques dans l'espace. Il a même été le premier à donner la solution (7) du cas général, solution qui a été confirmée ensuite, à l'aide d'autres méthodes, par Stephanos (8) et Schubert (9). Enfin, Hilbert parvint (10), en s'appuyant sur le principe signalé dans le paragraphe précédent, à déterminer l'équation donnant

---

(1) *Math. Ann.*, XX, p. 330-357; 1882. *Voir* l'exposé qu'en donne le Rapporteur, *Apolarität...*, p. 320.

(2) *Voir*, par exemple, CAPORALI, *Nap. Rend.*, XXII, p. 95-114; 1883.

(3) Dans les *Math. Ann.*, XXI, p. 71-109, LINDEMANN examine le cas particulier dans lequel le déterminant fonctionnel se confond avec le hessien de f_4.

(4) *C. R.*, XCIII, p. 993-997; 1881. C'est l'extrait d'un Mémoire plus considérable couronné par l'Académie et publié dans les *Sav. étrangers*; 1883.

(5) *Math. Ann*, XX, p. 330-357; 1882.

(6) *Apolarität...*; 1883.

(7) *Loc. cit.*, p. 391. Pour un déterminant fonctionnel donné d'ordre $2n$, il y a $\frac{2(2n-1)!}{(n+1)!(n-1)!}$ faisceaux de formes f_{n+1}.

(8) *Thèse*, 64 pages; 1884.

(9) *Acta. Math.*, VIII, p. 97-117; 1886.

(10) *Leipz. Ber.*, p. 112-122, 1887; *Math. Ann.*, XXXIII, p. 217-236.

les solutions du problème et à traiter la question analogue relative au faisceau de formes correspondant à un discriminant donné [1].

Ce dernier problème, dans le cas de deux variables indépendantes, a été résolu, d'une façon remarquable, par Hurwitz [2], à l'aide des méthodes de la théorie des fonctions. Cela revient, selon cet éminent géomètre, à chercher les surfaces de Riemann admettant des points de ramification (*Verzweigungspunkte*) donnés. Ses résultats renferment, comme cas particuliers, ceux qui avaient été obtenus précédemment.

Dans les travaux récents sur la résolution des équations de degré supérieur, on rencontre un problème inverse assez remarquable [3]; il s'agit, si l'on suppose les formes d'un système complet affectées de valeurs numériques fixes (compatibles), d'établir les équations dont dépend la détermination de la forme primitive.

L'introduction des formes irrationnelles dans la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, a fortement contribué au développement de cette branche. On sait, ainsi que l'a bien remarqué Klein [4], que l'intégrale elliptique de 1re espèce peut admettre une infinité de formes canoniques, suivant les dimensions de l'espace dans lequel on considère la courbe elliptique *normale*. Le *module* de l'intégrale est alors un invariant irrationnel de cette courbe.

Dans l'étude des genres $p = 2$ et $p = 3$, on se trouve en présence de méthodes très diverses [5]. Si, pour le second cas, on se borne à la courbe normale la plus simple, à une quartique plane

---

(1) *Math. Ann.*, XXXI, p. 482-492; 1888.

(2) *Math. Ann.*, XXXIX, p. 1-61; 1891. Ce Mémoire contient, en outre, de nombreux renseignements bibliographiques. Consulter aussi FROBENIUS, *Journ. für Math.*, CVI, p, 125-189; 1890.

Ce genre de problème inverse, examiné au point de vue de la théorie des fonctions, a été présenté, avec une remarquable clarté d'exposition par PICARD dans son *Traité d'Analyse*, t. II, Chap. VI; 1892. Le Mémoire de Hurwitz se trouve cité à la p. 482. H. F.

(3) *Voir* par exemple le traité de KLEIN, *Vorlesungen über das Ikosaeder*, et les travaux de Klein et de Gordan cités plus haut (I. B. *b*.).

(4) *Math. Ann.*, XVII, p. 133-138; 1880. *Leipz. Abh.*, p. 339-399; 1885. Consulter PICK, *Math. Ann.*, XXVIII, p. 309-318; 1887; *Wiener Ber.*, juin 1888, 7 pages; et mars 1889, 28 pages.

Pour ce qui est du genre $p = 2$, nous renvoyons surtout aux travaux de

C_4, les intégrales et les fonctions Θ correspondantes se modifient dans leur caractère suivant le domaine de rationalité que l'on a pris pour base. Klein [1] a fait voir que les formes invariantes dont on fait usage dans ce cas possèdent, en général, la propriété des combinants. Toutes ces recherches ont, en même temps, permis d'enregistrer des progrès dans la théorie géométrique [2] des C_4.

C. — Opérations symboliques et invariantes.

Nous arrivons maintenant au domaine plus étroit qui a trait aux opérations dont on fait usage dans la théorie des invariants. Celles-ci se répartissent en deux grandes classes, en opérations symboliques et en opérations réelles; ces dernières se composent d'opérations différentielles effectuées sur les formes, tandis que les premières appartiennent à l'Algèbre. En effet, on reconnaît facilement que le principe qui est à la base de ces méthodes symboliques se confond avec celui des *nombres idéaux* introduit dans la Science d'une manière générale par Kummer.

a. — Méthode symbolique et représentation graphique.

α. *École allemande.* — La méthode symbolique [3], introduite par Clebsch et Aronhold, et développée ensuite par Gordan et ses élèves, a atteint un certain degré de perfection. Elle a principalement pour but de ramener la théorie des invariants des formes d'un degré quelconque à celle de formes linéaires.

Dans l'Introduction, nous avons déjà tracé à grands traits

Klein, Burkhardt et Wiltheiss, publiés dans les *Math. Ann.* à partir du t. XXVII.

Quant au genre $p = 3$, consulter Pick, *Math. Ann.*, XXIX, p. 259-271; Klein, *Gött. Nachr.*, p. 191-194; 1888; *Math. Ann.*, XXXVI, p. 1-83; Wiltheiss, *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 1-23, et les *Mémoires* de Pascal dans les *Annali di Math.*, 2e série, XVII, XVIII; 1889, 1890.

(1) *Gött. Nach.*, p. 191-194; 1888. Voir encore Wirtinger, *Math. Ann.*, XL, 361-412; 1892.

(2) A ce sujet, on peut consulter Frobenius, *Journ. für Math.*, IC, p. 275-314, t. CIII, p. 139-183; 1888.

(3) Le lecteur, désireux de s'initier rapidement à ces méthodes, pourra consulter les *Vorlesungen* de Gordan, t. II, Ire Partie.

les bases sur lesquelles reposent les méthodes adoptées par les géomètres allemands. Après avoir démontré le théorème fondamental d'après lequel toute forme invariante peut être représentée à l'aide d'un produit symbolique, Clebsch ([1]) étendit son théorème à un système de formes contenant un certain nombre de formes linéaires. Au point de vue scientifique, l'emploi des symboles n'a cependant été justifié que plus tard, grâce à une proposition générale démontrée ([2]) par Gordan pour les formes binaires, par Study pour les formes ternaires, et par Pascal pour les formes à *n* variables.

Nous avons indiqué plus haut (IIe Partie, A, *a*)([3]) comment la méthode symbolique se rattache à la notion des réductants, et à celle des systèmes complets, relativement complets ou prolongés, notions introduites par Gordan. On doit à ce dernier encore un principe de translation symbolique (*Uebertragungsprincip*) ([4]) : si, pour une forme $f = a_x^n$, on suppose connu le système des invariants et covariants φ, de degré $m - 1$ par rapport aux coefficients, et tel que toute autre formation soit exprimable *linéairement* au moyen des φ, le principe en question permet de passer au système correspondant de degré *m*.

Tout récemment ([5]), Stroh est parvenu à simplifier, d'une façon remarquable, la méthode symbolique de Clebsch et Aronhold. Son procédé revient, au point de vue pratique, à rendre le plus petit possible le nombre des facteurs symboliques dont se compose un invariant. L'introduction des symboles fondamentaux lui

---

([1]) *Journ. für Math.*, LIX. p. 1-62; 1861; *Binaere Formen*, § 12. *Voir* aussi les démonstrations de DAHL *Zeuthen Tiddskr.*, 4e série, IV, p. 154-158; de GORDAN *Vorlesungen*, II, § 9, et celle de STUDY, *Methoden*, § 5.

Consulter encore CLEBSCH, *Göttinger Abh.*, XVII, p. 1-62; 1872 et *Math. Ann.*, II, p. 1-8; WAELSCH, *Math. Ann.*, XXXVII, p. 141-152; STUDY, *Leipz. Ber.*, p. 172; 1890 et une remarque par GORDAN, *Programm*. (Appendice).

([2]) *Vorlesungen* de Gordan, II, n° 117. — STUDY, *Math. Ann.*, XXX, p. 120-126 et *Methoden*, § 6. — PASCAL, *Batt. G.*, XXVI, p. 33-38, 102-103; *Rom. Acc. L. Rend.*, 4e série, IV, p. 119-124; *Rom. A. L. Mém.*, 4e série, V, p. 375-387.

([3]) Voir *Bulletin*, XIX_2, p. 87 et suivantes.

([4]) *Math. Ann.*, I, p. 90-101; 1869; XVII, p. 217-234, Chap. I; 1880. — Ne pas confondre ce principe avec celui qu'a donné CLEBSCH, et que l'on trouvera, par exemple, dans *Clebsch-Lindemann*, t. I, p. 274 (ou dans l'édition française, t. I, p. 342).

([5]) *Math. Ann.*, XXXVI, p 262-303, § 7; 1890.

permet de donner des expressions très simples pour les covariants et les péninvariants.

La méthode symbolique peut également s'étendre aux formes à plusieurs séries de variables soumises à des substitutions différentes. Parmi ces formes les plus importantes sont les combinants. Stroh a donné (1), pour ces derniers, une représentation symbolique qui permit à Study (2) d'étendre les résultats aux combinants de formes qui, à côté des variables x, contiennent encore les variables contragrédientes u.

On parviendra d'une façon analogue aux invariants et covariants des formes plus compliquées de l'espèce $\alpha_\xi^m a_x^n \ldots$, dans lesquelles figurent les différentes séries des x, ξ, ... Gordan (3) a donné, pour le domaine binaire, une représentation symbolique ne contenant qu'un seul symbole.

Rappelons enfin, pour terminer, que les principaux symboles de la théorie des groupes de transformations d'après Lie, le „Xf" de la transformation infinitésimale et le $(X_i X_k)$ (*Klammerausdruck*) ont été adaptés avec succès par Study au domaine plus spécial des transformations projectives (4).

β. *École anglaise.* — Si les méthodes signalées dans le paragraphe précédent possèdent, dans leur ensemble, un caractère uniforme, celles que l'on rencontre actuellement chez les auteurs anglais (5) présentent des tendances très diverses. On peut les examiner à trois points de vue différents : d'abord on constate l'introduction de représentations graphiques dans le but de faciliter l'étude des expressions de la théorie des formes, puis, inversement, le fait que notre domaine peut être considéré comme une branche de l'Algèbre (universelle) des matrices, enfin, le lien

---

(1) *Math. Ann.*, XXII, p. 393-405; 1883.

Une méthode analogue a été suivie par *Capelli* pour les formes quadratiques à deux séries binaires (*Batt. G.* XVII, p. 69-148; 1879), et par Le Paige pour des formes multilinéaires (*Belg. Bull.*, 3e série, II, p. 40-53; 1881).

(2) *Voir* son Traité *Methoden, etc.*, II, § 13.

(3) *Math. Ann.*, XXXIII, p. 372-389; 1889.

(4) *Methoden*, II, § 15.

(5) Dans ses derniers travaux, Cayley qui avait cependant créé la représentation symbolique, préféra faire usage des sources et des fonctions génératrices.

Par suite, C_0 restera une pareille source pour toute forme f_{n+1}, f_{n+2}, ... d'un ordre plus élevé. On désigne alors C_0 sous le nom de *péninvariant* (semi-invariant) de la série prolongée des valeurs a_0, a_1, a_2, ... Ces péninvariants sont indépendants de l'ordre n de la forme fondamentale; c'est là une proposition fondamentale que l'on doit à Mac-Mahon ([1]). Il en résulte une *partition symbolique*, procédé que l'on retrouve dans les principes que Sylvester a placés à la base d'une Algèbre universelle ([2]).

Cette méthode a permis à Cayley (*loc. cit.*) d'établir pour les péninvariants la fonction génératrice

$$\frac{x^j}{(1-x^2)(1-x^3)\ldots(1-x^j)},$$

dans le développement de laquelle le coefficient de x^w indique le nombre des péninvariants de degré j et de poids w, et linéairement indépendants.

En suivant une marche analogue, Mac-Mahon (*loc. cit.*) est parvenu à la fonction génératrice des *perpétuants*, c'est-à-dire des péninvariants qui ne sont pas fonction entière et rationnelle de péninvariants de degré moindre. Cette fonction prend la forme simple

$$\frac{x^{2j-1}-1}{2.3.4\ldots j}.$$

Cayley et Mac-Mahon ont calculé, d'après cela, des tables très étendues pour les péninvariants, les perpétuants et leurs syzygies.

([1]) *Am. J.*, VII, p. 26-47; 1884. Consulter Cayley, même Recueil, p. 1-25, 59-73 et *Quart. J.*, XX, p. 212-213; 1884.

([2]) *Am. J.*, t. V, p. 79-137, VI, p. 270-286; 1883 et dans le t. IV, un Mémoire de Peirce, p. 97-229; 1881.

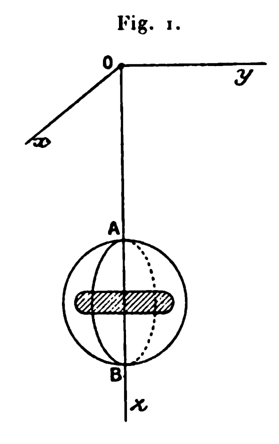
SUR LA RÉALISATION PHYSIQUE DU MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT DE RÉVOLUTION FIXÉ PAR UN POINT DE SON AXE;

PAR M. G. KOENIGS,
Professeur adjoint à la Faculté des Sciences de Paris.

Le problème d'un corps de révolution pesant, mobile autour d'un point de son axe est depuis longtemps classique et l'on s'est efforcé d'en reproduire le plus exactement possible les circonstances au moyen de divers appareils.

Un des plus répandus consiste en un anneau fixé à l'extrémité d'une tige OA; le tore AB a son axe dans le prolongement de OA

Fig. 1.



et se trouve maintenu par deux crapaudines placées en A et B et dans lesquelles s'engagent les extrémités de l'axe. On imprime au tore une rotation rapide autour de son axe, par rapport à l'anneau et c'est par le mouvement de ce système, le point O étant maintenu fixe et la tige OA tournant librement autour de O, que l'on prétend représenter et illustrer en une expérience le mouvement d'un corps de révolution fixé par un point de son axe.

En réalité, on a affaire à un problème bien plus compliqué et dès lors l'on doit se proposer de chercher quelles sont les conditions dans lesquelles on se rapproche le mieux des hypothèses qui servent de base aux calculs. C'est ce problème que nous nous proposons de résoudre.

Prenons OB pour axe Oz; Oy sera la perpendiculaire à Oz contenue dans le plan de l'anneau (assimilable à cause de sa minceur à une figure plane); enfin Ox sera perpendiculaire au plan de l'anneau. Le trièdre $Oxyz$ sera mobile par rapport à des axes fixes Ox_1, Oy_1, Oz_1 dont le dernier vertical et dirigé vers le bas. Nous appelons θ, φ, ψ les angles d'Euler qui fixent la position du trièdre mobile par rapport au trièdre fixe, enfin Φ sera l'angle d'un rayon tracé sur le tore avec l'axe Ox, en sorte que $\Phi' = \frac{d\Phi}{dt}$ représente la vitesse du tore autour de son axe.

Appelons A le moment d'inertie du tore par rapport à l'un quelconque des axes issus de O perpendiculairement à Oz, par C le moment d'inertie autour de l'axe Oz de révolution, enfin appelons A′, B′, C′ les moments d'inertie de l'anneau et de la tige OA par rapport aux axes Ox, Oy, Oz, qui sont les axes principaux relatifs au point O.

La force vive totale du tore, de la tige OA et de l'anneau sera

$$2T = A(p^2 + q^2) + C(r + \Phi')^2 + A'p^2 + B'q^2 + C'r^2,$$

où l'on a

$$p = \psi' \sin\varphi \sin\theta + \theta' \cos\varphi,$$
$$q = \psi' \cos\varphi \sin\theta - \theta' \sin\varphi,$$
$$r = \psi' \cos\theta + \varphi'.$$

Dans l'état actuel des choses, A′ étant différent de B′ et la différence A′ — B′ étant très loin d'être négligeable, le problème se trouve particulièrement compliqué et n'est même pas rigoureusement soluble. Un moyen de s'en tirer serait de rendre la masse de l'anneau négligeable vis-à-vis de celle du tore, mais cela n'est pas réalisable.

Il est un autre procédé qui rend, au contraire, le problème parfaitement accessible et qui permet de réaliser *rigoureusement* le mouvement qu'il s'agit de représenter.

Imaginons qu'on ait fixé dans le plan zOx un anneau pareil au premier, celui qui résulterait du premier par une rotation de 90° autour de Oz. Dans la chappe bi-annulaire ainsi réalisée l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de Oz. On a, il est vrai, augmenté le poids de la chappe, mais je me propose de prouver

que cette augmentation de poids est profitable et que, grâce à cette nouvelle disposition, *l'axe* Oz *est animé d'un mouvement synchrone à celui d'un solide de révolution fixé par un point de son axe et dans lequel on négligerait la masse de la chappe de support.* Le fait est, on le voit, entièrement analogue à celui qui réduit la théorie du pendule composé à celle du pendule simple synchrone.

Reprenons, en effet, l'expression de la force vive; l'hypothèse $A' = B'$ la réduit à la forme

$$2T = (A + A')(p^2 + q^2) + C(r + \Phi')^2 + C'r^2,$$

tandis que, si l désigne la distance du point O au centre de gravité G (situé sur Oz) de l'ensemble des corps mobiles, on a pour la fonction des forces

$$U = Pl\cos\theta,$$

P étant le poids total du tore, de la chappe et de la tige OA.

En tenant compte des formules qui donnent p, q, r, nous aurons pour la force vive totale

$$2T = (A + A')(\psi'^2\sin^2\theta + \theta'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta + \Phi')^2 + C'(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2.$$

Nous écrirons d'abord l'intégrale des forces vives

$$(A + A')(\psi'^2\sin^2\theta + \theta'^2) + C(\varphi' + \psi'\cos\theta + \Phi')^2 + C'(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2 = 2Pl\cos\theta + h_0,$$

et puis les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \Phi'}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \varphi'}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \psi'}\right) = 0.$$

Les deux premières donnent

$$(1) \qquad \varphi' + \psi'\cos\theta + \Phi' = \alpha,$$

$$(2) \qquad \varphi' + \psi'\cos\theta = \beta,$$

où α, β désignent deux constantes. En conséquence,

$$\Phi' = \alpha - \beta$$

est une constante, ce qui prouve que le tore conserve sa vitesse de rotation initiale dans la chappe.

L'équation relative à ψ' donne alors, en tenant compte des équa-

tions (1) et (2)

$$(3) \qquad (A + A')\psi' \sin^2\theta + (C\alpha + C'\beta)\cos\theta = \gamma = \text{const.},$$

tandis que l'équation des forces vives devient

$$(4) \qquad (A + A')[\psi'^2 \sin^2\theta + \theta'^2] = 2Pl\cos\theta + h,$$

où h est une constante arbitraire.

Or, les équations (2), (3) et (4) correspondent visiblement au mouvement du trièdre $Oxyz$ qui se produirait dans le cas d'un corps de révolution autour de Oz pour lequel $(A + A')$ serait le moment d'inertie autour d'un axe équatorial quelconque.

Ainsi le mouvement de Oz et de tout le trièdre $Oxyz$ sera bien synchrone a celui qui se produirait dans un cas théorique où la masse de la chappe serait négligée ([1]).

SUR LA PRÉCESSION DANS LE MOUVEMENT D'UN CORPS PESANT DE RÉVOLUTION FIXÉ PAR UN POINT DE SON AXE;

PAR M. J. HADAMARD.

Le mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point sur son axe dépend, comme on sait, des formules suivantes :

Soient u le cosinus de l'angle que fait l'axe du corps avec la verticale, φ l'angle du plan vertical qui contient l'axe avec un vertical fixe, on a

$$(1) \qquad \frac{du}{dt} = \sqrt{R(u)}, \qquad R(u) = (1 - u^2)(\lambda u + \mu) - (n' - nu)^2,$$

([1]) Je ferai observer que l'emploi d'une chappe formée de deux anneaux à angle droit permet de réduire l'épaisseur de chacun de ces anneaux, qui pourront être chacun moins lourd que ne doit l'être un anneau employé isolément. Notre procédé n'a donc pas pour effet de *doubler* le poids de la chappe. Il est certain qu'une très grande augmentation du poids entraînerait la nécessité, pour *certaines* expériences, d'une grande vitesse de rotation du tore. Mais on peut aisément éluder cet inconvénient.

après quoi, φ est donné par

$$(2) \qquad \varphi = \int \frac{n' - nu}{1 - u^2} \, dt.$$

Les nombres λ, μ, n, n' sont constants avec $\lambda > 0$; le polynome $R(u)$ a deux racines α, β comprises entre -1 et $+1$, et une troisième γ, entre $-\infty$ et -1.

Le paramètre u oscille périodiquement entre α et β.

Quant à l'angle φ, il varie toujours dans le même sens, si la quantité $\frac{n'}{n}$ n'est pas comprise entre α et β; mais, dans le cas contraire, il est alternativement croissant et décroissant. Il y a dès lors lieu de se demander si cet angle ne pourrait pas aussi varier périodiquement, auquel cas le lieu de l'axe du corps serait un cône fermé ne comprenant pas la verticale.

On sait qu'il n'en est rien et que *la variation totale de* φ, *correspondant à une période d'oscillation de* u, *est différente de* 0 *et de même signe que la variation élémentaire de cet angle au moment où* u *atteint la plus grande de ses deux valeurs limites.*

Mais, à ma connaissance, ce fait n'a pu être démontré jusqu'ici que par une discussion assez approfondie de fonctions elliptiques (voir le *Traité* d'Halphen).

Le raisonnement suivant conduit, au contraire, très simplement au même résultat.

Soit, pour fixer les idées, $\alpha < \beta$: la variation considérée est le double de l'intégrale

$$(3) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{n' - nu}{1 - u^2} \frac{du}{\sqrt{R(u)}},$$

le radical étant pris avec le signe $+$, puisque la variation correspondante de t doit être positive.

Or, je dis que l'on obtient la même valeur en prenant l'intégrale entre les limites $-\infty$ et γ (toujours avec le signe $+$ devant le radical).

Pour le démontrer, on intégrera la fonction sous le signe $\int$ le long d'un double contour : un contour extérieur constitué par

une très grande circonférence et un lacet partant de $-\infty$ et y revenant après avoir entouré le point γ; un contour intérieur entourant les points α, β.

La fonction à intégrer est uniforme dans l'aire ainsi délimitée (le radical étant pris avec le signe $+$, sur le contour $\alpha\beta$, au-dessous de l'axe réel, et sur le contour $-\infty\gamma$, au-dessus du même axe). L'intégrale est donc donnée par la somme des résidus relatifs aux points 1 et -1.

Or, si la quantité $\frac{n'}{n} = k$ est comprise entre α et β, ou plus généralement si elle est comprise entre -1 et $+1$, ces deux résidus sont égaux et de signes contraires. Désignant en effet par ε l'un des nombres ± 1, on a

$$R(\varepsilon) = -(n' - n\varepsilon)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{R(\varepsilon)} = \pm i(n' - n\varepsilon);$$

le signe étant le même pour $\varepsilon = +1$ et pour $\varepsilon = -1$ (car, dans les conditions où nous nous sommes placés, l'argument de $\sqrt{R(\varepsilon)}$ est $\varepsilon\frac{\pi}{2}$, et, d'autre part, $n' - n$ et $n' + n$ sont de signes différents). Il en résulte pour le résidu correspondant la valeur

$$-\frac{n' - n\varepsilon}{2\varepsilon\sqrt{R(\varepsilon)}} = \mp \frac{1}{2i\varepsilon}.$$

L'intégrale le long du double contour est donc nulle et la variation de φ peut s'obtenir par l'intégrale

$$\int \frac{n' - nu}{(1 - u^2)\sqrt{R(u)}} du$$

prise entre $-\infty$ et γ. Or ceci supprime toute difficulté, car cette nouvelle intégrale, dans le cas où $\frac{n'}{n}$ est compris entre -1 et $+1$, a tous ses éléments du même signe, celui de $-n$; ce qui fournit la conclusion demandée.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Otte (A.). — *Grenzbereiche und Flächenstücke kleinsten Flächeninhaltes der gewöhnlichen Schraubenfläche.* Inauguraldiss. In-8°, 32 p. Göttingen.

Picart (J.). — *Sur le mouvement d'un corps de figure variable.* In-8°, 23 p. Bordeaux, impr. Gounouilhou.

Schilling (Fr.). — *Beiträge zur geometrischen Theorie der Schwarz'schens-Function.* Inauguraldissert. In-8°, 100 p. Göttingen.

Weber (H.). — *Lehrbuch der Algebra.* (En 2 volumes). Tome I. Gr. in-8°, xv-653 p. 28 figures. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 16 m.

Hadamard (J.). — *Sur les mouvements de roulement.* In-8°, 25 p. Bordeaux, impr. Gounouilhou.

Helmholtz (H. v.). — *Handbuch der physiologischen Optik.* 2e édition, 9e livraison, avec figures. Gr. in-8°. Hamburg, Voss. 3 m.

Anthony (G.-C.). — *Elements of Mechanical Drawing.* Use of Instruments, Geometrical Problems, and Projection. Illustrated, Oblong. Boston. 6 sh. 6 d.

Gouilly (Alex.). — *Éléments et organes des machines.* In-8°, 411 p. avec figures. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Barbera (L.). — *Teoria delle equazioni differenziali duple.* In-8°, Bologna, Generalli. 4 L.

Demoulin (A.). — *Mémoire sur l'application d'une méthode vectorielle à l'étude des divers systèmes de droites.* In-8°, 118 p. Bruxelles, Castaigne. 3fr,50.

Gray (A.) and Matthews (G.-B.). — *A treatise on Bessel functions and their application to Physics.* In-8°, 286 p. London, Macmillan. 14 sh.

Lacour (E.). — *Sur des fonctions d'un point analytique à multiplicateurs exponentiels ou à périodes rationnelles* (Thèse). In-4°, 53 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Le Roux (J.). — *Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes* (Thèse). In-4°, 95 p. Paris, Gauthier-Villars et fils.

Niewenglowski (B.). — *Cours de Géométrie analytique*. T. II : Construction des courbes planes; Compléments relatifs aux coniques. In-8, 296 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 8 fr.

Sacerdote (G.). — *Le Livre de l'Algèbre et le problème des asymptotes de Simon Motot*. In-8°, 54 p. Versailles, imp. Cerf et Cie.

Autenheimer (F.). — *Elementarbuch der Differential- u. Integralrechnung in zahlreichen Anwendungen aus der Analysis, Geometrie, Mechanik, etc., für höhere Schulen und den Selbstunterricht*. 5e édition. Gr. in-8°, VIII-535 p. avec 157 figures. Weimar, Voigt. 9 m.

Cesàro (E.). — *Introduzione alla teoria matematica della elasticità*. In-8°. Torino, Bona. 6 L.

Habets (A.). — *Cours de Topographie*. 2e édit. In-8°, 226 p. avec fig. Liége, Baudry. 8 fr.

Handwörterbuch *der Astronomie, herausgegeb. von W. Valentiner*. Mit Abbildgn (en 12 livraisons environ). 1re livraison. Gr. in-8°, 128 p. Breslau, Trewendt. 3 m. 60 pf.

Henry (C.). — *Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques*. In-8°, 126 p. avec fig. Paris, Nony et Cie.

Appell (P.). et E. Goursat. — *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Étude des fonctions analytiques sur une surface de Riemann*. In-8°, x-542 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars et fils. 16 fr.

Biermann (O.). — *Elemente der höheren Mathematik. Vorlesungen zur Vorbereitung des Studiums der Differentialrechnung, Algebra u. Functionentheorie*. Gr. in-8°, XII-381 p. Leipzig, Teubner. 10 m.

Marggraf (B.). — *Primitive Gruppen, welche eine transitive Gruppe geringeren Grades enthalten*. *Progr.* Gr. in-4°, 31 p. Berlin, Gaertner. 1 m.

Schafheitlein (P.). — *Ueber die Produckte der Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen*. Gr. in-4°, 29 p. Berlin, Gaertner. 1 m.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Dr Emil HAENTZSCHEL, Oberlehrer an der III Realschule zu Berlin. — **Studien ueber die Reduction der Potentialgleichung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.** Ein Anhang zu Heine's Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, Georg Reimer, 1893.

Il s'agit d'une réduction de l'équation $\Delta V = 0$ à des équations différentielles ordinaires, indiquée par M. Wangerin (¹) pour certains corps de révolution. L'auteur généralise les résultats de M. Wangerin, et obtient des méridiennes du seizième ordre au lieu du quatrième. Mais son objet principal est l'étude de ces équations différentielles auxquelles conduit la réduction précitée, la façon dont elles se rattachent à des types d'équations connues : équation de Lamé, équation de Bessel, et d'autres considérées par Heine dans son *Handbuch der Kugelfunctionen*.

Toutes ces équations peuvent par des transformations simples se ramener à la forme

$$\varphi(x)\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\varphi'(x)\frac{dy}{dx} + \psi(x)y = 0,$$

φ et ψ étant des fonctions rationnelles entières de degrés respectivement s et $s - 2$.

L'auteur cherche aussi des développements en série des intégrales de ces équations aux environs des points singuliers et dans quels cas ces intégrales se ramènent à des transcendantes plus simples.

Une équation analogue à celle de Laplace, à savoir l'équation

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial t_1},$$

à laquelle on est conduit dans la théorie analytique de la chaleur, a été ramenée par Heine, dans le cas des corps de révolution du

(¹) Wangerin, *Reduction der Potentialgleichung für gewisse Rotationskörper auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.* (*Preisschriften der furstlich Jablonowoski'schen Gesellschaft der Wissenschaften*, n° 18; Leipzig, 1875).

second degré, à une équation différentielle qu'il intègre par les fonctions cylindriques.

Cette équation est de la forme, ou tout au moins peut être ramenée à la forme générale indiquée plus haut.

C'est cette équation que M. Haentzschel étudie dans la dernière partie de son travail, d'après les mêmes principes qu'il a appliqués aux précédentes. Il répond ainsi à un desideratum exprimé par Heine lui-même dans son *Handbuch der Kugelfunctionen*.

E. Cahen.

HERMANN GRASSMAN'S GESAMMELTE MATHEMATISCHE UND PHYSIKALISCHE WERKE, auf Veranlassung der Mathematisch-Physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Lüroth, Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der jüngere, Scheffers, herausgegeben von Friedrich Engel. Erstes Bandes erster Theil : *Die Ausdehnungslehre von 1844 und die geometrische Analyse.* 1 vol. in-8°, xii-435 p. Leipzig, Teubner, 1894.

Grassmann appartient au petit groupe d'hommes dont la pensée n'a été bien comprise qu'après eux, et qui étaient destinés à une gloire posthume. Il y aura toujours, sans doute, des hommes qui ne seront point compris de leur vivant, et il convient de les plaindre dans tous les cas; mais ils peuvent se consoler en relisant l'histoire des illustres méconnus, d'autant plus sûrement qu'en renvoyant la réalisation de leurs espérances à un temps qu'ils ne verront pas, ils sont certains de ne pas connaître de déception. C'est ainsi que l'injustice qui a frappé quelques grands hommes sert à adoucir beaucoup d'amertumes.

L'injustice dont Grassmann a été victime n'a d'ailleurs pas été complète : l'importance de ses idées a été comprise par quelques-uns de ses contemporains (non des moindres) et il a formé un petit groupe de disciples : il était plutôt de ceux que l'on connaît, mais que l'on ne lit guère, ou que l'on a toujours l'intention de lire plus tard, et, en fait, quelques-unes de ses idées, et même de ses expressions, se sont répandues peu à peu, et sont descendues jusque dans l'enseignement élémentaire, sans que tous ceux qui se les sont assimilées aient toujours bien su quelle en était la vé-

ritable origine. Il convient de dire aussi que Grassmann n'écrivait pas pour la foule, si tant est que ce mot puisse s'appliquer à l'ensemble des mathématiciens : Grassmann ne voulait s'adresser qu'aux mathématiciens qui sont philosophes; on en trouve à coup sûr, mais, s'ils sont rares, plus rares encore sont ceux qui ne séparent pas la Philosophie des Mathématiques et qui philosophent en faisant des Mathématiques; tel était Grassmann, et ce mélange du langage philosophique et de faits géométriques dont la valeur n'est d'ailleurs pas contestable, est fait pour dérouter plus d'un lecteur de bonne volonté : c'est toujours le général que Grassmann a en vue, et il le dépouille si bien de tout attribut particulier qu'il lui laisse à peine de quoi exister. Dans des Notes très intéressantes, les savants éditeurs ont montré comment Grassmann avait, parfois, dépassé le but et comment, si l'on voulait se tenir sur un terrain solide, il convenait, pour préciser l'objet propre de la Géométrie, sous sa forme la plus abstraite et la plus générale, d'avoir recours aux conceptions de M. Sophus Lie. Les vues de Grassmann, pour avoir été incomplètes, n'en restent pas moins singulièrement profondes et c'est un juste hommage que les éditeurs rendent à sa mémoire en entreprenant cette belle édition de ses œuvres complètes. C'est M. F. Klein qui s'est fait le promoteur de ce travail : on sait assez combien ce géomètre, à qui l'on doit tant de résultats définitifs et précis, se plaît lui-même aux vues d'ensemble et aux conceptions philosophiques; on trouvera naturel qu'il ait pris en main la cause de Grassmann. Les éditeurs ont mis tous leurs soins à établir le texte, en signalant toutes celles des divergences, soit entre les diverses éditions, soit avec les manuscrits, qui en valaient la peine; de plus, ils se sont efforcés de le rendre plus lisible par la disposition typographique; ce n'est pas un mince service rendu au lecteur.

La *Première Partie du premier Volume* contient l'*Ausdehnungslehre*, conforme à l'édition de 1844 et la *Geometrische Analyse*. Chacun sait que c'est dans le premier de ces Ouvrages que Grassmann a exposé ses idées sur le sens des opérations à dénomination arithmétique, et qu'il a montré comment ces opérations pouvaient être transportées dans le domaine de la Géométrie de façon à renouveler cette science.

Quant à la *Geometrische Analyse*, c'est, au fond, comme le

remarquent les éditeurs, une suite de l'*Ausdehnungslehre*, puisqu'elle contient la théorie du *produit intérieur*, et diverses applications à la Mécanique, qui devaient évidemment prendre place dans la seconde Partie de l'*Ausdehnungslehre*. En fait, elle a été écrite pour répondre à une question mise au concours par la *Jablonowski'sche Gesellschaft* pour l'année 1845. Cette question se rapportait à une lettre de Leibniz à Huygens, où l'illustre philosophe mathématicien expose des vues très profondes sur un symbolisme destiné à figurer abstraitement la position des éléments géométriques, et susceptible, à ce qu'il croyait, d'être assez développé pour se substituer à la description et à la figuration des objets réels : du même coup, Leibniz touche aux hypothèses fondamentales de la Géométrie. Sans doute, le travail de Grassmann ne pouvait répondre que d'une façon particulière aux questions si vastes que Leibniz avait soulevées ; c'était toutefois une réponse, et dont la valeur intrinsèque était incontestable. Möbius crut devoir résumer quelques-uns des résultats essentiels auxquels Grassmann était parvenu, dans un langage plus concret, et qui pût être saisi facilement par tous les mathématiciens ; sa Note a été reproduite à la fin du Tome I de ses Œuvres.

Cette édition des Œuvres de Grassmann fait le plus grand honneur à la piété de ceux qui l'ont entreprise : elle rendra d'incontestables services à tous ceux qu'intéresse la Philosophie de la Science, où Grassmann a pénétré profondément, et l'histoire du développement des idées mathématiques, où son influence semble indéniable. J. T.

BACHMANN (P.). — Zahlentheorie. Versuch einer Gesammtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptheilen. Zweiter Theil : *Die analytische Zahlentheorie*. 1 vol. in-8°, XVIII-494 p. Leipzig ; Teubner, 1894.

Nous avons parlé récemment (1) de la première Partie de la *Zahlentheorie* de M. Bachmann. La seconde Partie, que nous annonçons aujourd'hui, ne peut manquer d'être bien accueillie :

(1) Voir *Bulletin*, t. XVII$_1$, p. 18.

l'intérêt propre des sujets qui y sont traités, la façon dont ils sont reliés et développés assurent à ce volume de nombreux lecteurs : sa publication, d'ailleurs, comble une lacune. Les recherches qu'il résume, et dont plusieurs sont parmi les plus belles qu'il y ait en Mathématiques, n'avaient guère été rassemblées, et il semble bien, après la lecture du livre de M. Bachmann, que le temps était venu de le faire.

L'auteur s'est d'ailleurs limité : d'une part, il est resté dans le domaine du nombre entier réel; d'autre part, sauf sur un point très particulier, il a laissé de côté les applications de la théorie des fonctions elliptiques à la théorie des nombres : ces applications, comme il le dit lui-même, doivent trouver leur place dans un ouvrage spécial; on peut souhaiter que M. Bachmann nous donne bientôt ce nouveau livre. Quoi qu'il en soit, la matière de celui-ci est assez riche.

Après avoir rappelé quelques notions élémentaires sur les séries et produits infinis, l'auteur établit quelques-uns des résultats qui ont leur origine dans la généralisation de l'identité d'Euler

$$\prod_s \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s},$$

ou dans les recherches du même Euler sur la partition des nombres. Ces deux premiers Chapitres, où l'on ne rencontre guère que des propositions faciles et d'une rare élégance, sont bien faits pour introduire le lecteur dans un sujet, qui va s'élever de suite, avec les recherches célèbres de Lejeune-Dirichlet sur les séries de la forme

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{k_n^{1+\rho}},$$

sur l'infinité de nombres premiers contenus dans toute progression arithmétique dont le premier terme et la raison sont des nombres entiers premiers entre eux, enfin sur le nombre de classes des formes quadratiques d'un déterminant donné D. Pour transformer l'expression de ce nombre de classes, où figure la

somme de la série

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n},$$

il est nécessaire d'avoir à sa disposition l'expression des sommes connues sous le nom de *sommes de Gauss*. A ces sommes, M. Bachmann consacre un intéressant Chapitre, où il résume les diverses méthodes que l'on possède pour les évaluer, et où il indique en particulier comment elles se relient à la transformation des fonctions elliptiques. Revenant ensuite à la théorie des formes quadratiques, il reprend la question du nombre de classes, développe la notion de l'espèce, et donne finalement l'extension aux formes quadratiques du théorème sur l'infinité de nombres premiers contenus dans une progression géométrique.

L'ensemble des belles théories que l'on vient d'énumérer constitue la première partie du livre de M. Bachmann; le reste va être consacré au développement de questions, dont quelques-unes, comme la recherche de la valeur moyenne d'une fonction numérique, ont déjà été posées incidemment, en sorte que le lecteur, lorsqu'il pénètre dans ce nouvel ordre de recherches, le soupçonne déjà et sait qu'il est nécessaire d'en poursuivre l'étude. Il développe tout d'abord les principales conséquences du lieu bien connu entre les deux formules

$$f(n)=\sum_{k=1}^{k=\infty}F(Kn),\qquad F(1)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\mu(n)f(n),$$

relatives à deux fonctions numériques $f(n)$, $F(n)$, et où $\mu(n)$ désigne zéro lorsque n est divisible par le carré d'un nombre premier autre que un, l'unité lorsque n est égal à 1, et, dans les autres cas, l'unité affectée du signe + ou du signe — suivant que les facteurs premiers de n sont en nombre pair ou impair. On trouvera là de curieuses relations, dues pour la plupart à MM. Lipschitz, Cesàro, G. Cantor; signalons en outre l'étude de la fonction de Riemann

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^s}$$

et en particulier, la formule

$$\zeta(s, a, m) = \left(\frac{2\pi}{m}\right)^s \frac{\Gamma(1-s)}{\pi} \sum_{n=1}^{n=m} \zeta(1-s, a, m) \cos\left(\frac{s-1}{2}\pi + \frac{2an\pi}{m}\right),$$

où, a, m désignent des entiers positifs et où $\zeta(s, a, m)$ est la somme de la série convergente

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{1}{(a+km)^s}.$$

Cette formule, qui est due à M. Hurwitz, contient comme cas particulier $(a = m = 1)$ une proposition bien connue de Riemann ; elle conduit à d'intéressantes conclusions relatives aux fonctions qui interviennent dans la détermination du nombre de classes de formes quadratiques de déterminant donné.

M. Bachmann aborde ensuite la question du nombre de nombres premiers inférieurs à une limite donnée : il développe les recherches de MM. Mertens et Tchebychef, ainsi que celles de Riemann. Il analyse aussi dans une Note placée à la fin du volume un intéressant travail de M. A. Piltz sur le même sujet.

Le dernier Chapitre de son livre est consacré aux valeurs moyennes et asymptotiques des fonctions numériques : on y trouvera les résultats fondamentaux que l'on doit à Dirichlet et bon nombre d'autres propositions obtenues en poursuivant la voie qu'a ouverte cet illustre géomètre. Signalons en particulier la solution, d'après M. Lipschitz, de ce problème. En désignant par $f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$ une fonction homogène entière, à coefficients entiers des variables $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ et par $c_1, c_2, \ldots, c_r$ des fonctions homogènes des mêmes variables, telles que l'égalité et les inégalités

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_\nu) = m,$$
$$c_1 > 0, \quad c_2 > 0, \quad \ldots, \quad c_r > 0,$$

où m désigne un nombre entier, n'admettant qu'un nombre fini $\varphi(m)$ de solutions en nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_\nu$ sans autre commun diviseur que l'unité, trouver une expression asymptotique de $\varphi(m)$. La théorie des formes quadratiques fournit de belles applications du résultat obtenu par M. Lipschitz.

Il convient d'ajouter que le livre de M. Bachmann, composé avec un grand soin, de manière à bien mettre en lumière la suite des idées, et le lien entre des questions dont la connexité surprend tout d'abord le lecteur, est plein de renseignements bibliographiques et historiques, qui en augmentent encore la valeur.

J. T.

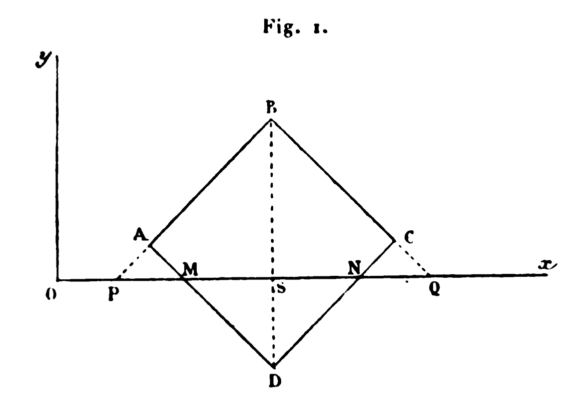
MÉLANGES.

SUR QUELQUES NOUVEAUX MÉCANISMES : PROJECTEUR, ELLIPSOGRAPHE, ELLIPSOÏDOGRAPHE ET HYPERBOLOGRAPHE;

PAR M. N. DELAUNAY.

1. Théorème. — *Lorsque deux points* M *et* N (*fig.* 1) *d'un losange articulé* ABCD *situés à égales distances du sommet* D *parcourent une droite fixe* Ox *et que le sommet* B *décrit une courbe quelconque, le sommet* D *décrit la projection orthogonale rabattue sur le plan de la trajectoire du point* B.

Fig. 1.



Prolongeons les côtés BA et BC jusqu'à l'intersection avec la droite Ox aux points P et Q. Quatre points P, M, N, Q, qui sont, dans une position particulière du losange, en ligne droite, sont

constamment en ligne droite. Donc

$$BP = BQ = \text{const.},$$
$$MD = ND = \text{const.}$$

Les triangles PBQ et MDN sont semblables et leurs hauteurs SB et SD sont proportionnelles aux côtés. Donc on a

$$\frac{SB}{SD} = \frac{PB}{MD} = \text{const.}$$

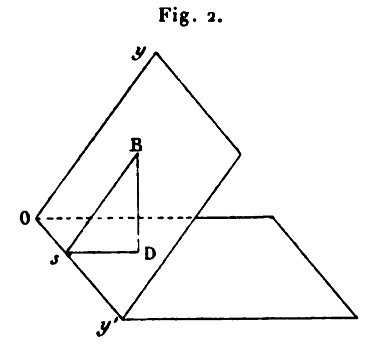
En considérant les perpendiculaires SB et SD à la droite Ox comme les ordonnées et la droite Ox comme l'axe des abscisses, on voit que les abscisses des points D et B sont égales et que le rapport $\frac{SB}{SD}$ des ordonnées est constant. Or, la même correspondance existe entre les coordonnées d'un point B (*fig.* 2) et celles de sa projection. Donc le point D décrit la projection de la trajectoire du point B. Ce qu'il fallait démontrer.

L'angle de projection α est défini par la formule

$$\cos\alpha = \frac{SD}{SB} = \frac{MD}{PB}.$$

J'appelle *projecteur* un mécanisme qui se compose d'un losange articulé ABCD, dont les points M et N équidistants du

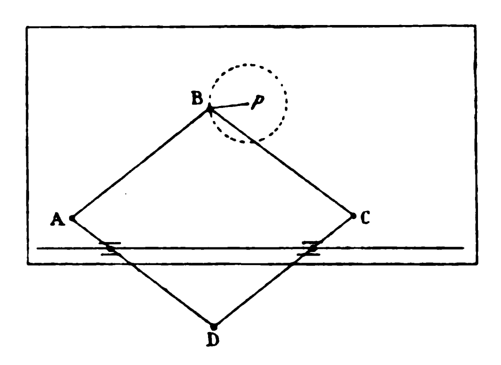
Fig. 2.



sommet D sont contraints de parcourir une droite fixe, soit à l'aide d'une rainure, soit à l'aide d'un mécanisme de Hart ou celui de M. Peaucellier.

2. *Ellipsographe.* — Je nomme ainsi un projecteur, dont le point B décrit un cercle au moyen d'une tige pB (*fig.* 3) tournant

Fig. 3.



autour d'un centre fixe p. Dans ce mécanisme, le point D décrit la projection du cercle, c'est-à-dire une ellipse. Le grand axe de l'ellipse est égal au diamètre du cercle. La longueur δ du petit axe est définie par la formule

$$\frac{\delta}{2\,\mathrm{B}p} = \frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{PB}}.$$

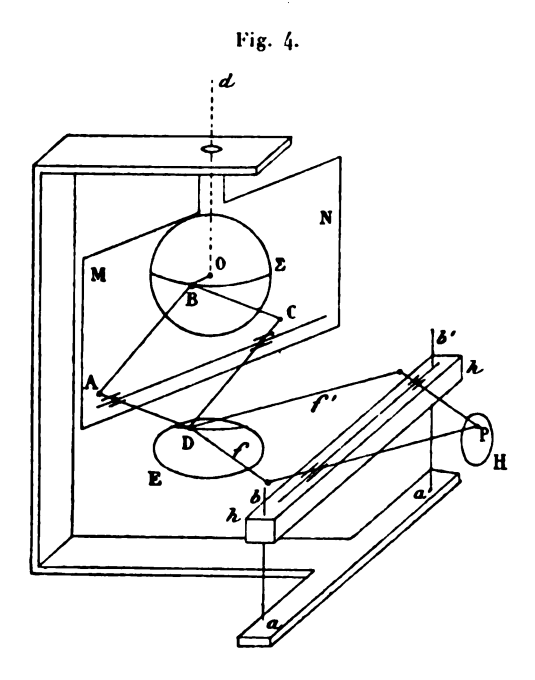
En variant les distances DM et DN, on varie l'excentricité de l'ellipse.

En ne variant que la longueur de la tige pB, *on obtient une série des ellipses semblables.*

3. *Ellipsoïdographe.* — Je nomme ainsi un mécanisme (*fig.* 4) qui se compose de deux ellipsographes. Le support MN du premier ellipsographe peut tourner autour d'un axe vertical fixe Od. On voit facilement que le point B reste sur la surface d'une sphère. Chaque méridien de cette sphère Σ se transforme au moyen de l'ellipsographe en une ellipse et toutes ces ellipses forment un ellipsoïde de gyration E. Donc le point D parcourt cet ellipsoïde de gyration E. Un second ellipsographe transforme chaque parallèle de l'ellipsoïde E en une ellipse et toutes ces ellipses forment un ellipsoïde à trois axes H, parce que dans le second ellipsographe, aucune constante ne varie, à l'exception du rayon du

cercle décrit par le point D, et, par conséquent, les ellipses horizontales décrites par le point P, étant semblables entre elles et ayant de grands axes égaux aux diamètres des parallèles de l'ellipsoïde E, peuvent être considérées comme des sections parallèles d'un ellipsoïde à trois axes.

Fig. 4.



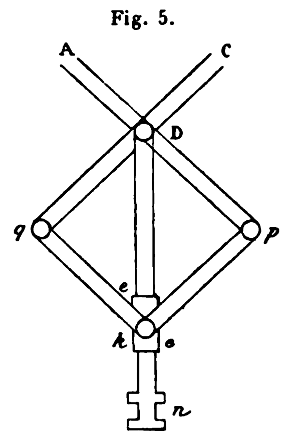
Pour que le second ellipsographe puisse transformer toutes les parallèles de l'ellipsoïde E, il faut que le support *hh* puisse avoir un mouvement dans lequel tous ses points parcourent des droites verticales.

On peut le faire à l'aide de deux guides en aiguille *ab* et *a' b'*, qui percent le support *hh*. Mais on le ferait mieux avec les mécanismes de Hart, en suivant la méthode bien connue de M. Darboux. Ainsi le point P de l'ellipsoïdographe parcourt la surface d'un ellipsoïde à trois axes.

Il se présente ici une difficulté dans la construction de la charnière D portant quatre tiges situées dans des plans différents. Pour surmonter cette difficulté, il faut prolonger les tiges AD et CD, comme c'est indiqué sur la *fig.* 5, et construire un losange

de ces prolongations Dp et Dq et de tiges pk et qk. En articulant à la charnière D, une tige Dn que nous faisons passer à travers un manchon ee articulé à la charnière k, nous obtenons un point n qui reste toujours sur la même verticale que D, à une distance constante du point D.

Fig. 5.



Lorsque le point D parcourt un ellipsoïde de gyration E, le point n parcourt un ellipsoïde identique, mais placé plus bas, et c'est ce dernier ellipsoïde qui sera transformé par l'ellipsographe horizontal, dont les tiges f et f' (*fig.* 4) doivent être articulées à la cheville n.

4. *Hyperbolographe*. — Je nomme ainsi un mécanisme composé d'un losange articulé ABCD (*fig.* 6), dont les deux sommets A et C parcourent une rainure rectiligne Oy. Deux tiges

$$CM = AM < CD$$

sont articulées entre elles au point M, qui parcourt une rainure rectiligne $\delta\delta$.

Soient O l'origine et Oy l'axe des ordonnées. Désignons par (x', y') les coordonnées du point M et par (x, y) celles du point D. Soient

$$CD = m,$$

$$CM = n,$$

$$\tang \delta OX = k,$$

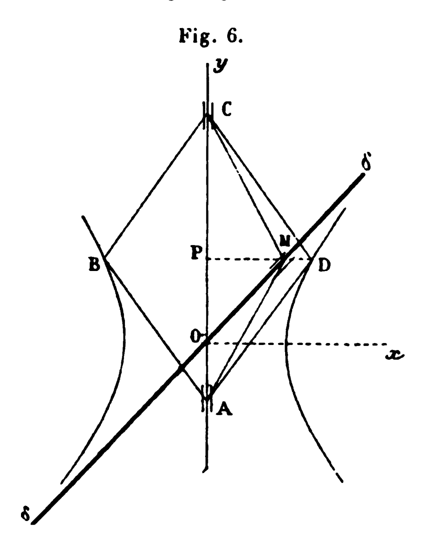
On a

$$x'^2 = n^2 - \mathrm{CP}^2 = n^2 - (m^2 - x^2),$$

ou

(1) $$x'^2 = x^2 - (m^2 - n^2)$$
$$y' = y.$$

Fig. 6.



L'équation de la droite O δ est

$$y = kx',$$

ou

$$y^2 = k^2 x'^2.$$

En portant ici la valeur de x' tirée de (1), on a

$$y^2 = k^2 x^2 - k^2(m^2 - n^2),$$

ou enfin

$$\frac{x^2}{m^2 - n^2} - \frac{y^2}{k^2(m^2 - n^2)} = 1,$$

ce qui est l'équation d'un hyperbole ayant δδ pour l'asymptote. Donc le point D décrit une branche de l'hyperbole. Le point B décrit l'autre branche à cause de la symétrie.

Par cet appareil, un trait rectiligne, fait par le point M, est transformé en un mouvement hyperbolique de deux points D et B, qui viennent aux sommets de l'hyperbole, lorsque le point M vient en O.

RAPPORT SUR LES PROGRÈS DE LA THÉORIE DES INVARIANTS PROJECTIFS;

PAR M. FR. MEYER (DE CLAUSTHAL).

Traduction annotée par H. FEHR.

DEUXIÈME PARTIE.

(SUITE.)

b. — Opérations invariantes non symboliques.

Nous passerons en revue les principales opérations différentielles effectuées sur les formes invariantes dans le but d'en déduire de nouvelles formes. Le cas particulièrement important où une pareille opération conduit à la valeur zéro, sera traité plus loin (II, c, b, ζ); il en est de même des opérations différentielles effectuées sur les réciprocants et les péninvariants (II, C, $c\alpha$ et II, B, a). Ces opérations, par leur nature même, ou du moins sous une certaine modification (1), possèdent *la propriété de l'invariance,* c'est-à-dire que le résultat est le même, que l'on effectue d'abord l'opération pour soumettre ensuite les variables à une substitution linéaire, ou que l'on procède inversement.

D'après leur développement historique, ces procédés se répartissent en ceux qui se rapportent soit aux variables, soit aux coefficients de la forme, soit enfin aux coefficients de la substitution; ces trois espèces de grandeur peuvent cependant être considérées, d'une façon commune, comme coefficients de formes linéaires.

Il nous est impossible, dans les limites que nous nous sommes imposées, d'approfondir la signification de ces opérations, ainsi que leurs relations mutuelles; nous renverrons, à cet effet, au

(1) STUDY, *Methoden, etc.*, p. 175. *Voir* aussi LIE-SCHEFFERS, *Vorlesungen über cont. Gruppen*, Leipzig, 1893.

Traité de Study et aux *Vorlesungen* (t. II, 1re Partie) de Gordan.

2. *L'opération d'Aronhold.* — On réunit en général sous ce nom toutes les opérations de la forme

$$D_{pq} \equiv \sum_i q_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

les p_i, q_i étant soumis aux mêmes substitutions et constituant par ce fait deux séries cogrédientes de variables.

Considérons d'abord le cas dans lequel les p et q sont les variables ordinaires (ponctuelles) de la forme : c'est le cas que l'on désigne généralement sous le nom d'*opération polaire*.

L'opération polaire a pénétré de bonne heure dans la Géométrie projective et en est même devenue la base ([1]). Dans la théorie des formes, par contre, elle n'occupe une place importante que depuis que l'on est parvenu à montrer que toutes les autres opérations différentielles peuvent non seulement se ramener à l'opération polaire, mais que l'on peut, de plus, les exprimer algébriquement sous forme explicite en fonction de celle-ci.

Considérons en premier lieu les développements en séries ([2]) qui ont pour but de réduire des formes à plusieurs séries cogrédientes de variables, à d'autres formes d'un nombre moindre de séries. Gordan et Clebsch furent les premiers à examiner de pareilles réductions ([3]). Clebsch ([4]) et Capelli ([5]) ont traité le problème général à deux points de vue différents; mais c'est à Capelli ([6]) que revient le mérite d'avoir placé l'opération polaire comme fondement de toute la théorie des formes. Ce point de vue se fait déjà jour dans son Mémoire de 1882, dans lequel il se propose la recherche du nombre de covariants indépendants d'un

---

([1]) *Voir* par exemple THIEME, *Math. Ann.*, XXVIII, p. 133-151; 1887.
([2]) *Voir* plus loin le paragraphe II, C, *b*, δ.
([3]) GORDAN, *Math. Ann.*, V, p. 95-122; 1872. — CLEBSCH, *Binäre Formen*, § 7.
([4]) *Göttinger Abh.*, XVII, p. 1-62; 1872.
([5]) Les indications bibliographiques sont données plus loin, p. 256.
([6]) Consulter son célèbre Mémoire *Fondamenti, etc.*, 1882.

ordre et d'un degré donnés et appartenant à un système de formes données.

Plus tard [1], Capelli prend comme point de départ n séries de ν variables homogènes $(x_1, x_2, \ldots, x_\nu)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$, ..., pour étudier les relations qui existent entre les $N = n^2$ opérations *élémentaires* D_{xx}, D_{xy}, D_{xz}, ..., D_{yx}, D_{yy}, ... Les N opérations étant prises dans un ordre quelconque D_1, D_2, ..., D_N, l'auteur montre que toute forme F des D peut être ramenée à l'expression

$$F = \sum C D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_N^{\alpha_N}.$$

Il examine ensuite le problème général qui consiste à déterminer l'opération la plus générale F qui peut être permutée avec toute autre opération de même espèce (en particulier avec chaque opération élémentaire); l'auteur fait voir que F doit être une fonction symétrique de n séries de variables et être exprimable au moyen des n opérations simples; celles-ci sont linéairement indépendantes et doivent admettre chacune la propriété de la permutabilité.

Il y a lieu de rappeler ici que l'opération polaire joue également un rôle fondamental important dans la méthode symbolique de Gordan [1].

Nous arrivons maintenant à l'*opération d'Aronhold,* effectuée sur les colonnes des coefficients (p_i), (q_i), (r_i), ... d'une transformation linéaire (ponctuelle). Cette opération se rattache très étroitement à l'opération polaire. En effet, Aronhold a établi cette proposition générale que les coefficients de la transformée développée suivant les nouvelles variables, étaient des polaires de la forme primitive. Il en résulte, comme l'a fait voir Gram [2], que

---

(1) Capelli a réuni ses différentes recherches sur ce sujet, dans les *Math. Ann.*, XXXVII, p. 1-37; 1891. *Voir* encore *Nap. Rend.*, XXV, p. 134-144; 1886. Même Recueil, 2e série, I, p. 110-115, 236-242; 1887. *Atti R. Acc. Nap.*, 2e série, I, 17 pages. *Math. Ann.*, XXIX, p. 331-338; 1887.

(1) *Voir* ses *Vorlesungen*, II, § 2, et pour le domaine ternaire les *Math. Ann.*, XVII, p. 217-234; 1880. Consulter aussi PASCAL, *Napoli Rend.*, 2e série, I, p. 200-207; 1887.

(2) *Math. Ann.*, VII, p. 230-240; 1874.

l'on obtient le système des $n(n-1)$ (1) équations différentielles caractéristiques d'un invariant J d'une série de formes de n variables, en écrivant celui-ci au moyen des coefficients transformés, J devenant ainsi J_1, et en égalant à zéro le résultat des opérations polaires $D_{pq} (p \neq q)$, effectuées sur J_1.

Pour les formes binaires, Bruno (2) a donné un procédé permettant d'obtenir directement ce système d'équations différentielles.

L'opération d'Aronhold modifiée

$$D_{ba} = \sum a_i \frac{\partial}{\partial b_i},$$

où les a_i et les b_i correspondent aux coefficients de deux formes f_n et φ_n est également d'un usage fréquent. On a déjà eu recours à cette opération au début de notre théorie, pour étendre la notion et la formation de l'invariant J d'une forme f_n à plusieurs formes f_n, φ_n, ...

Ce procédé a été appliqué aux formes linéaires par Clebsch (3), qui l'a établi comme base de sa méthode symbolique. Tant que les b sont indépendants des a, l'opération $D_{ba}J = DJ$ peut être répétée sans difficulté; on déduira D^2J de DJ, comme on a obtenu DJ à l'aide de J, etc.

Mais s'il existe entre a et b une relation (covariante) quelconque, il faut avoir recours aux formules récurrentes établies par Gordan (4), ou, ce qui théoriquement est préférable, il faut faire usage de certains développements en série.

Gordan se sert aussi de l'opération d'Aronhold pour la formation des *combinants* (*loc. cit.*, § 6); J sera un combinant de f et φ, dès que DJ est identiquement nul, et réciproquement. L'extension à plus de deux formes ne présente aucune difficulté.

Mais s'il existe une relation entre les formes $f, \varphi, \ldots$, on se trouve,

(1) Les n autres équations qui figurent dans le Mémoire d'Aronhold indiquent simplement que les invariants sont homogènes et isobares par rapport aux coefficients de la forme primitive.

(2) Consulter sa *Théorie des formes binaires* (1876); traduction allemande par Walter et Nœther (1881).

(3) On en trouve un exposé dans les *Vorlesungen*, CLEBSCH-LINDEMANN, I, p. 183 et suivantes.

(4) *Vorlesungen* de Gordan, II, § 5.

pour le moment, en présence d'un cas dont l'étude est encore incomplète.

On ne s'est encore occupé que d'un cas spécial dans les domaines binaire et ternaire. Ce cas, très important en Géométrie, est celui d'une forme f et de son covariant φ et tel que l'on ait

$$Df = \varphi, \qquad D\varphi = Mf,$$

M étant un facteur constant ([1]).

Le procédé que l'on suit pour la formation des *évectants* n'est qu'un cas particulier de l'opération d'Aronhold; il a pris une place importante dans la formation des systèmes invariants ([2]). Gordan ([3]) a appliqué cette méthode aux équations différentielles de l'invariant J d'une forme binaire pour leur donner une interprétation dans la théorie des formes; il arrive au théorème suivant :

Le $(n-1)^{ième}$ composé (Ueberschiebung) de la forme primitive avec le premier évectant de J *est identiquement nul, tandis que le $n^{ième}$ composé reproduit l'invariant (à un facteur numérique près).*

Réciproquement, cette propriété permet d'établir immédiatement les équations différentielles.

β. *Le procédé de la composition et l'opération* Ω. — C'est sur la composition des covariants (*Ueberschiebungsprocess*) que repose toute la partie pratique de la théorie des formes.

D'une manière générale, les composés peuvent être définis comme des formations invariantes simultanées de deux ou plusieurs formes d'un nombre quelconque de séries de variables et linéaires par rapport à chaque série de variables.

Nous traiterons cette question très brièvement, vu qu'elle est exposée avec beaucoup de clarté dans le Traité de Gordan.

Soient $F_n(x)$ et $\Phi_\nu(u)$ deux formes se correspondant par dua-

---

([1]) *Loc. cit.*, p. 74. *Voir* aussi GUNDELFINGER, *Math. Ann.*, IV, p. 164-168; 1871.

([2]) *Loc. cit.*, p. 128. Consulter STUDY, *Methoden, etc.*, p. 41 et 49.

([3]) *Loc. cit.*, p. 129 et suivantes. Pour les formes ternaires, *voir* le *Traité* de Study, p. 170 et suivantes.

lité. On peut écrire, suivant la notation symbolique,

$$F_n(x) = a_x^n, \qquad \Phi_\nu(u) = u_\alpha^\nu.$$

Les $k^{\text{ièmes}}$ *polaires* sont, en introduisant deux nouvelles séries de variables (y) et (v), $a_x^{n-k} a_y^k$ et $u_\alpha^{\nu-k} v_\alpha^k$, et le $k^{\text{ième}}$ *composé* de F avec Φ sera représenté par l'expression

$$(F, \Phi)^k = a_x^{n-k} u_\alpha^{\nu-k} (a\alpha)^k.$$

On serait arrivé à la même forme en effectuant sur

$$F\Phi = a_x^n u_\alpha^\nu$$

k transpositions (*Faltungen*), c'est-à-dire, d'après Gordan [1], que *le* $k^{\text{ième}}$ *composé de deux formes*

$$F(x) = a_x^n, \qquad \Phi(u) = u_\alpha^\nu$$

résulte de k *transpositions du produit* $F\Phi$.

On procède d'une manière analogue dans le domaine ternaire pour trois formes à variables cogrédientes (x), (y), (z) :

$$F_n = a_x^n, \qquad G_p = b_y^p, \qquad H_q = c_z^q.$$

L'expression

$$(F, G, H)^k = (abc)^k a_x^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}$$

sera encore le $k^{\text{ième}}$ composé.

L'*opération* Ω se lie très étroitement au procédé de la composition. Elle est représentée, pour le domaine ternaire, par l'expression

$$\Omega = \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial y_2 \partial z_3} + \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial y_3 \partial z_1} + \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial y_1 \partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial y_3 \partial z_2} - \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial y_1 \partial z_3} - \frac{\partial^3}{\partial x_3 \partial y_2 \partial z_1}.$$

Effectuée sur un produit $a_x^n b_y^p c_z^q$ (réel ou symbolique), elle donne

$$npq(abc) a_x^{n-1} b_y^{p-1} c_z^{q-1},$$

---

(1) *Vorlesungen*, t. II, p. 33. *Voir*, pour le domaine ternaire, GORDAN, *Math. Ann.*, XVII, p. 217-233; 1881.

et après k opérations, on obtient

$$\frac{n!}{(n-k)!}\,\frac{p!}{(p-k)!}\,\frac{q!}{(q-k)!}(abc)^k a_x^{n-k} b_y^{p-k} c_z^{q-k}.$$

On a donc le théorème fondamental suivant (¹) :

L'opération Ω, effectuée sur un produit $a_x^n b_y^p c_z^q$ est équivalente, à un facteur numérique près, au procédé de la transposition, et répétée k fois, elle conduit à une expression équivalent au $k^{\text{ième}}$ composé.

Au procédé de la composition viennent se rattacher, d'après Gordan (²), des développements analogues à ceux que nous avons signalés pour l'opération polaire.

Nous indiquerons comme exemples de composés (³), le *déterminant fonctionnel* (⁴) de m formes (à m variables homogènes), et le *hessien* (⁵), qui n'est que le cas particulier où les m formes correspondent aux m dérivées partielles d'une même forme.

Nous avons avons déjà eu l'occasion (⁶) de signaler les travaux que Gordan, Mertens et Hilbert ont consacrés à l'opération Ω. Il ressort de ces recherches qu'une réitération de l'opération Ω effectuée sur une forme quelconque, homogène et isobare par rapport aux coefficients, conduit à un invariant de la forme primitive.

Le cas où le composé est nul est particulièrement important. On sait, en effet, qu'il constitue la base de la théorie de l'apolarité et qu'il se rattache également aux combinants (*voir* II D, *b*).

D'autre part, ce cas prend, depuis quelque temps, une place importante dans la théorie des équations différentielles. A cet

(¹) *Voir* dans le *Vorlesungen* de Gordan (t. II, p. 22-23) une démonstration qui se prête à une généralisation immédiate. Consulter aussi Vivanti, *Pal. Rend.*, IV, p. 261-268; 1890.

(²) *Vorlesungen*, II, § 3. *Math. Ann.*, XVII, p. 217-234; 1881.

(³) Quant à l'importance que prend la composition des covariants dans la *Théorie des Syzygies*, *voir* les Mémoires de Stroh, que nous avons signalés plus haut [*Bulletin*, XIX_2, p. 105, notes (³) et (⁴)].

(⁴) Nous parlerons plus loin des relations entre déterminants fonctionnels (II, D, *b*).

(⁵) Les formes dont le hessien est identiquement nul se trouvent mentionnées à la fin du *Rapport*, II, D, *d*.

(⁶) *Voir* le *Bulletin*, XIX_2, p. 94.

effet, nous renvoyons le lecteur aux intéressantes recherches de Waelsch ([1]), de Hilbert ([2]) et de Perrin ([3]). Pick ([4]), et plus tard Klein ([5]), avaient d'ailleurs, déjà en 1887, fait usage d'un procédé analogue pour ramener l'équation différentielle de Lamé à une forme normale.

γ. *Substitution de coefficients différentiels non homogènes.* — Les travaux que nous venons de citer montrent qu'il est souvent très avantageux de ramener une équation différentielle à une forme (homogène) normale au sens de la théorie des invariants. Réciproquement, dans beaucoup de cas, en particulier s'il s'agit de la formation des équations différentielles pour des invariants, il y a lieu de donner à la forme primitive et à ses coefficients différentiels une expression *non homogène.*

Soit

$$f = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$$

une forme binaire.

Si l'on forme la suite

$$f_0 = f, \quad f_1 = \frac{1}{n}\frac{df}{dx}, \quad f_2 = \frac{1}{n(n-1)}\frac{d^2 f}{dx^2}, \quad \ldots, \quad f_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n f}{dx^n},$$

il en résulte, d'après Bruno ([6]), le théorème important qui suit :

Si dans la source C_0 *d'un covariant* C *d'une forme* f, *on remplace les coefficients* a_i *par les* f_i, *la source* C_0 *se trouvera transformée en* C.

On peut facilement étendre ce procédé à un système de formes.

([1]) *Prag. Math. Ges.*, p. 78-99; 1892.

([2]) *Dissert. Königsberg*, 1885. *Math. Ann.*, XXX, p. 15-29, 1887; XXVIII, p. 381-446.

([3]) *Bull. Soc. Math*, XVI, p. 85-100; 1888. *Voir* aussi HIRSCH, *Dissertation; Königsberg*, 1892.

([4]) *Wien. Ber.*, 19 p.; juillet 1887. *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 139-143; 1891. *Voir* aussi HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, II; 1888 et BÖSCHER-GÖTTINGER, *Preisarbeit*, Ch. II; 1891.

([5]) *Gött. Nachr.*, p. 85-75; mars 1890. *Math. Ann.*, XXXVIII, p. 144-152.

([6]) *C. R.*, XC, p. 1203-1205. *Journ. für Math.*, XC, p. 186-188. *Ann. J.*, III, p. 154-164. *Math. Ann.*, XVIII, p. 280-288; 1881.

Capelli [1] a repris les résultats obtenus par Clebsch et Gordan pour les étendre au développement en série d'une forme contenant plusieurs séries cogrédientes de n variables. On lui doit, sur ce sujet, plusieurs Mémoires très remarquables, dont les théorèmes appartiennent aussi bien à la théorie abstraite de l'opération polaire qu'à la théorie des formes.

En prenant, dans le domaine ternaire, le cas particulier où la forme contient seulement les variables x et leurs contragrédientes u, on se trouve ramené à la *théorie des connexes,* d'après Clebsch [2]. Ces connexes f avaient déjà, en 1872, été étudiés directement par Gordan [3]. Dans son Traité [4], Study a su en donner un exposé très simple; il a examiné spécialement les *connexes conjugués* f et g (selon la dénomination de Rosanes) [5], et qui sont tels que leur invariant simultané est nul; il est, en outre, parvenu à établir une interprétation géométrique de ces développements en série, en faisant d'abord une étude approfondie des multiplicités représentées par les coefficients de substitutions.

ε. *Substitution de coefficients différentiels homogènes.* — Si dans une forme $F(x)$, on remplace les variables x par les dérivées premières d'une forme $G(u)$ à variables cogrédientes, on obtient, d'après Sylvester [6], un invariant simultané de F et de G. Et en particulier, si F est un covariant et G un contrevariant, ce procédé fournira un nouveau contrevariant.

Plus récemment, Sylvester [7] a indiqué un autre principe permettant d'obtenir une troisième forme invariante à l'aide de deux formes invariantes données. Celui-ci mérite d'être signalé, vu la

---

(1) *Batt. G.*, XVIII, p. 17-34; 1880. *Fondamenti;* 1882. *Rend. Pal.*, I, p. 1-6; 1886. *Math. Ann.*, XXXVII, p. 1-37; 1891. *Rend. Acc. L.*, VII, p. 161-167; 1891 et p. 3-9; 1892. — *Napoli Rind.*, 2e série, VII, p. 29-38, 155-162; 1893; *Batt. G.*, p. 376-380; 1894.

(2) *Gött. Nachr.*, p. 429-449; 1872. *Math. Ann.*, VI, p. 205-215; 1872. *Voir* Clebsch et Gordan, *Math. Ann.*, I, p. 359-400; 1869.

(3) *Math. Ann.*, V, p. 95-122, en particulier §§ 4, 5.

(4) *Voir* plus loin le § II, D, *b*.

(5) *Methoden,* II, § 12.

(6) Voir *Introduction, Bulletin*, XVIII_2, p. 184.

(7) *J. für Math.*, LXXXV, p. 89-114; 1878.

relation simple qui existe entre le groupe de substitution des variables x et celui qui en résulte pour les coefficients de la forme. En effet, lorsque la forme est représentée à l'aide des *coefficients préparés* (¹), on voit facilement que *deux substitutions réciproques des x entraînent deux substitutions réciproques des coefficients a*. Cette méthode s'étend également aux *sources* des formes F et G.

Sylvester démontre la proposition successivement pour les domaines binaire, ternaire,...., tandis que Lipschitz (²) en donne une démonstration directe d'après laquelle de deux substitutions inverses (*transponirte*) d'une espèce, il résulte deux substitutions inverses de l'autre espèce.

Study (³) a étendu ce théorème aux connexes et il en a déduit une série de conséquences qui montrent que le principe de dualité forme le noyau de la question.

ζ. *Équations différentielles.* — Dans l'Introduction, nous avons mentionné la part qu'ont prise Aronhold, Sylvester, Cayley, Brioschi, Betti, à la formation des équations différentielles des invariants d'une ou de plusieurs formes données. Les progrès réalisés pendant cette nouvelle période se rattachent surtout à la signification même de ces équations, à leurs relations mutuelles, et aux réductions qui en résultent.

Dans ce domaine, nous signalons le beau Mémoire de Forsyth (⁴), dans lequel l'auteur examine le problème à un point de vue général, en partant de la méthode des *substitutions infinitésimales* inaugurée par Lie. Il parvient à donner les équations différentielles des invariants d'une forme qui, outre les variables x et leurs contragrédientes u, contient encore les sous-déterminants p_{ik}, p_{ikl}, ... du système.

Si l'on se place au point de vue de la théorie de Lie, le fait que les n^2 équations différentielles d'Aronhold constituent, d'après

(¹) Ces coefficients *préparés* se présentent d'ailleurs déjà chez Clebsch, *Gött., Abh.*, XVII, p. 14; 1872.

(²) *Ann., J.*, I, p. 336-346; 1878. — LE PAIGE, *Math. Ann.*, XV, p. 206-210.

(³) *Methoden*, p. 36 et suivantes. — Consulter aussi HURWITZ, *Math. Ann.*, XLV, p. 381-404; 1894.

(⁴) *Lond. Proc.*, XIX, p. 24-46; 1888. — CAPELLI se sert d'une méthode analogue dans ses *Fondamenti*.

Clebsch, un système complet, prend immédiatement la signification suivante :

Tandis que les équations différentielles d'un invariant expriment que ce dernier admet toutes les substitutions infinitésimales des variables (ou des coefficients), la propriété du système complet signifie que les substitutions forment un groupe.

Study (¹) a poursuivi cet ordre d'idées en se limitant toutefois aux invariants projectifs et a fait voir quelle est, dans la théorie des formes, la signification (symbolique ou non symbolique) de certains groupes d'équations différentielles. Dans le domaine binaire cette question avait déjà été résolue par Gordan (²).

Nous abordons maintenant le problème qui consiste à chercher le nombre minimum des équations indépendantes auquel peut être réduit le système des n^2 équations différentielles. Kronecker ramène la question à une proposition de la théorie des substitutions et montre (³) que ce nombre est égal à deux. Il a, en outre (⁴), donné une autre méthode de réduction, en décomposant la substitution linéaire générale en une série de substitutions plus simples, équivalentes à la première (⁵). Il parvient ainsi à $2n-2$ *systèmes simples* de décompositions, auxquelles correspondent $2n-2$ équations différentielles qui remplacent les n^2 équations d'Aronhold. Pour les invariants absolus, il faut y joindre encore une équation.

Pour terminer ce paragraphe, il convient de faire remarquer que l'importance des équations différentielles auxquelles satisfont les invariants, abstraction faite des facilités qu'elles présentent dans la pratique pour la formation de ces derniers, repose essentiellement sur le fait que pendant longtemps elles constituèrent la

(¹) *Methoden*..., II, § 18.

(²) *Voir* plus haut p. 250, la fin du § II, C. *b*, α.

(³) *Berl. Ber.*, p. 504; 1889.

(⁴) *Berl. Ber.*, p. 349-362, 479-505, 603-614; 1889. — Les travaux que Deruyts a publiés sur cette question seront mentionnés plus loin, II, D.— Kronecker fait remarquer que ses équations ont été obtenues sans l'intervention d'une méthode symbolique. Il en est de même du système donné par Forsyth.

(⁵) Pour les domaines ternaires et quaternaires, consulter aussi White, *Ann. J.*, XIV, p. 274-282; 1892.

seule méthode générale permettant de résoudre, par voie *non symbolique*, la plupart des problèmes de la théorie des formes. Bien que la méthode des formes canoniques soit également non symbolique, il faut cependant, pour l'établir, avoir recours aux équations différentielles ([1]).

c. — **Appendice.**

α. *Généralisations. Transformations d'ordre supérieur.* — Pour terminer ce Chapitre, nous examinerons brièvement deux cas de généralisation. L'un a pour objet les transformations rationnelles *non linéaires* des variables, tandis que l'autre correspond au *groupe prolongé* de celles-ci, c'est-à-dire qu'il appartient à la théorie des *invariants différentiels*.

Les transformations rationnelles d'ordre supérieur, étudiées au point de vue de la théorie des formes, n'ont été traitées d'une façon complète que dans le domaine binaire ([2]). Quant à la *transformation de Tschirnhausen* et la modification importante introduite par Hermite, nous en avons déjà fait mention au début de ce Rapport ([3]).

C'est à Gordan que revient le mérite d'avoir montré ([4]) que la théorie des invariants binaires, dans les transformations rationnelles, pouvait être ramenée à celle des invariants projectifs. Il est bien entendu qu'il ne s'agit ici que d'invariants relatifs, les invariants absolus étant exclus.

Les transformations d'ordre supérieur ont pour but d'attribuer

---

([1]) Examiner aussi la méthode non symbolique adoptée par MERTENS, *Wien. Ber.*, XCVIII, p. 691-739; 1889.

Par contre, les dernières recherches de HILBERT prennent de plus en plus un caractère arithmétique.

([2]) Pour le cas des systèmes associés, *voir*, plus haut, (p. 98), IIe partie, A, *c*.

([3]) *Bulletin*, XVIII, p. 190. — Ajoutons, pour compléter, que Brioschi donna immédiatement les équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les coefficients de la transformée; *Atti Ist. Lomb.*, I, p. 231; 1858. — Consulter aussi KLEIN, *Vorlesungen über das Jkosaeder*, IIe partie, Chap. II, §§ 5, 6; 1884; ainsi que les récents mémoires de BRIOSCHI : *Math. Ann.*, XXIX, p. 327-330; 1887; *Annali di Mat.* (2), XVI, p. 181-189, 329-334; 1888; *Lond. M. S. Proc.*, XX, p. 127-131; 1889.

([4]) *Journ. für Math.*, LXXI, p. 164-194; 1870. — On trouvera dans les *Math. Ann.* (III, p. 359-361; 1871) un exemple de transformation quadratique d'une forme biquadratique, calculé par Cayley.

Voir aussi CLEBSCH, *Gött. Abh.*, XV, p. 65-99; 1870.

aux équations certaines propriétés d'invariance ([1]). Dans certains cas particuliers, il est possible, d'après Clebsch ([2]), de revenir directement aux transformations *linéaires*. Par exemple, il en est ainsi pour la transformation cubique d'une forme f_3; Torelli ([3]) explique ce fait par la présence d'une identité entre trois formes cubiques quelconques et dans laquelle les coefficients sont des covariants linéaires.

Clebsch ([4]) a étudié les transformations d'ordre supérieur effectuées sur des formes binaires en les mettant en rapport avec des transformations linéaires d'un espace à plusieurs dimensions, et il obtient ainsi, pour les premières, une interprétation géométrique fort simple.

Dans le domaine à n variables les transformations uniformes d'ordre supérieur ont été soumises à un examen très approfondi par Maurer ([5]). Ce dernier a surtout pris pour but la recherche des équations différentielles des invariants afin de les mettre en parallèle avec le système des n^2 équations d'Aronhold. D'après l'auteur, les propriétés de ces formes spéciales, qui reposent sur

---

([1]) En particulier, on se proposera, d'après Hermite, d'obtenir pour la transformée une *forme-type*, dans laquelle les coefficients sont des invariants. Mais les conditions qui en résultent pour la transformation n'ont pas encore été étudiées d'une manière générale.

([2]) *Gött. Abh.*, XV, p. 65-99; 1870.

([3]) *Atti. Acc. P. Nap.*, XVIII, p. 215-225; et *Pal. Rend.*, II, p. 165-171; 1888.

([4]) *Gött. Nachr.*, p. 335-345; 1871; *Math. Ann.*, IV, p. 284-345; 1871.

Clebsch fait une étude approfondie de la transformation quadratique de l'équation du cinquième ordre. Consulter l'exposé qu'il en donne dans *Clebsch-Lindemann*, t. II, I, 3e partie, n° XI. — *Voir* aussi SPOTTISWOODE : *Rom. Acc. L.* (3), VII, p. 218-223; 1883; *Lond. Proc.*, XVI, p. 148-171; 1885; ainsi que PITTARELLI : *Rom. Acc. L. Rend.* (4), I, p. 327-331, p. 374-381; 1885.

D'une manière analogue, on introduira pour les équations des 5e et 6e ordres des transformations cubiques. Mais il serait à désirer que ces équations fussent encore étudiées au point de vue des relations existant entre les groupes de transformations.

([5]) *Journ. für Math.*, CVII, p. 89-116; 1890. — C'est une généralisation directe du Mémoire de Maurer signalé à la fin de la première Partie de ce Rapport (I, B, *b*); *Bulletin*, XVIII_2, p. 309 et 308.

Il est bien entendu que ces transformations doivent contenir *au moins un* paramètre arbitraire.

Quant à la théorie algébrique et géométrique des transformations uniformes de deux variables, telle qu'elle résulte de Travaux de Riemann, Cremona, Clifford, Noether, Rosanes, Brill, *voir*, par exemple, *Clebsch-Lindemann*, I, 4e Partie, IX; NOETHER, *Math. Ann.*, XXIII, p. 311-358; 1887; et *Berl. Ber.*, p. 1-5; 1888.

les relations (algébriques) entre coefficients, n'ont encore été étudiées, au point de vue de la théorie des invariants, que dans certains cas particuliers. C'est ce qui forme le point de départ de cet important Mémoire dans lequel Maurer envisage la question d'une manière tout à fait générale.

3. *Invariants du groupe projectif prolongé* (1). (*Réciprocants et invariants différentiels.*) — La théorie des *réciprocants* a été fondée par Sylvester (2) en 1885 et, depuis, elle a reçu un grand développement grâce aux Travaux de ce dernier, auxquels sont venus se joindre ceux de Hammond, Mac Mahon, Leudesdorf, Elliot, Forsyth, Rogers, Berry et Perrin.

L'étude des *invariants différentiels* (3), qui forme une partie importante de cette théorie, avait déjà, en 1878 et en 1880, été abordée avec succès par Halphen (4), tandis que, d'autre part, les recherches antérieures de Lie sur la même question (5) sont d'une généralité telle, qu'elles renferment, comme simples cas particuliers, toute une série de théorèmes et de méthodes employées par les auteurs anglais.

Toutefois, il y a lieu d'ajouter que la Science aurait réalisé des progrès plus rapides, si Halphen et les géomètres anglais avaient accordé une plus large place aux idées fondamentales de Lie, qui,

---

(1) D'après les restrictions que nous avons dû nous imposer, ce paragraphe et les suivants sont forcément traités d'une manière incomplète. Ainsi, devant nous limiter aux méthodes qui se rattachent directement à la théorie ordinaire des invariants, nous ne pouvons pas tenir compte des Travaux de LIE, HALPHEN, APPELL, BRIOSCHI, VESSIOT et d'autres, sur les invariants des équations différentielles.

(2) *Mess.*, XV, p. 74-76, 88-92; *Comptes rendus*, CI, p. 1042-6, 1110-1, p. 1225-9, p. 1460-4. — Dans son ensemble, cette théorie a été exposée par Sylvester dans son Cours publié par Hammond dans le *Am. J.*, t. VIII, p. 196-260; t. IX, p. 1-37, 113-161, 297-352; t. X, p. 1-16; 1887.

(3) Les *invariants différentiels* appartiennent au groupe projectif général, et les *réciprocants* peuvent se rattacher à un sous-groupe. — D'après la terminologie de Sylvester le mot réciprocant indiquait, au début, un simple échange des variables.

(4) 1878, *Thèse* pour le doctorat; 1880, *Éc. Polyt.*, *Mém. prés.* (2), XXVIII, 301 p.; (1880-1884).

(5) *Voir* aussi les Travaux antérieurs, *Comptes rendus*, LXXXI, p. 1053; 1875; *Journ. de Math.* (3), II, 1876.

(6) *Consulter* par exemple les *Math. Ann.*, XXIV, p. 337-378; 1884, LIE-ENGEL, t. I, Ch. 25, et LIE-SCHEFFERS, Ch. 23.

de son côté, ne parut pas attacher une grande importance à ces théories spéciales ([1]).

Sylvester établit la théorie des réciprocants binaires en partant d'une propriété de l'*expression de Schwarz* ([2]) :

$$(y, x) = \frac{y_2}{y_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 = \frac{2y_1y_3 - 3y_2^2}{2y_1^2},$$

dans laquelle y_1, y_2, y_3 sont les dérivées successives de y prises par rapport à la variable indépendante x.

C'est à Mac Mahon ([3]) que revient le mérite d'avoir su établir la multiplicité des opérations différentielles auxquelles on peut soumettre ces réciprocants.

Perrin ([4]) parvint alors sans difficulté à étendre sa ***théorie des résidus*** ([5]) aux réciprocants, tandis qu'Elliot fit l'extension de la théorie de Sylvester au cas de n variables ([6]). On doit également à Elliot le système complet des équations différentielles caractéristiques pour le cas de trois variables, ainsi que l'étude ([7]), dans le domaine ternaire, des réciprocants du groupe linéaire général. De son côté, Forsyth ([8]) a examiné le cas particulier où seulement deux variables (dépendantes) sont soumises à une transformation linéaire générale.

Hammond ([9]) a consacré une étude approfondie à certains réciprocants intégrables et en a donné des applications géométriques.

([1]) Une étude comparative des relations mutuelles entre ces théories serait d'un grand intérêt. LIE lui-même compare, à plusieurs reprises, ses résultats à ceux qu'ont obtenus d'autres géomètres, notamment HALPHEN. Ainsi, consulter les *Math. Ann.*, t. XXXII, p. 212-281 (ou *Norw. Archiv*, 1883); t. XXIV, p. 549; t. XXV, p. 74; *Leipz. Ber.*, p. 83-88; 1887; *Am. J.*, XI, p. 182-186; *Lie-Engel*, I, p. 552-553; *Leipz. Ber.*, p. 267; 1891.

([2]) *Voir* plus haut, Ire PARTIE, *b.* (*Bulletin*, XVIII_2, p. 298.) — Cette expression se présente déjà dans les Travaux de Lagrange.

([3]) *Lond. Proc.*, XVIII, p. 61-88; 1887; XIX, p. 112-128; 1888. — Consulter aussi ELLIOT, *Lond. Phil. Trans.*, CLXXXI, p. 19-51; 1890.

([4]) *C. R.*, CII, p. 351-353; 1886.

([5]) *Voir* plus haut, IIe partie, A, *d.* (*Bulletin*, XIX_2, p. 104-105.)

([6]) *Lond. Proc.*, XVII, p. 172-196; 1886; XVIII, p. 142-164; XIX, p. 6-23, 377-405; XX, p. 131-160; *Mess.*, XIX, p. 7-14; 1889.

([7]) *Lond. Proc.*, XX, p. 131-160; 1889.

([8]) *Lond. Phil. Trans.*, CLXXX, p. 71-118; 1889.

([9]) *Lond. Proc.*, XVII, p. 128-138; 1886.

Pour les six premiers degrés, Mac-Mahon a étudié (1), à l'aide d'une fonction génératrice, les réciprocants *perpétuants*, c'est-à-dire ceux qui ne peuvent être représentés en fonction linéaire et entière par d'autres réciprocants de degré et de poids moindres.

Quant aux réciprocants *mêlés*, ils ont été l'objet de plusieurs communications de Leudesdorf (2); en particulier, ce géomètre fait voir qu'une fonction donnée de $y_1, y_2, y_3, \ldots$ est un réciprocant mêlé.

Rogers (3) a fait une extension remarquable de la notion de réciprocant, et il a étudié spécialement les invariants différentiels d'une certaine transformation quadratique qui se présente dans la transformation par rayons vecteurs réciproques.

Aux travaux de Rogers sur les *réciprocants homographiques* se rattache un Mémoire de Forsyth (4) sur le système complet de ces derniers. Ces réciprocants jouent un rôle particulière ment intéressant dans la théorie des équations différentielles linéaires (5).

γ. *Les invariants différentiels dans la théorie des surfaces. Paramètres différentiels.* — La théorie *projective* des propriétés de la courbure des surfaces n'a pas encore été approfondie. A part un certain nombre d'importantes remarques que l'on trouve dans le beau Traité de Darboux (6), et les théorèmes obtenus par Mehmke (7) à l'aide de la méthode de Grassmann et développés par Sylvester et ses disciples (8), il n'y a guère à signaler que le

(1) *Lond. Proc.*, XVII, p. 139-151; 1886.

Pour ce qui concerne les réciprocants *simultanés* se rapportant à plusieurs séries de variables, *voir* les recherches de Berry, *Quart. J.*, XXII, p. 260-288; XXIII, 289-316; 1889. — Quant aux réciprocants simultanés, *voir* Erry, *Quart. J.*, t. XXII, p. 260-288; t. XXIII, p. 289-316; 1889.

(2) *Lond. Proc.*, XVII, p. 197-219, 329-343; XVIII, p. 235-262; 1887.

Voir aussi Griffiths, *Ed. Times*, LI, p. 137-149; 1889.

(3) *Lond. Proc.*, XVII, p. 220-231, 344-354; XVIII, p. 130-141; XX, p. 161-179; *Mess.*, 2e serie, XVIII, p. 153-158; 1889.

(4) *Mess.*, 2e série, XVII, p. 154-192; 1888,

(5) Forsyth, *Lond. Phil. Trans.*, p. 377-489; 1888, et p. 71-118; 1889.

(6) *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, Paris, I, 1887; II, 1889; III, 1894; IV, 1895. *Voir* en particulier, t. I, L. I, §§ 23 et suiv., et L. II.

(7) *Schlöm. Z.*, XXXVI, p. 56-60, 206-213; 1891. *Voir* encore Bœcklen, *Mitteilungen*, 1892, et *Schlöm. Z.*, p. 186-189; 1892.

(8) *Consulter* Elliot, *Lond. Proc.*, XVII, p. 172-196; 1886.

travail fondamental de Voss ([1]). L'auteur étudie, au point de vue de leur invariance projective, les principales grandeurs qui se présentent dans la théorie de la courbure; en outre, il aborde également l'étude d'invariants différentiels plus généraux qui résultent d'une transformation quelconque.

La théorie des surfaces repose sur la transformation de certaines formes différentielles binaires, parmi lesquelles nous citons le carré de l'élément linéaire de la surface,

$$A = ds^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2,$$

et l'expression B obtenue en divisant la précédente par le rayon de courbure ρ,

$$B = \frac{ds^2}{S} = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

e, f, g, E, F, G étant, selon la notation de Gauss, les grandeurs fondamentales de première et de deuxième espèces. Beltrami ([2]) fut le premier qui examina les propriétés invariantes résultant de ces transformations; on lui doit l'introduction des *paramètres différentiels* ([3]) qui jouent un rôle si important dans la théorie générale des surfaces ([4]).

([1]) *Math. Ann.*, XXXIX, p. 179-256; 1891.

([2]) Le premier Mémoire de Beltrami remonte à l'année 1865, *Giorn. di Mat.*, II. *Consulter* encore les *Mem. Acc. di Bologna*, 2e série, VIII; 1869. *Ann. di Mat.*, 2e série, I, p. 329; 1867. *Math. Ann.*, I; 1869. H. F.

([3]) *Voir*, dans le *Traité de Darboux*, le Chapitre que l'auteur consacre aux paramètres différentiels au début de son intéressant exposé de la déformation des surfaces (t. III, p. 193-217). H. F.

([4]) Malgré le grand intérêt de la question, nous devons nous borner à joindre aux noms précédents ceux de de Riemann, Christoffel, Weingarten, Halphen, Lie, Ricci, Knoblauch, Frobenius, Tresse, etc.

Consulter aussi le Traité élémentaire de Knoblauch, *Einleitung in die allg. Theorie der krummen Flächen*, Ch. III, Leipzig, 1888 et ses Mémoires, dans le *Journ. für Math.*, CIII, p. 25-39, 1888; t. CXI, p. 277-289, 329-343, 1893; t. CXV, p. 185-200, 1895.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

P. HAAG. — Cours de Calcul différentiel et intégral; 1 vol. in-8°, VII-692 p., 1893. — Cours de Mécanique rationnelle; 1 vol. in-8°, VIII-532 p. Vve Ch. Dunod. Paris, 1894.

On trouvera, dans ces deux Ouvrages, la reproduction développée des Cours professés par M. Haag à l'Ecole des Ponts et Chaussées. Les lecteurs ne manqueront pas d'apprécier le talent avec lequel M. Haag a su exposer d'une manière simple et rigoureuse les théories les plus importantes de l'Analyse et de la Mécanique rationnelle. Il préfère, lorsque cela est possible, l'exposition géométrique; l'emploi systématique des *quantités géométriques* rend cette exposition claire, rigoureuse et élégante. Dans le Cours d'Analyse, qu'il a voulu très élémentaire, il a su faire sa place à la théorie des fonctions et l'on y trouvera même les propriétés fondamentales des fonctions elliptiques. Le Cours de Mécanique est divisé en deux Parties, dont la première se rapporte à la Cinématique, et la seconde, sous le titre *Étude des forces*, comprend à la fois la Dynamique et la Statique, que l'auteur tient à ne pas séparer. L'exposition des principes de la Dynamique est faite d'une façon intéressante et philosophique.

J. T.

GINO LORIA. — Le scienze esatte nell' antica Grecia. Libro II : *Il periodo aureo della geometria greca*. 236 p. gr. in-4°. Modena, 1895.

Dans le numéro du *Bulletin* de janvier 1894, j'ai déjà rendu compte de la première Partie de l'important Ouvrage historique entrepris par M. Gino Loria, et j'ai signalé les qualités remarquables dont le savant professeur de Gênes a su donner une preuve éclatante. Le second Livre, qui vient de paraître, mériterait des éloges encore plus grands; je me contenterai de regretter que nous soyons bien loin de posséder en France une exposition aussi complète, aussi claire et aussi judicieuse des travaux géométriques

d'Euclide, d'Archimède et d'Apollonius, pour ne pas parler des mathématiciens secondaires de la même période.

Ceux de nos lecteurs qui ont pris quelque intérêt au débat récemment intervenu ici même, entre MM. Zeuthen et Cantor, pourront notamment trouver, dans le Livre de M. Loria, un compromis très acceptable, je crois, entre les deux thèses opposées sur le caractère des progrès réalisés par le géomètre de Perge dans la théorie des coniques. Faisant un départ très net entre les hypothèses, d'ailleurs annoncées comme telles, du savant danois et les résultats historiques mis en lumière par ce dernier, M. Loria a formulé, sur les premières, des réserves fort sages; il a, au contraire, adopté la plupart des seconds. Son histoire de la *période d'or,* comme il l'appelle, est donc à lire, même après la seconde édition du t. I des *Vorlesungen* de M. Cantor; ce n'est pas là, bien entendu, une critique que j'adresse à ce dernier travail pour lequel on connaît mon admiration; mais, en matière d'érudition, les nouveaux venus peuvent toujours prendre l'avantage.

Je n'ai pas, au reste, l'intention de faire ici une analyse détaillée du Livre de M. Loria; je me contenterai de signaler, comme particulièrement neuf, l'intéressant Appendice consacré aux restitutions et divinations des écrits perdus des Anciens; je n'ai pas davantage à signaler cette fois, comme pour le premier Livre, quelques légères inadvertances de rédaction; j'en profiterai donc pour essayer de combattre une erreur accréditée que M. Loria, je crois bien, ne partage point, mais qui apparaît dans deux des citations mises en note (p. 117):

« Après vingt siècles de travaux et de découvertes, écrivait Libri dans son *Histoire des Sciences mathématiques en Italie* (t. I, p. 31), les intelligences les plus puissantes viennent encore échouer contre la synthèse difficile du *Traité des Spirales* d'Archimède. »

Si Libri n'eût été qu'un célèbre érudit, s'il ne s'était pas fait remarquer par des travaux de mathématique pure, une assertion aussi étrange ne mériterait pas d'être relevée; en tout cas, on ne doit y voir qu'une preuve topique de la singulière légèreté avec laquelle, trop souvent, Libri a abusé de l'autorité qu'il s'était acquise pour imposer une opinion préjugée, sans réelle étude de

la question. Personne aujourd'hui, pour ainsi dire, ne lit Archimède, et Libri n'avait certainement pas essayé de le faire; c'est la seule conclusion à tirer du passage que je viens de citer.

En faisant abstraction des formes techniques du langage mathématique des Anciens, le géomètre de Syracuse déroute et rebute au premier abord parce que sa tournure habituelle de démonstration est la réduction à l'absurde, même en dehors de sa méthode des quadratures et pour des questions qu'il aurait pu sans peine traiter directement. Il semble avoir eu, à cet égard, un pli d'esprit particulier et il faut certainement s'y faire; mais ce point une fois gagné, je ne crois pas qu'on puisse accuser Archimède d'obscurité, même dans son *Traité des Spirales;* et j'estime que qui voudra sérieusement le comparer à Apollonius, lui accordera au moins la supériorité sous le rapport de l'ordonnance de l'exposition; le fait est d'ailleurs assez naturel, puisque les livres des *Coniques* ne représentent pas, comme les écrits d'Archimède, un travail complètement original.

L'opinion émise par Libri n'a pas, au reste, été inventée par lui; il a simplement adopté, en le revêtant d'une formule hyperbolique, un préjugé mis en circulation, je crois, par Fontenelle, dans l'*Histoire de l'Académie des Sciences pour l'année* 1704 (p. 42 de l'édition de 1722), à propos d'un Mémoire de Varignon, à savoir que les géomètres modernes, malgré leurs efforts, n'étaient pas parvenus à trouver le fin mot des démonstrations du *Traité des Spirales*.

« Elles sont si longues et si difficiles à embrasser que, comme on l'a pu voir dans la Préface de l'*Analyse des infiniment petits*, M. Boulliau a avoué qu'il ne les avait jamais bien entendues, et que Viète les a injustement soupçonnées de paralogisme, parce qu'il n'avait pu non plus parvenir à les bien entendre. »

Passe pour Boulliau, qui n'était pas certainement un géomètre *di primo cartello*, mais pour lequel on ne doit pas cependant exagérer la portée de l'aveu ingénu consigné dans la Préface de son Traité *De lineis spiralibus;* quant à Viète, je vais y revenir tout à l'heure; mais je dois remarquer qu'aucun des grands mathématiciens du XVIIe siècle, c'est-à-dire du temps où l'on étudiait réellement Archimède, aucun de ceux qui ont appliqué ses mé-

thodes et en ont tiré de nouveaux procédés, ni les Huygens, ni les Pascal, ni les Roberval, ni les Fermat, ne se sont jamais plaints de l'obscurité d'Archimède, et ce sont les seuls témoins dont l'autorité serait valable.

Que le marquis de l'Hôpital, auquel renvoie Fontenelle, ait fait ressortir les longueurs et les embarras des démonstrations d'Archimède en regard de la brièveté des calculs leibniziens, rien n'est plus justifiable; mais il s'est gardé d'accentuer cette comparaison comme l'a fait le Secrétaire de l'Académie (1).

C'est à ce dernier donc qu'incombe la responsabilité de l'assertion relative à Viète, qu'il n'avait évidemment pas lu, sans quoi il l'eût trouvé sans doute encore plus difficile à comprendre qu'Archimède.

Le passage de Viète visé par L'Hôpital se trouve au reste dans le *Supplementum Geometriæ* (page 240 de l'édition elzévir). Mais, pour en reconnaître le véritable sens, il faut voir tout d'abord comment il est amené.

Dans l'écrit en question, publié vers 1592, Viète développe une idée déjà indiquée dans l'*Isagoge* de 1591 (n° 25). Il demande qu'on admette, dans la pratique de la Géométrie, au même titre que les constructions avec la règle et le compas, l'insertion entre deux lignes (*droites et circulaires*) données d'un segment de longueur donnée d'une droite passant par un point donné.

M. Loria (p. 204) rappelle que Newton a fait la même proposition, et il est incontestable qu'au point de vue graphique la solution par simple tâtonnement du problème en question est souvent bien plus aisée et bien plus exacte que, par exemple, la détermination du point d'intersection de deux droites ou que le tracé d'un cercle de grand rayon. Avant Newton, dans le *Supplementum Geometriæ,* Viète avait montré que l'on peut de la sorte résoudre graphiquement toutes les équations du troisième et du quatrième degré.

Or, dans son préambule, pour justifier son postulat, il s'appuie sur l'exemple des Anciens : ce postulat revient au fond à l'emploi

---

(1) Ainsi pour Viète, L'Hôpital dit seulement : « S'ils (les Anciens) n'ont pas été loin, s'ils ont marché par de longs circuits, du moins, quoiqu'en dise Viette, ils ne se sont point égarés ».

de la conchoïde de Nicomède; il a été implicitement admis par Archimède ([1]). Invoquant ainsi l'autorité du géomètre de Syracuse, Viète est conduit à faire remarquer que ce qu'il propose est en fait une construction plus simple que le tracé de la parabole ou de la spirale, également postulés par Archimède pour la solution de problèmes solides ou autres. Vient alors, tout à fait incidemment, le passage incriminé par Fontenelle comme contenant une accusation de paralogisme contre Archimède.

Je vais essayer d'en donner une traduction aussi fidèle que possible.

« Quant à cette autre proposition d'Archimède, de trouver, en menant une tangente à la spirale, une ligne droite de longueur égale à la circonférence du cercle, il y a là un point sur lequel l'accord n'est pas fait (*satis non constat*). En réalité, Archimède construit une droite qui est plus grande que le périmètre de tout polygone inscrit au cercle et plus petite que le périmètre de tout polygone circonscrit. Mais s'ensuit-il qu'elle soit égale à la circonférence? Il y a un angle (l'angle mixtiligne de la circonférence et du diamètre, d'après Euclide, III, 16) qui est plus petit que tout angle obtus et plus grand que tout angle aigu.

» S'ensuit-il que cet angle soit droit? Si la conclusion d'Archimède est vraie, celle d'Euclide est fausse. Mais cette question sera mieux discutée après l'exposition de l'analyse des sections angulaires. »

Évidemment, en lisant aujourd'hui ce passage isolément, on peut s'y tromper; du temps de Fontenelle, l'étude de Viète était déjà abandonnée et l'erreur également aisée. Mais les géomètres auxquels Viète s'adressait ne devaient guère s'y méprendre; il n'y a là de fait qu'une allusion ironique à la célèbre dispute sur l'angle de contact. Or sur cette question, l'opinion de Viète ne doit don-

---

([1]) Le fait avait été relevé par Pappus comme une incorrection. M. Loria, en le discutant (p. 207), conclut, avec Oppermann et Zeuthen, qu'Archimède devait admettre de fait le même postulat que Viète, et qu'il aurait même été précédé par Hippocrate de Chios; je ne regarde pas la démonstration comme faite, s'il s'agit du point de vue *théorique*; au point de vue purement *pratique*, il est incontestable, au contraire, que les Anciens ont dû de très bonne heure employer le procédé dont il s'agit.

ner lieu à aucun doute. Si nous n'avons plus le véritable original de son Traité des *Sections angulaires*, il s'est expliqué aussi clairement que possible dans le *Liber octavus*, publié un an après le *Supplementum*.

Viète (p. 386) est pour Pelletier contre Clavius; il soutient expressément que l'angle du demi-cercle est droit, que l'angle de contact est nul. Le reproche de paralogisme est donc lancé, non pas contre Archimède, non pas même contre Euclide (car Viète soupçonne une interpolation), mais contre le jésuite romain, avec lequel le géomètre français a d'ailleurs maille à partir pour une toute autre question, celle du Calendrier grégorien.

Le même *Liber octavus* contient par surcroît des preuves aussi claires que possible que Viète a fait une étude spéciale du *Traité des Spirales* d'Archimède et qu'il professe la plus grande admiration pour cet Ouvrage (p. 335); il recommande particulièrement l'emploi pratique de la spirale dans les constructions et s'attache à montrer comment on peut, par une opération graphique très simple, tracer une tangente avec une approximation qui, théoriquement, peut être aussi grande que l'on veut (p. 395); enfin, il développe précisément la démonstration d'Archimède sur la rectification de la circonférence au moyen du tracé de la tangente et fait suivre cette démonstration (p. 391) d'un scholie spécial pour écarter l'objection mentionnée dans le *Supplementum* et pour montrer que la conclusion est exacte, malgré Euclide ou plutôt malgré l'opinion des Euclidiens (*adversus Euclidem, Euclideorumve sententiam*).

Je crois qu'il est inutile d'insister davantage; il est certain désormais que l'assertion de Fontenelle sur Viète est précisément le contrepied de la vérité historique.

Il n'en est pas moins remarquable que le mot ironique de Viète est peut-être un des plus profonds qui aient été dits sur la méthode apagogique. Avec tout son appareil compliqué, cette méthode n'en repose pas moins sur un postulat qui, au fond, est le même que celui du calcul infinitésimal.

Qu'on dise avec Archimède (*Sph. et. Cyl.*, lemme 5) que, si deux quantités (lignes, aires ou volumes) sont inégales, leur différence, répétée un nombre de fois suffisant, peut surpasser toute grandeur donnée de même espèce; que l'on dise, comme L'Hôpi-

tal, par exemple, que deux quantités sont rigoureusement égales, lorsque leur différence est démontrée plus petite que toute quantité donnée, la proposition est réellement identique de part et d'autre. Et, pour rétablir un accord apparent entre Archimède et Euclide, il ne suffit pas, comme on le fait encore parfois, de reprendre la formule déjà adoptée au XVIe siècle par Cardan et Foix-Candale, à savoir que l'angle mixtiligne est *hétérogène* avec l'angle mixtiligne. Dire qu'au contraire la ligne circulaire est *homogène* (1) avec les périmètres des polygones inscrits et circonscrits, c'est, en effet, au fond le recours de Clavius, mais cette formule suppose une définition de l'homogénéité que l'on ne peut obtenir sans cercle vicieux.

Le postulat d'Archimède, tel que nous l'avons rappelé, exige impérieusement que les démonstrations d'Euclide (III, 16) soient complétées par les conclusions :

« Puisque l'angle du demi-cercle est plus grand que tout angle aigu, il est rigoureusement droit.

» Puisque l'angle de contact est plus petit que tout angle aigu, il est rigoureusement nul (comme angle). »

C'est là la thèse de Viète, et elle est digne de l'homme qui, le premier, a su représenter, par une forme algébrique illimitée, le rapport de la circonférence au diamètre. PAUL TANNERY.

(1) Viète (*Isagoge*, n° 28) explique, par l'*hétérogénéité* de la circonférence du cercle et du diamètre, que leur rapport ne puisse être fourni par une équation algébrique.

MÉLANGES.

SUR LA DÉTERMINATION DU GENRE D'UNE CERTAINE CATÉGORIE D'INTÉGRALES ABÉLIENNES ET QUELQUES APPLICATIONS;

PAR M. J. DOLBNIA.

1. La détermination du genre des équations algébriques binomes est indiquée, d'une manière très détaillée, dans l'Ouvrage de MM. Appell et Goursat : *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, 1894 (¹). La règle de la détermination du genre est donnée, dans cet Ouvrage, après la formule de Riemann concernant toutes les équations algébriques dont les points critiques, ainsi que leur nature, sont connus d'avance. Il existe cependant une quantité de questions intéressantes pour la solution desquelles des recherches spéciales sont nécessaires indépendamment de la théorie générale de Riemann. Ces recherches sont indispensables dans tous les cas où il faut connaître non seulement le genre de l'intégrale abélienne, mais aussi où il faut déterminer toutes les intégrales de première espèce dépendant de l'équation algébrique binome donnée. Prenons l'intégrale

$$J = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^{\alpha}(x-b)^{\beta}\dots(x-l)^{\lambda}}}.$$

Remarquons d'abord qu'on peut toujours supposer

$$\alpha + \beta + \gamma + \dots + \lambda = mk,$$

où k est un nombre entier; en outre supposons toujours que

$$\alpha,\quad \beta,\quad \gamma,\quad \dots,\quad \lambda$$

sont tous inférieurs à m, car autrement J ne sera pas une intégrale de première espèce. Nommons I le genre de l'intégrale, le

(¹) P. 236-248.

nombre des intégrales indépendantes de la forme

$$(1)\qquad I_n = \int \frac{Fx\,dx}{\sqrt[m]{[(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda]^n}}$$

$$n \leqq m-1,$$

conservant une valeur finie sur toute la surface de la sphère.

Dans cette formule Fx est une fonction entière que nous pouvons disposer à volonté. Nous lui donnerons telle ou telle forme dans le but d'obtenir l'intégrale partout finie. Si, par exemple, il se trouve que

$$\alpha n = k_1 m + \alpha_1, \qquad \beta n = k_2 m + \beta_1, \qquad \gamma n = k_3 m + \gamma_1, \qquad \ldots,$$

où

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1, \quad \ldots,$$

sont tous moindres que m, nous avons

$$I_m = \int \frac{Fx\,dx}{(x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}(x-c)^{k_3}\ldots \sqrt[m]{(x-a)^{\alpha_1}\ldots(x-l)^{\lambda_1}}}.$$

Si l'on prend

$$Fx = x^p (x-a)^{k_1}(x-b)^{k_2}(x-c)^{k_3}\ldots,$$

nous aurons

$$I_m = \int \frac{x^p\,dx}{\sqrt[m]{(x-a)^{\alpha_1}(x-b)^{\beta_1}\ldots(x-l)^{\lambda_1}}}.$$

Il est clair que, donnant à p une valeur convenable, l'intégrale I_m conserve une valeur finie pour toute la surface de la sphère.

2. Nommons, comme toujours par

$$E\frac{A}{B},$$

le plus grand nombre entier contenu dans la fraction $\frac{A}{B}$. Posons encore dans la formule (1)

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{p_1}{q_1}, \qquad \frac{\beta}{m} = \frac{p_2}{q_2}, \qquad \ldots, \qquad \frac{\lambda}{m} = \frac{p_i}{q_i};$$

$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots, \frac{p_i}{q_i}$ sont des fractions irréductibles. Si $n = 1$ les in-

tégrales indépendantes de la première espèce se déterminent par la formule

$$\int \frac{x^p\, dx}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta (x-c)^\gamma \ldots (x-l)^\lambda}},$$
$$0 \leqq p \leqq k-2;$$

par conséquent, en nommant le nombre des intégrales indépendantes de la première espèce par

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_{m-1},$$

nous avons

$$N_1 = k-1,$$
$$N_2 = 2k - 1 - E\frac{2p_1}{q_1} - E\frac{2p_2}{q_2} - \ldots - E\frac{2p_i}{q_i},$$
$$N_3 = 3k - 1 - E\frac{3p_1}{q_1} - E\frac{3p_2}{q_2} - \ldots - E\frac{3p_i}{q_i},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

enfin

$$N_{m-1} = (m-1)k - 1 - E\frac{(m-1)p_1}{q_1} - E\frac{(m-1)p_2}{q_2} - \ldots - E\frac{(m-1)p_i}{q_i}.$$

Par conséquent

$$(2) \qquad N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \sum_1^i \sum_{l=1}^{l=m-1} E\frac{lp_i}{q_i}.$$

Calculons

$$S = \sum_{l=1}^{l=m-1} E\frac{lp_i}{q_i}.$$

Nous avons

$$\frac{p_i}{q_i} = E\frac{p_i}{q_i} + \frac{r_1}{q_i},$$
$$\frac{2p_i}{q_i} = E\frac{2p_i}{q_i} + \frac{r_2}{q_i},$$
$$\frac{3p_i}{q_i} = E\frac{3p_i}{q_i} + \frac{r_3}{q_i},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{(m-1)p_i}{q_i} = E\frac{(m-1)p_i}{q_i} + \frac{r_{m-1}}{q_i},$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_{m-1}$ sont les plus petits résidus positifs suivant le module q_i. Par conséquent

$$\frac{m(m-1)}{2}\frac{p_i}{q_i} = S + \frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_{m-1}}{q_i};$$

en posant

$$m = q_i s_i,$$

nous avons

$$S = \frac{m}{2q_i}[(m-1)p_i - q_i + 1];$$

(3) $$N = \frac{(m-1)(mk-2)}{2} - \frac{m}{2}\sum_{i=1}^{i=i}\frac{(m-1)p_i - q_i + 1}{q_i}.$$

La formule (3) détermine le genre de l'intégrale

$$I = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^\beta \ldots (x-l)^\lambda}}.$$

3. *Exemple* I. — Définir le genre de l'intégrale

$$A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}} \quad (^1).$$

Ici nous aurons

$$m = 6, \quad k = 1, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{6}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{2};$$

par conséquent

$$N = 10 - 3\left(\frac{5-6+1}{6} + \frac{5-3+1}{3} + \frac{5-2+1}{2}\right) = 1.$$

Exemple II. — Définir le genre de l'intégrale

$$B = \int \frac{\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b(x-c)}} \quad (^2).$$

Ici nous aurons

$$m = 4, \quad k = 1, \quad \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_3}{q_3} = \frac{1}{4};$$

par conséquent

$$N = 3 - 2\left(\frac{3-2+1}{2} + \frac{3-4+1}{4} + \frac{3-4+1}{4}\right) = 1.$$

Exemple III. — Définir le genre de l'intégrale

$$C = \int \frac{\partial x}{\sqrt[m]{(x-a)^\alpha (x-b)^{m-\alpha}}}.$$

---

(1) APPELL ET GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques etc.*, p. 245.
(2) *Loc. cit.*

Ici nous aurons

$$m = m, \qquad k = 1, \qquad \frac{p_1}{q_1} = \frac{2}{m}, \qquad \frac{p_2}{q_2} = \frac{m-2}{m},$$

$$N = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - \frac{m}{2}\left[\frac{(m-1)2 - m + 1}{m} + \frac{(m-1)(m-2) - m + 1}{m}\right] = 0.$$

4. La méthode indiquée amène non seulement à la détermination du genre de l'intégrale, mais présente aussi le moyen pour obtenir toutes les intégrales indépendantes les plus simples de la première espèce, ce qui est indispensable dans tous les cas où, d'après la nature du problème, il faut faire *l'inversion* de l'intégrale. Pour expliquer la théorie, résolvons quelques problèmes qui par eux-mêmes ont un certain intérêt.

I. Trouver les conditions suivant lesquelles l'intégrale

$$A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[6]{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. Le genre de l'intégrale, comme nous l'avons trouvé, est égal à l'unité; par conséquent l'intégrale est elliptique. Pour l'exprimer par les fonctions elliptiques de Weierstrass, il faut trouver l'argument de la première espèce. De toutes les intégrales du type

$$I_k = \int \frac{F x \, \partial x}{\sqrt[6]{[(x-a)(x-b)^2(x-c)^3]^k}},$$

il faut choisir l'intégrale conservant partout la valeur finie, c'est-à-dire n'ayant pas les points critiques logarithmiques. Il est facile de se convaincre que l'intégrale cherchée ne pourra être trouvée que dans le cas unique $k = 5$. Nous avons

$$I_5 = \int \frac{F x \, \partial x}{\sqrt[6]{(x-a)^5(x-b)^{10}(x-c)^{15}}},$$

ou

$$I_5 = \int \frac{F x \, \partial x}{(x-b)(x-c)^2 \sqrt[6]{(x-c)^3(x-b)^4(x-a)^5}}.$$

En prenant

$$F x = (x-b)(x-c)^2,$$

nous aurons l'argument de la première espèce

$$I_3 = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{(x-c)^3(x-b)^4(x-a)^5}},$$

Ayant cela en vue, présentons l'intégrale donnée sous la forme

$$A = \int \frac{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)}}{\sqrt[6]{(x-c)^3(x-b)^4(x-a)^6}}\,dx.$$

Posons

$$x - a = \frac{1}{y};$$

alors

$$A = -\int \frac{\sqrt[3]{(a-b)y+1}\,dy}{y\sqrt[6]{[(a-c)y+1]^3[(a-b)y+1]^4}},$$

ou

$$A = -\frac{1}{\sqrt[6]{(a-b)^2(a-c)^3}}\int \frac{\sqrt[3]{y+\beta}\,dy}{\sqrt[6]{(y+\alpha)^3(y+\beta)^4}},$$

$$\alpha = \frac{1}{a-c}, \qquad \beta = \frac{1}{a-b};$$

ou

$$A = -\sqrt[6]{\frac{2^3.3^5}{5.(a-b)^2(a-c)^3}}\int \frac{\sqrt[3]{y+\beta}}{y\sqrt[6]{\frac{2^3.3^5}{5}(y+\alpha)^3(y+\beta)^4}}\,dy.$$

Déterminons y par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^6 = \frac{2^3.3^5}{5}(y+\alpha)^3(y+\beta)^4,$$

ainsi que par la condition que y a son infini pour $z = 0$. Il est facile de prouver par la substitution immédiate que

$$y = 120\,p^3 z - \beta,$$

$$g_2 = 0 \qquad g_3 = \frac{1}{30}(\beta - \alpha). \qquad p'z = \sqrt{4p^3 z - \frac{\beta-\alpha}{30}};$$

par conséquent

$$\sqrt[3]{y+\beta} = 2pz\sqrt[6]{3^2.5^2},$$

donc

$$A = -\frac{1}{20}\sqrt[3]{\frac{2^3.3.5}{(a-b)^2(a-c)^3}}\int \frac{pz\,dz}{p^3 z - p^3 z_0},$$

$$p^3 z_0 = \frac{\beta}{120},$$

où X est une fonction rationnelle de x^n et $\sqrt[n]{a + bx^n}$ ([1]). L'intégrale la plus intéressante de ce type est

$$\int \frac{\partial z}{z\sqrt[n]{1 + z^n}}.$$

Par la substitution

$$z = \frac{1}{x},$$

cette intégrale se réduit à la forme

$$C = \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{x^n + 1}}.$$

Posant ici

$$x^n = t,$$

nous aurons

$$C = \frac{1}{n}\int \frac{\partial t}{\sqrt[n]{t^{n-1}(1 + t)}}.$$

Le genre de cette intégrale est égal à zéro (n° 3). Il est facile de la réduire aux logarithmes. En effet

$$C = \frac{1}{n}\int \frac{\partial t}{t}\sqrt[n]{\frac{t}{1 + t}}.$$

En posant

$$\sqrt[n]{\frac{t}{1 + t}} = u,$$

nous avons

$$t = \frac{u^n}{u^n - 1},$$

$$C = \int \frac{\partial u}{u(u^n - 1)}.$$

7. IV. Dans les exemples suivants, avant de traiter le genre de l'intégrale il faut faire la substitution. Prenons l'intégrale

$$D = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x^3 - a)(x^3 - b)}}.$$

Posons

$$x^3 = y;$$

nous aurons

$$D = \frac{1}{3}\int \frac{\partial y}{\sqrt[3]{y^2(y - a)(y - b)}}.$$

([1]) *Instit. Calculi integr.*, Vol. quartum, p. 12-13; Petropoli, 1845.

Si l'on pose

$$y = \alpha + \frac{1}{z},$$

l'intégrale se réduira à la forme

$$D_1 = \int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^2(z+m)^2(z+n)(z+p)}}.$$

Une autre intégrale indépendante de la première espèce sera

$$D_2 = \int \frac{dz}{\sqrt[3]{z(z+m)(z+n)^2(z+p)^2}}.$$

Ainsi l'intégrale traitée est du second genre; par conséquent elle ne peut être réduite aux elliptiques.

V. Examinons le genre de l'intégrale

$$E = \int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[4]{(x^4-a)(x^4-b)}}.$$

En posant

$$x^4 = t,$$

nous avons

$$E = \frac{1}{4}\int \frac{\partial t}{\sqrt[4]{t^2(t-a)(t-b)}};$$

le genre de l'intégrale est égal à l'unité; l'intégrale s'exprime par des fonctions elliptiques.

Les exemples cités expliquent suffisamment l'esprit de la méthode.

NOUVELLE DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES SUR LES POINTS D'INFLEXION DE L'HERPOLHODIE;

PAR M. G. MANNOURY.

I.

L'HERPOLHODIE DE POINSOT N'A PAS DE POINTS D'INFLEXION.

1. Dans la démonstration très élémentaire que nous allons donner du théorème nommé ci-dessus, nous emploierons quelques notions d'Algèbre vectorielle. Ainsi, nous représenterons par $\underline{\alpha}_{\mathrm{OP}}$, ou simplement par $\underline{\alpha}$ (toujours souligné) un vecteur dont la longueur est donnée par α (non souligné) et la direction par OP.

Nous introduirons deux produits vectoriels. L'un de ces produits, que nous désignerons par $\cos_\pi(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$, n'est autre que le produit interne de Grassmann.

Il est égal au $-s\underline{\alpha\beta}$ du calcul des quaternions, et désigne le produit des longueurs des vecteurs avec le cosinus de leur angle. L'autre produit dont nous ferons usage, et qui sera désigné par $\underline{\sin_\pi}(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ est lui-même un vecteur, qui est égal au produit des longueurs α et β avec le sinus de l'angle, et qui est mené normalement au plan $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ du côté d'où l'on voit la rotation de $\underline{\alpha}$ vers $\underline{\beta}$ dans l'angle $(\underline{\alpha}, \underline{\beta})$ dans un sens positif; il est identique au produit externe de Grassmann, et à l'expression $V\underline{\alpha\beta}$ des quaternions.

Nous n'aurons besoin d'appliquer aucune autre propriété de ces expressions que leur propriété fondamentale, c'est-à-dire la propriété distributive des produits algébriques, exprimée par les relations

$$P(\underline{\alpha}, \underline{\beta}_1 + \underline{\beta}_2) = P(\underline{\alpha}, \underline{\beta}_1) + P(\underline{\alpha}, \underline{\beta}_2),$$
$$P(\underline{\alpha}_1 + \underline{\alpha}_2, \underline{\beta}) = P(\underline{\alpha}_1, \underline{\beta}) + P(\underline{\alpha}_2, \underline{\beta}),$$

où P désigne un produit quelconque et où + est le signe de l'addition *vectorielle*, c'est-à-dire comme l'addition des forces dans le parallélogramme des forces.

Ces simples notions suffisent pour simplifier largement le traitement de la Mécanique élémentaire et il serait à souhaiter qu'elles fussent employées plus généralement. Il est juste de dire que nous les avons empruntées à M. D.-J. Korteweg, recteur de l'Université d'Amsterdam, qui fait souvent usage de ces produits dans l'enseignement de la Mécanique.

2. Soient P, Q, R les moments principaux d'inertie d'un corps libre fixé en O, rangés de sorte que l'on ait $P > Q > R$; OX, OY, OZ les axes principaux d'inertie; $\underline{OA} = \underline{\omega} = \underline{p}\,o_x + \underline{q}\,o_y + \underline{r}\,o_z$ l'axe instantané de rotation, et $\underline{OB} = \underline{\dot\omega} = \underline{\dot p}\,o_x + \underline{\dot q}\,o_y + \underline{\dot r}\,o_z$ l'accélération première de la rotation, c'est-à-dire la vitesse à la fois relative et absolue du point A.

Les équations du mouvement prennent donc la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \dot p &= \frac{Q-R}{P}\,qr,\\ \dot q &= \frac{R-P}{Q}\,rp,\\ \dot r &= \frac{P-Q}{R}\,pq. \end{aligned}\right.$$

Par conséquent,

$$\sum Pp^2 = \text{const.} = A,$$

$$\sum P^2p^2 = \text{const.} = B,$$

le signe Σ indiquant la somme des trois fonctions obtenues par la permutation circulaire de P, Q, R, de p, q, r (ou de X, Y, Z).

L'axe d'impulsion $\underline{OI} = \Sigma\underline{Pp}\,o_x$ est constant en longueur et en direction, parce que la vitesse relative de son extrémité I

$$\sum \underline{P\dot p}\,o_x = \sum \underline{(Q-R)qr}\,o_x,$$

est égale et opposée à la vitesse d'entraînement du même point

$$\underline{\sin}_\pi(\underline{\omega}, \underline{OI}) = \underline{\sin}_\pi(\underline{p}\,o_x + \underline{q}\,o_y + \underline{r}\,o_z, \underline{Pp}\,o_x + \underline{Qq}\,o_y + \underline{Rr}\,o_z)$$

$$= \sum \underline{(R-Q)qr}\,o_x.$$

L'invariabilité du $\cos_\pi(\underline{\omega}, \underline{OI}) = \Sigma P p^2 = A$ montre donc que le point A décrit une courbe plane normale à $\underline{OI}$, à une distance de l'origine égale à $\frac{A}{\sqrt{B}}$. C'est l'herpolhodie de Poinsot.

3. Soit maintenant $\underline{OC} = \underline{\ddot{\omega}}$ l'accélération seconde de la rotation, c'est-à-dire la vitesse absolue du point B. Celle-ci est composée de sa vitesse d'entraînement $\underline{\sin}_\pi(\underline{\omega}, \underline{\dot{\omega}})$ et de sa vitesse relative au corps mobile $\sum \underline{\left(\frac{d\dot{p}}{dt}\right)_{Ox}}$, donc

$$\underline{\ddot{\omega}} = \underline{\sin}_\pi(\underline{\omega}, \underline{\dot{\omega}}) + \sum \underline{\left(\frac{d\dot{p}}{dt}\right)_{Ox}}$$

$$= \sum \underline{(q\dot{r} - r\dot{q})_{Ox}} + \sum \underline{\frac{Q-R}{P}(q\dot{r} + r\dot{q})_{Ox}}$$

$$= \sum \underline{\left(q\dot{r}\,\frac{P+Q-R}{P} - r\dot{q}\,\frac{P-Q+R}{P}\right)_{Ox}}.$$

4. Si l'herpolhodie avait un point d'inflexion, $\underline{\ddot{\omega}}$ aurait la même direction que $\underline{\dot{\omega}}$, ou, ce qui revient au même, le volume du parallélipipède construit sur $\underline{\omega}$, $\underline{\dot{\omega}}$ et $\underline{\ddot{\omega}}$ se réduirait à zéro. L'herpolhodie étant une courbe plane, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un point d'inflexion est donc

$$(2)\quad \begin{cases} 0 = \cos_\pi[\underline{\ddot{\omega}}, \underline{\sin}_\pi(\underline{\omega}, \underline{\dot{\omega}})] \\ \quad = \cos_\pi\left[\sum \underline{\left(q\dot{r}\,\frac{P+Q-R}{P} - r\dot{q}\,\frac{P-Q+R}{P}\right)_{Ox}} \sum \underline{(q\dot{r} - r\dot{q})_{Ox}}\right] \\ \quad = \sum \left(q^2\dot{r}^2\,\frac{P+Q-R}{P} + r^2\dot{q}^2\,\frac{P-Q+R}{P} - 2q\dot{q}r\dot{r}\right). \end{cases}$$

Les termes $\Sigma - 2q\dot{q}r\dot{r}$ peuvent s'écrire

$$\frac{p^2q^2r^2}{PQR}\sum -2P(R-P)(P-Q) = \frac{p^2q^2r^2}{PQR}(Q-R)^2(-P+Q+R),$$

de sorte que la formule (2) revient à celle-ci :

$$(3)\quad \begin{cases} 0 = f = \sum\left[q^2\dot{r}^2\,\frac{P+Q-R}{P} + r^2\dot{q}^2\,\frac{P-Q+R}{P}\right. \\ \qquad\qquad \left. + \frac{p^2q^2r^2}{PQR}(Q-R)^2(-P+Q+R)\right]. \end{cases}$$

5. Les moments principaux d'inertie sont des nombres positifs assujettis à la condition que la somme de deux d'entre eux ne peut surpasser le troisième, donc tous les termes de f sont positifs. De plus, ils ne peuvent s'annuler à la fois, sauf lorsque deux des quantités p, q et r sont o, ce qui entraînerait $\dot{p} = \dot{q} = \dot{r} = 0$, de sorte que la rotation serait invariable. Donc l'herpolhodie de Poinsot n'a pas de points d'inflexion.

6. *Remarque.* — La fonction f peut être simplifiée beaucoup par l'introduction des valeurs (1) :

$$f = \sum \left[p^2q^4\frac{(P+Q-R)(P-Q)^2}{R^2P} + p^2r^4\frac{(P-Q+R)(R-P)^2}{Q^2P} + \frac{p^2q^2r^2}{PQR}(-P+Q+R)(Q-R)^2\right]$$
$$= \sum (P+Q-R)(P-Q)^2\left(\frac{p^2q^4}{R^2P} + \frac{p^4q^2}{R^2Q} + \frac{p^2q^2r^2}{PQR}\right)$$
$$= \frac{A}{PQR}\sum\frac{(P+Q-R)(P-Q)^2}{R}p^2q^2;$$

la condition devient donc, après division par un facteur constant, fini et différent de zéro :

$$(4) \qquad 0 = F = \sum\frac{(P+Q-R)(P-Q)^2}{R}p^2q^2.$$

II.

L'HERPOLHODIE EN GÉNÉRAL.

7. On sait que le problème est susceptible d'extension, quand on définit l'herpolhodie comme le lieu des points de contact d'une surface de second degré, fixée par son centre, avec un plan fixe, sur lequel elle roule sans glisser. Dans ce cas général, l'herpolhodie peut présenter des points d'inflexion et nous démontrerons que la fonction F nous fournit le moyen de les reconnaître d'une manière rapide et de retrouver ainsi les résultats connus.

Il est facile à vérifier que les calculs du Chap. I subsistent, quand nous remplaçons A par l'unité et supposons que $\Sigma Pp^2 = 1$ soit l'équation donnée de la surface et $\delta = \frac{1}{\sqrt{B}}$ la distance de son centre au plan fixe.

Seulement, les quantités P, Q et R ne sont plus assujetties à aucune condition, sauf celle d'être réelles et non pas négatives à la fois. Donc il faut chercher les maxima et minima de F.

8. Prenons la dérivée de F par rapport au temps :

$$\dot{F} = \sum \frac{(P+Q-R)(P-Q)^2}{R}\left(2pq^2 \times \frac{Q-R}{P} qr + 2p^2 q \times \frac{R-Q}{Q} rp\right)$$

$$= \frac{2pqr}{PQR}\sum [(P+Q-R)(P-Q)^2(Q-R)Qq^2$$
$$+(-P+Q+R)(Q-R)^2(P-Q)Qq^2]$$

$$= \frac{2pqr(P-Q)(Q-R)(R-P)}{PQR}\sum -(P-Q+R)Qq^2$$

$$= \frac{2pqr(P-Q)(Q-R)(R-P)}{PQR}(2B - A\Sigma P).$$

Une valeur maximum ou minimum de F correspond donc avec $p = 0$, $q = 0$ ou avec $r = 0$.

On trouve :

Pour $p = 0$,

$$F_1 = \frac{(-P+Q+R)}{PQR}(B-R)(Q-B),$$

Pour $q = 0$,

$$F_2 = \frac{(P-Q+R)}{PQR}(B-P)(R-B),$$

Pour $r = 0$,

$$F_3 = \frac{(P+Q-Q)}{PQR}(B-Q)(P-B).$$

9. Remplaçons les équations $\Sigma P p^2 = 1$ et $\Sigma P^2 p^2 = B$ par les suivantes :

(5) $\quad q^2 Q(P-Q) - r^2 R(R-P) = P - B,$

(6) $\quad r^2 R(Q-R) - p^2 P(P-Q) = Q - B,$

(7) $\quad p^2 P(R-P) - q^2 Q(Q-R) = R - B,$

et examinons les trois types de la surface de deuxième degré :

1° *Ellipsoïde :* $P > Q > R > 0$.

a. $B > P$: L'équation (5) prouve qu'il n'y a pas de solution réelle.

b. $P > B > Q$: Pour $p = 0$, q et r deviennent imaginaires, mais q et r s'annuleront alternativement. La fonction F, qui reste

toujours réelle et finie, doit donc osciller entre les valeurs F_2 et F_3, qui sont positives toutes les deux; donc il n'y a pas de points d'inflexion.

c. $Q > B > R$: Ici r reste différent de zéro, p et q s'annulent alternativement. F reste entre F_1 et F_2; F_1 a le signe de

$$-P + Q + R,$$

F_2 est positif, donc il n'y a inflexion que lorsque $P > Q + R$, c'est-à-dire si $a = \frac{1}{\sqrt{P}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{Q}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{R}}$ sont les demi-axes de la surface

$$\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad (a < b < c).$$

d. $R > B > o$: pas de solution réelle;

2° *Hyperboloïde à une nappe* : $P > Q > o > R$.

a. $B > P$: F oscille entre F_1 et F_2; F_1 est négatif, F_2 a le signe de

$$P - Q + R,$$

donc il y a inflexion si $P - Q + R > o$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{\sqrt{P}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{Q}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{-R}}$ étant les demi-axes :

$$\frac{1}{a^2} > \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad (b < a).$$

b. $P > B > Q$: F reste entre F_1 et F_3, qui sont négatifs tous les deux; il n'y a pas d'inflexion.

c. $Q > B > o$: pas de solution réelle;

3° *Hyperboloïde à deux nappes :* $P > o > Q > R$.

a. $B > P$: F reste entre F_2 et F_3; F_2 a le signe opposé de $P - Q + R$, F_3 est négatif, donc il y a inflexion quand $P - Q + R < o$, c'est-à-dire $a = \frac{1}{\sqrt{P}}$, $b = \frac{1}{\sqrt{-Q}}$, $c = \frac{1}{\sqrt{-R}}$ étant les demi-axes :

$$\frac{1}{c^2} > \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \qquad (b > c).$$

b. $P > B > o$: pas de solution réelle.

10. *Remarque.* — Quand il se présente un point d'inflexion, la formule (4) peut nous fournir sa distance au pied D de la perpendiculaire sur le plan fixe.

Soit λ le rayon vecteur d'un point de l'herpolhodie par rapport à D.

Des relations

$$\Sigma P p^2 = 1,$$
$$\Sigma P^2 p^2 = B,$$
$$\lambda^2 = \Sigma p^2 - \frac{1}{B},$$

on conclut

$$p^2 B(P-Q)(R-P) = -B\lambda^2 QR - (B-Q)(B-R),$$
$$q^2 B(Q-R)(P-Q) = -B\lambda^2 RP - (B-R)(B-P),$$
$$r^2 B(R-P)(Q-R) = -B\lambda^2 PQ - (B-P)(B-Q).$$

Substituant en (4), il vient

$$\begin{aligned} 0 = F = {} & \frac{1}{B^2(P-Q)(Q-R)(R-P)} \sum \frac{(P+Q-R)(P-Q)}{R} \\ & \times [\lambda^4 B^2 PQR^2 + \lambda^2 BR(B-R)(QB+PB-2PQ) \\ & + (B-P)(B-Q)(B-R)^2]. \end{aligned}$$

Le coefficient de λ^4 s'annule et l'on obtient, en effectuant les calculs,

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} F = 0 = {} & \frac{\lambda^2}{(P-Q)(Q-R)(R-P)} [2B\Sigma PQ(P-Q) - \Sigma PQ(P^2-Q^2)] \\ & + \frac{(B-P)(B-Q)(B-R)}{BPQR(P-Q)(Q-R)(R-P)} \Sigma PQ(P^2-Q^2) \\ = {} & -\lambda^2(2B-\Sigma P) - \frac{(B-P)(B-Q)(B-R)}{BPQR} \Sigma P. \end{aligned} \right.$$

Le rayon vecteur du point d'inflexion sera donc

$$\lambda^2 = -\frac{(B-P)(B-Q)(B-R)\Sigma P}{BPQR(2B-\Sigma P)} \quad [1].$$

---

[1] *Voir* entre autres G.-H. HALPHEN, *Traité des fonctions elliptiques*, 2e partie, p. 61 et suivantes.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XIX.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. Jordan, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 26, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL,
GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION,
A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY,
S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XIX. — ANNÉE 1895.

(TOME XXIX DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1895

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES. Quatorzième année, 1889-1890. Paris, Gauthier-Villars, 1890 (A, première Partie; B, seconde Partie).

Mansion (*P.*). — Généralisation de la formule approximative de W. Snell et Ozanam. (A, 45).

On a, avec une erreur toujours de même sens,

$$\int_0^t \frac{dt}{\sqrt{(1-k^2t^2)(1-l^2t^2)(1-m^2t^2)}} = \frac{3t}{\sqrt{1-k^2t^2}+\sqrt{1-l^2t^2}+\sqrt{1-m^2t^2}}.$$

Mansion (*P.*). — Sur le théorème fondamental de l'Analyse algébrique. (A, 46).

Les démonstrations de ce théorème, qui établissent l'existence d'une racine et prouvent en même temps que cette racine varie continûment avec les coefficients, peuvent recevoir une forme purement arithmétique.

D'Ocagne. — Sur la théorie des coordonnées parallèles. (A, 47-50).

Soient P un point, π un plan, OABC un tétraèdre de référence; a l'intersection de OA avec le plan PBC, b l'intersection de OB avec le plan PAC, c l'intersection de OC avec PAB, α, β, γ les intersections de π avec OA, OB,

OC. On peut prendre pour coordonnées de P et π :

$$(\mathrm{P}) \qquad x = \lambda \frac{\mathrm{O}a}{\mathrm{A}a}, \qquad y = \mu \frac{\mathrm{O}b}{\mathrm{B}b}, \qquad z = \nu \frac{\mathrm{O}c}{\mathrm{C}c},$$

$$(\pi) \qquad u = -\frac{1}{\lambda} \frac{\mathrm{A}\alpha}{\mathrm{O}\alpha}, \qquad v = -\frac{1}{\mu} \frac{\mathrm{B}\beta}{\mathrm{O}\beta}, \qquad w = -\frac{1}{\nu} \frac{\mathrm{C}\gamma}{\mathrm{O}\gamma},$$

λ, μ, ν étant trois paramètres constants. On trouve pour condition que P soit, dans π,

$$ux + vy + wz + 1 = 0.$$

Si l'on fait $\lambda = \mathrm{OA}$, $\mu = -\mathrm{OB}$, $\nu = -\mathrm{OC}$ et si le plan ABC est à l'infini, x, y, z deviennent les coordonnées cartésiennes du point P, u, v, ν les coordonnées plückériennes du plan. Si $\lambda = -\frac{1}{\mathrm{OA}}$, $\mu = -\frac{1}{\mathrm{OB}}$, $\nu = -\frac{1}{\mathrm{OC}}$, et si O s'éloigne à l'infini, x, y, z deviennent les coordonnées parallèles du point; u, v, w les coordonnées parallèles du plan. Le système corrélatif du système cartésien est donc le système des coordonnées parallèles du plan; le système plückérien a pour corrélatif celui des coordonnées parallèles du point.

Gilbert (*Ph.*). — Sur quelques formules d'un usage général dans la Physique mathématique. (B, 1-28).

Une formule fort simple, due à Ostrogradsky, permet de transformer une intégrale étendue à tous les éléments d'un volume en une autre étendue aux éléments de la surface qui enveloppe ce volume, et réciproquement. L'emploi de cette formule est très utile dans plusieurs questions de Physique mathématique et de Mécanique.

La formule correspondante, en coordonnées curvilignes orthogonales, obtenue par M. Gilbert a, par sa généralité, une portée plus grande et, le plus souvent, elle conduit à des solutions faciles et élégantes. M. Gilbert l'applique, en particulier, à la résolution en coordonnées curvilignes du problème des températures variables dans un milieu isotrope, à la démonstration du théorème de Green, à la détermination des équations aux dérivées partielles du mouvement des fluides et à celle des équations de l'équilibre intérieur et du mouvement des milieux élastiques, dans le même système de coordonnées.

Plusieurs formules importantes, notamment deux formules employées par Gauss dans la théorie des phénomènes capillaires pour réduire les intégrales sextuples à des intégrales quadruples, dérivent également de la formule d'Ostrogradsky généralisée par M. Gilbert.

M. de Salvert, dans le premier Chapitre de son *Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XIII, 2ᵉ Partie; 1889), a donné directement, avant M. Gilbert, l'équation du mouvement de la chaleur en coordonnées quelconques.

Gilbert (*Ph.*). — Sur l'herpolhodie de Poinsot et sur un appareil de MM. Darboux et Kœnigs. (A, 42-43; B, 25-34).

Historique des recherches récentes sur l'herpolhodie; démonstration simple du théorème de MM. Hess et de Sparre, sur la non-existence de points d'in-

flexion et de rebroussement dans cette courbe; description d'un appareil permettant de décrire cette courbe remarquable et d'un autre appareil apparenté avec celui-là.

Mansion (*P.*). — Sur les postulats et les axiomes d'Euclide. (B, 35-45).

Après les définitions du Livre I des *Élements d'Euclide*, on trouve, dans la plupart des manuscrits et des éditions de ce Livre célèbre, quinze propositions rangées sous deux titres distincts : *Postulats* et *Notions communes* ou *axiomes*. L'auteur soumet ces propositions à un examen critique au point de vue de leur authenticité. Voici ses conclusions : 1° Les meilleurs manuscrits des *Éléments* contiennent les six postulats et les neuf axiomes; 2° Tout le monde admet que les trois premiers postulats (les postulats de construction) sont dignes d'Euclide et peuvent lui être attribués; 3° Il en est de même des trois autres (4. Tous les angles droits sont égaux; 5. Deux droites se rencontrent si la somme des angles intérieurs d'un même côté est moindre que deux droits; 6. Deux droites ne peuvent enfermer un espace). Euclide a reconnu pratiquement la nécessité de recourir à ces postulats pour le postulat 5, parce qu'il ne pouvait le démontrer; pour 4 et 6, parce qu'il devait éviter la Géométrie sphérique; 4° les axiomes 1 à 9 forment un ensemble logique de propositions toutes étroitement apparentées les unes aux autres, qu'Euclide n'aura pas voulu séparer les unes des autres.

En résumé, les six postulats et les neuf axiomes peuvent être attribués à Euclide.

Mansion (*P.*). — Analyse des Recherches du P. Saccheri, S. J., sur le postulatum d'Euclide. (A, 43-45, 59; B, 46-59).

Historique des premières recherches sur la Géométrie non euclidienne (Lobatchefsky, Bolyai, Gauss, Riemann, De Tilly, Beltrami). Possibilité de déduire la Géométrie euclidienne de la proposition relative au carré de l'hypoténuse dans un triangle rectangle. Enfin analyse de l'Ouvrage intitulé : *Euclides ab omni nævo vindicatus*, Auctore H. Saccherio, S.-J. Mediolani, MDCCXXXIII, dont Beltrami a donné un aperçu dans la séance du 17 mars 1889 de la *R. Accademia dei Nuovi Lincei* (t. V, 1er semestre, 441-448). Saccheri a cru démontrer le postulatum d'Euclide, mais au fond, ce qu'il a établi avec rigueur, ce sont les premiers principes de la Géométrie lobatchefskienne et les premières propriétés de l'équidistance d'une droite, étudiées plus tard par Lamarle, De Tilly, Frischauf.

De Salvert. — Mémoire sur la recherche la plus générale d'un système orthogonal triplement isotherme (B, 121-283).

Mansion (*P.*). — Rapport. (A, 50-58).

Suite du Mémoire dont les deux premiers Chapitres ont été analysés antérieurement. L'auteur établit d'abord les équations aux dérivées partielles d'un système triplement orthogonal quelconque, dues à Lamé. Dans l'une de ces équations entrent six dérivées partielles. L'auteur traite complètement les

cas où deux de ces dérivées sont identiquement nulles, ce qui correspond à l'existence d'une famille de surfaces développables dans le système triplement isotherme étudié.

Dans le Chapitre suivant, M. de Salvert entame la solution générale de la question, en déterminant, en fonction des coordonnées curvilignes, les trois premiers invariants différentiels relatifs à ces coordonnées. Il fait dépendre cette détermination de l'intégration d'une équation différentielle du cinquième ordre, savoir :

$$D\left[\frac{1}{Du} D \frac{D^3 u}{Du}\right] = 0.$$

Il effectue cette intégration et conduit la solution jusque, exclusivement, à la détermination de l'expression des coordonnées rectilignes, en fonction des coordonnées curvilignes.

L'exposition de M. de Salvert est parfois un peu longue, mais, en revanche, elle est très claire.

De Sparre. — Sur le pendule de Foucault. (B, 284-368).

Les résultats de ce Mémoire ont été présentés sous une forme un peu différente, le 6 octobre 1890, à l'Académie des Sciences de Paris, et ont fait l'objet d'un Rapport de M. Resal, le 13 avril 1891 (*Comptes rendus*, CXII, p. 769). M. Gilbert a aussi analysé la seconde Partie du Mémoire dans le tome XV des *Annales de la Société scientifique*, 1re Partie, p. 1-2.

Dans la première Partie, l'auteur étudie le mouvement du pendule de Foucault dans le vide. Il faut d'abord observer qu'il est nécessaire de tenir compte, dans l'*établissement* des équations du pendule de Foucault, des termes en ω^2, carré de la vitesse angulaire de rotation de la Terre, bien que l'on puisse les négliger dans les *résultats*. Cela tient à ce que les équations qui déterminent soit l'angle d'écart θ du pendule, soit son azimut φ, appartiennent à une catégorie d'intégrales singulières. Il cherche ensuite ces équations du mouvement en tenant compte des termes en ω^2 et des causes perturbatrices secondaires (attraction de la Lune, variation de l'attraction terrestre, quand le pendule se déplace). Enfin, il intègre approximativement ces équations; il prouve que l'on peut prendre, comme lorsqu'on ne tient pas compte de la rotation de la Terre,

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{e}{g}}\left[1 + \frac{1^2}{2^2}k^2 + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2}k^4 + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2}k^6 + \ldots\right],$$

2T étant la durée de la demi-oscillation.

Dans la seconde Partie, l'auteur traite du mouvement du pendule de Foucault dans l'air. Il s'occupe d'abord du mouvement du pendule ordinaire, avec oscillations d'amplitude quelconque, en supposant la résistance de l'air proportionnelle au carré de la vitesse. Il établit l'équation du mouvement, la ramène à une équation linéaire du premier ordre qu'il intègre, et obtient le temps en fonction de l'angle du pendule avec la verticale sous forme d'une intégrale assez compliquée. Il en déduit, avec l'approximation cherchée : 1° l'angle du pendule avec la verticale, au commencement d'une oscillation d'ordre donné; 2° la durée d'une oscillation de rang quelconque. Il arrive ainsi à la conséquence très simple que la résistance de l'air diminue la durée de la première oscilla-

tion simple de la quantité

$$\frac{1}{12}\pi\gamma\theta_0^2\sqrt{\frac{g}{l}},$$

γ étant un coefficient qui dépend de la masse pendulaire, θ_0 l'écart initial.

M. de Sparre aborde ensuite le problème plus compliqué du pendule de Foucault. « Il considère d'abord le mouvement de la projection du pendule réel sur le plan fictif, qu'il a appelé *plan d'oscillation*, et fait voir que ce mouvement est donné par le premier problème qu'il a résolu. Il étudie ensuite l'influence de la résistance de l'air sur le plan d'oscillation lui-même, dont il faut déterminer la vitesse moyenne autour du pendule, pendant une oscillation de rang donné. Plusieurs causes compliquent le problème : telles sont la diminution progressive de l'amplitude d'oscillation à chaque va-et-vient du pendule, l'existence d'intégrales singulières, dans lesquelles une erreur de l'ordre de ω^2 dans certains termes produit une erreur de l'ordre de ω dans le résultat, la présence du temps comme facteur dans des termes d'abord petits, qui peuvent ensuite croître considérablement. Cependant, l'auteur, à force de discussions patientes et en s'aidant de toutes les circonstances favorables, réussit à passer à travers les difficultés et à prouver que la vitesse de rotation du plan d'oscillation, dans l'air, ne diffère de ce qu'elle serait dans le vide, les circonstances initiales étant les mêmes, que par des termes de l'ordre de $\gamma\omega$, c'est-à-dire très petits » (Gilbert). Le Mémoire est terminé par quelques applications numériques.

MATHESIS, RECUEIL MATHÉMATIQUE A L'USAGE DES ÉCOLES SPÉCIALES ET DES ÉTABLISSEMENTS D'INSTRUCTION MOYENNE, publié par *P. Mansion* et *J. Neuberg*, Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars, 1890.

Tome X, 1890.

Lucas (*Ed.*). — Sur quelques questions de signe en Géométrie analytique. (5-8).

Distinction analytique des deux modes de croisement de deux droites dans l'espace (droites qui ne sont ni parallèles, ni concurrentes) et autres questions de signe analogues. *Comparez* DUHAMEL, *Mécanique*, Introduction, Chap. II.

Servais (*Cl.*). — Étude géométrique sur la cissoïde et de la strophoïde (9-14).

Résumé original des principales propriétés de ces courbes célèbres.

Carrara (*B.*). — Extraction de la racine carrée par la méthode des deux moyennes. (15-16).

Catalan (*E.*). — Sur le développement, en fraction continue, de $\sqrt{N}$. (17).

Si

$$N = a_0 b_0 = a_1 b_1 = a_2 b_2 = \ldots, \qquad 2a_1 = a_0 + b_0, \qquad 2a_2 = a_1 + b_1, \qquad \ldots,$$

on a

$$\lim a_n = \lim b_n = \sqrt{N},$$

pour $n = \infty$. Si a_0 est une réduite d'ordre p de la fraction continue égale à $\sqrt{N}$, $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en sont les réduites d'ordre $2p, 4p, 8p, \ldots, p$ étant supposé multiple du nombre des quotients incomplets de la période de la fraction continue.

Cesáro (*E.*). — Sur une question de limites. (25-28).

Démonstration de la *règle de l'Hospital pour les fonctions de variable entière*, et applications. Voici l'énoncé de cette règle qui devrait s'appeler plutôt *règle de Cesáro* : « Si pour n entier croissant indéfiniment, a_n et b_n tendent vers zéro, on a

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}},$$

pourvu que la seconde limite existe. »

Mansion (*P.*). — Crelle ou Brocard. (28-30).

Crelle a trouvé, en 1816, la propriété fondamentale des points appelés *points de Brocard* par M. Neuberg, à qui l'on doit aussi la dénomination de *point de Lemoine* pour le point de rencontre des médianes antiparallèles. Crelle ayant abandonné la Géométrie, tandis que MM. Lemoine et Brocard ont considérablement enrichi la Géométrie du triangle, il est juste de maintenir les deux désignations : points de Brocard, point de Lemoine.

Mandart (*H.*). — Sur un groupe de trois paraboles. (30-33).

Contribution à la géométrie du triangle. Chacune des paraboles considérées est l'enveloppe d'une droite rencontrant, à des distances égales de deux des sommets d'un triangle, les côtés de ce triangle qui passent par le troisième sommet.

Le Paige (*C.*). — La formule d'Ozanam est due à Snell (34-36).

La formule approximative

$$B = \frac{3b}{c + 2a},$$

qui lie les côtés $b, c, a = \sqrt{b^2 + c^2}$ d'un triangle rectangle à l'angle B opposé au plus petit côté, ou plutôt la construction correspondante, est due à W. Snell (*Cyclometricus*, 1621). Elle lui est expressément attribuée par A. Girard (*Table des sinus*, 1626), et aussi par Huygens (*De circuli magnitudine inventa*.

1654), qui prouve que la formule donne toujours une valeur trop petite pour B.

De Longchamps (*G.*). — Sur le tétraèdre orthocentrique. (49-53, 77-82).

Le tétraèdre orthocentrique est celui dont les hauteurs se coupent en un point appelé *orthocentre*. L'auteur en rappelle les propriétés déjà connues et en étudie de nouvelles par l'analyse. Il cherche la valeur du carré d'une arête, la plus courte distance de deux arêtes opposées, l'aire d'une face, le volume du tétraèdre, la sphère conjuguée, la sphère circonscrite, les deux sphères des douze points, etc.

Dewulf (*E.*). — Sur les coniques osculatrices. (55-58).

Étude d'une transformation où les points correspondants M, M' sont sur une droite passant par un point fixe O et où, de plus, M et M' forment sur le rayon commun OMM' des ponctuelles projectives dont les points doubles se confondent en O.

Peano (*G.*). — Les propositions du cinquième livre d'Euclide réduites en formules. (73-75).

Lucas (*Ed.*). — Sur les nombres parfaits. (74-76).

Propriétés diverses, parmi lesquelles nous distinguons celle-ci : Tout nombre parfait pair, autre que 6 et 496, est terminé par 16, 28, 36, 56 ou 76.

Casey (*J.*). — Complément de la théorie des polygones harmoniques. (96-114).

Addition à la *Géométrie élementaire récente*, publiée dans *Mathesis*, t. IX; p. 5-70.

Führmann (*W.*). — Sur un nouveau cercle associé à un triangle. (105-111).

Les bissectrices d'un triangle ABC rencontrent le cercle circonscrit en trois points, dont les symétriques par rapport aux côtés correspondants sont A_1, B_1, C_1. La circonférence passant par A_1, B_1, C_1 a de nombreuses propriétés étudiées par M. Führmann.

Bergmans (*C.*). — Théorèmes sur la parabole. (116-117).

Lucas (*Ed.*). — Criterium pour la formule de Paoli. (129-132).

Catalan (*E.*). — Remarques sur une Note de M. Lucas. (197-199).

Catalan (*E.*). — Sur l'analyse indéterminée du premier degré. (220-222, 241-243, 275-276).

M. Catalan simplifie et complète un procédé nouveau indiqué par Lucas, pour trouver le nombre exact des solutions non négatives de l'équation indéterminée $ax + by = c$.

Servais (*Cl.*). — Sur la réversibilité de la transformation linéaire. (132-137).

Démonstration simple plus complète que celle que l'auteur a donnée dans *Mathesis*, t. IX, p. 267-268, 1889; t. VII, p. 90-91, 1887.

Cesáro (*E.*). — Sur la développante de la chaînette. (138).

Toute développante de chaînette rencontre, sous un angle constant, une infinité de circonférences égales ayant leurs centres sur une droite.

Peano (*G.*). — Sur l'interversion des dérivations partielles. (153-154).

Démonstration du théorème suivant : « Si $f''_{xy}(x, y)$ existe aux environs de $x = x_0$, $y = y_0$ et est continue pour $x = x_0$, $y = y_0$ et si $f'_y(x, y_0)$ existe aux environs de $x = x_0$, alors $f''_{yx}(x_0, y_0)$ existe aussi et l'on a

$$f''_{yx}(x_0, y_0) = f''_{xy}(x_0, y_0).$$

L'auteur part de

$$f''_{xy}(x_0 + h, y_0 + k) = f''_{xy}(x_0, y_0) + \alpha,$$

relation qu'il intègre par rapport à h, de o à h; la relation nouvelle obtenue est intégrée ensuite de o à k. On divise par k, on cherche la limite des résultats obtenus pour $k = 0$; ensuite, on divise le nouveau résultat par h, et l'on fait $h = 0$. On peut aussi partir de la double inégalité

$$m < f''_{xy}(x_0 + h, y_0 + k) < M,$$

m et M étant des constantes.

Denys (*A.*). — Sur l'ennéagone régulier. (162-164).

Cesáro (*E.*). — Sur l'emploi des coordonnées barycentriques. (177-190).

Dans cet article remarquable, M. Cesáro emploie simultanément les coordonnées cartésiennes et les coordonnées barycentriques. Un point M, mobile dans un plan, est regardé comme le barycentre de trois masses variables appliquées aux sommets d'un triangle fondamental. L'auteur rapporte la figure aux axes de la conique d'inertie du triangle considéré. L'emploi simultané de ces deux genres de coordonnées lui permet de trouver d'une manière naturelle un

grand nombre de théorèmes anciens ou nouveaux relatifs à la Géométrie du triangle. Il faut signaler en particulier, comme l'une des conséquences de cette étude la suivante : « Les éléments que l'on a pris l'habitude de nommer *remarquables* ne sont pas tels par eux-mêmes, mais bien par les relations qu'ils ont entre eux. On peut appliquer toute proposition, relative aux liaisons d'un système quelconque d'éléments, à tout autre système dont les éléments présentent les mêmes liaisons ». Les avantages de la méthode de M. Cesáro proviennent de la liberté que l'on a de déplacer l'origine et d'orienter les axes avec une certaine latitude dans le plan. Il faut observer toutefois que cette liberté n'existe pas en Géométrie infinitésimale, où l'on emploie les coordonnées intrinsèques ρ et s.

Gelin (*E*.). — Surface et volume du tore. (190-197).

Del Re (*A*.). — A propos d'un problème sur le billard circulaire. (217-219).

Solution, par les formes projectives, du problème suivant : Quelle route doit suivre une bille, sur un billard circulaire, pour revenir au point de départ, après deux réflexions successives. Bibliographie de la question.

Mansion (*P*.). — Paradoxe. (222-224).

On peut inscrire, dans un cylindre droit à base circulaire, un polyèdre à facettes indéfiniment décroissantes dont l'aire ait telle limite que l'on veut, ou n'ait pas de limite [D'après PEANO, *Sulla definizione dell' area d'una superficie* (*R. Accademia dei Nuovi Lincei*, (4), VI, A, p. 54-57) et SCHWARZ, (*G. Mathematische Abandlungen*, II, p. 308-310, 369-370)].

Laisant (*A*.). — Sur la transformation par rayons vecteurs réciproques. (224-230).

Propriétés générales de la transformation définie par la relation symétrique $F(r, r_1) = 0$, entre les rayons vecteurs $r = OM$, $r_1 = OM_1$ de deux points M, M_1, de deux courbes correspondantes, O, M et M_1 étant en ligne droite. Cas où $r + r_1 = 2a$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{2}{a}$, $r^2 + r_1^2 = 2a^2$, $\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_1^2} = \frac{2}{a^2}$, ...

Lucas (*Ed*.). — Sur les différents systèmes de numération. (243-244).

Extrait de la *Théorie des nombres* de l'auteur.

Poulain (*A*.). — Sur quelques séries de points remarquables dans le triangle. (246-251).

Points dont les coordonnées barycentriques sont proportionnelles aux mêmes puissances des sinus, ou cosinus, ou tangentes des angles du triangle, ou de leurs différences, etc.

Lac de Bosredon (*V.*). — Détermination des foyers, des directrices et des axes dans les coniques, d'après la conception de Plücker. (265-275).

Recherche des foyers en les regardant comme les points d'où l'on peut mener à la conique deux tangentes ayant $\pm\sqrt{-1}$ pour coefficients de direction. La directrice est la polaire du foyer; les axes, les droites joignant les foyers deux à deux. L'article est élémentaire.

Notes mathématiques, bibliographie, questions résolues, questions proposées, questions d'examen, rectifications (passim). Table des matières. (280-288).

Supplément.

Vigarié (*E.*). — Esquisse historique sur la marche du développement de la Géométrie du triangle. (25 pages).

Extrait du Congrès de Paris de l'Association française pour l'avancement des Sciences (1889). Cette Notice très soignée, où l'on rend pleine justice aux géomètres qui se sont occupés de Géométrie récente avant MM. Lemoine, Brocard et Neuberg (Crelle, Nagel, Grebe, etc.), est suivie : 1° d'une bibliographie contenant les travaux omis dans la Notice publiée par M. Lemoine en 1885; 2° d'une liste des travaux publiés sur la Géométrie récente depuis 1885.

Géométrie élémentaire récente, par J. Casey, professeur à l'Université catholique d'Irlande; traduit de l'anglais par Fr. Falisse; avec une préface de M. J. Neuberg. Gand, Hoste; Paris, Gauthier-Villars et fils, 1890. (80 p. gr. in-8° avec 33 figures dans le texte).

Ce petit volume contient la traduction du Chapitre supplémentaire de *A Sequel to Euclid* de Casey (traduction qui a été publiée dans *Mathesis* en 1889) avec un appendice inédit (qui a paru dans *Mathesis* aussi en 1890). Voici le titre des Chapitres de cet opuscule qui contient, sous une forme condensée, les principaux résultats de la Géométrie récente dans le plan.

1. Points isogonaux, isotomiques; antiparallèles, symédianes. 2. Deux figures directement semblables. 3. Cercles de Lemoine, de Tucker et de Taylor. 4-5. Trois figures semblables. Cercle de Brocard. Cercle des neuf points. 6 et 8. Polygones harmoniques. 7. Figures associées. L'Ouvrage contient d'innombrables exercices. La préface signale les principaux promoteurs de la Géométrie récente, Neuberg excepté.

ACTA MATHEMATICA.

Tome XIV; 1890-91.

Juel. — Sur quelques figures fondamentales de la Géométrie projective.

I. Conformément aux idées de v. Staudt (*Geometrie der Lage*), M. Juel cherche de quelle nature est l'ensemble (chaîne à deux dimensions) des points qui correspondent aux points réels d'un plan par une projection imaginaire. Il trouve que les droites réelles de ces points sont les bitangentes d'une surface réglée réelle de troisième classe.

Quatre points quelconques d'un plan imaginaire peuvent être transformés simultanément en quatre points réels. Il faut pour cela, en général, deux projections; il en faut trois, si l'on exige que les centres de projection soient réels.

On peut aussi considérer les projections de points imaginaires conjugués. On est ainsi conduit à la conception de chaînes « orthogonales », telles que chacune d'elles donne par projection des points imaginaires conjugués deux à deux, quand l'autre donne des points réels.

II. Aux projections d'un plan sur lui-même s'opposent les symmétralités, qui sont, au fond, des projections suivies de la transformation de chaque point en son conjugué.

M. Juel cherche quels sont, dans une projection ou une symmétralité, les éléments réels qui se transforment en éléments réels et les chaînes qui se conservent.

Une projection imaginaire peut-elle être transformée linéairement en une réelle? Cela ne se peut pas ou se peut d'une double infinité de façons essentiellement distinctes, c'est-à-dire ne dérivant pas l'une de l'autre par une projection réelle.

Raschke (*W.*). — Sur l'intégration des équations différentielles du premier ordre où ne figure pas la variable indépendante.

Briot et Bouquet ont déterminé les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'équation différentielle algébrique

$$f\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0 \tag{1}$$

ait son intégrale uniforme. On peut arriver au même résultat par une méthode fondée, comme celle de M. Hermite, sur la considération du genre.

I. En même temps que la fonction uniforme u vérifiant l'équation (1), introduisons une seconde fonction uniforme v liée à la première par une relation algébrique

$$F(u, v) = 0. \tag{2}$$

La fonction v sera aussi liée à sa dérivée algébriquement. Moyennant une

transformation linéaire, on peut toujours supposer : 1° que l'équation (2) contient des termes du plus haut degré en v; 2° que le point infini sur l'axe des v est quelconque au point de vue des tangentes menées par ce point à la courbe (2); 3° que v, considéré comme fonction de u, est uniforme sur la surface de Riemann correspondante à l'équation (1). Dès lors, l'étude des points singuliers montre que le genre de la courbe (2) est plus petit que 2. Le problème primitif peut d'ailleurs être considéré comme un cas particulier de celui-ci, en prenant pour v la fonction $\frac{du}{dz}$.

II. Réciproquement, si l'équation (2) est de genre plus petit que 2, elle peut être vérifiée par des fonctions uniformes d'un même paramètre, telles que chacune d'elles soit liée algébriquement à sa dérivée. Pour le démontrer, considérons une relation de la forme

$$u = \frac{g(x) + h(x)\sqrt{R(x)}}{p(x)}, \tag{3}$$

où $g(x)$, $h(x)$, $p(x)$ sont des polynomes et $R(x)$ un polynome du quatrième degré au plus. Étant donnée sur le plan de u une surface de Riemann à m feuillets et $2m$ points de ramification, on peut toujours trouver une fonction x de u définie par une équation de la forme (3) et uniforme sur cette surface.

Dès lors, étant donnée l'équation (2) dont le genre est supposé égal à 1, la surface de Riemann correspondante jouissant des propriétés demandées, la fonction x peut être formée et v sera rationnel en x et $\sqrt{R(x)}$, d'où l'on tire la conclusion annoncée.

III. Les considérations précédentes permettent d'obtenir les conditions d'uniformité sous une forme différente de celle que donnent Briot et Bouquet. L'auteur démontre directement l'équivalence des deux résultats, puis il étudie spécialement certaines équations à intégrales uniformes.

Kowaleski (*S.*). — Sur une propriété du système d'équations différentielles qui définit la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.

L'intégrale générale ne peut pas être donnée par des fonctions uniformes du temps sans autres points singuliers que des pôles, du moins si les trois moments principaux d'inertie sont distincts.

Si, en effet, dans cette hypothèse, on cherche à développer en séries les fonctions inconnues, le pôle étant $t = 0$, les premiers coefficients sont complètement déterminés et le déterminant des équations qui donnent les coefficients suivants ne s'annule pas pour cinq valeurs de l'indice; d'où résulte qu'on ne peut obtenir par cette voie une solution contenant cinq constantes arbitraires.

Quand deux moments principaux sont égaux, on ne trouve d'intégrale générale uniforme que dans les cas connus (y compris, bien entendu, le cas nouveau signalé précédemment par Mme Kowalewski).

Casorati (*F.*). — Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Ses rapports avec les mesures de courbure gaussienne et moyenne.

Ces deux dernières présentent chacune l'inconvénient de pouvoir s'annuler sans que la surface cesse d'être courbe au point considéré.

Il n'en est pas de même de l'expression $C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}\right)$, laquelle ne peut s'annuler que pour $R = R' = \infty$, de sorte qu'une surface pour laquelle C serait nul en tous les points serait nécessairement un plan.

Géométriquement, cette expression peut être définie ainsi : faisons tourner autour du point considéré O un fil OP, de longueur constante très petite σ, et qui reste tendu sur la surface. Sur ce même fil, prenons une longueur OQ égale à l'angle que fait la normale en P avec la normale en O. La quantité C n'est autre que la limite du rapport de l'aire décrite par OQ à l'aire décrite par OP.

Scheffers (*G.*). — Détermination d'une classe de groupes de transformation de contact dans l'espace à trois dimensions.

La recherche de tous les groupes de transformations de contact dans l'espace à trois dimensions paraissant assez compliquée, M. Scheffers s'est proposé de déterminer ceux de ces groupes qui conservent une famille d'équations aux dérivées partielles (en excluant ceux de ces groupes qui sont réductibles, c'est-à-dire peuvent se ramener à des groupes purement ponctuels). On peut toujours supposer que cette famille soit composée de plans parallèles $x_3 = \text{const.}$ Le problème revient alors au problème plan, car, parmi les transformations infinitésimales du groupe, on peut admettre que trois au plus (désignées par la notation $C_i f$; $i = 1, 2, 3$) contiennent un terme en $\frac{\partial f}{\partial x_3}$. Les autres (appelées $A_i f$) forment un groupe plan. Or, il n'existe que trois types de pareils groupes, lesquels ont respectivement 6, 7 et 10 paramètres. Aux deux premiers types correspondent, dans le problème actuel, deux nouveaux types dépourvus de transformations C_i et six types comprenant des C_i. Enfin, le groupe plan à 10 paramètres donne quatre nouveaux types. Les groupes trouvés sont d'ailleurs irréductibles (au sens indiqué plus haut) et véritablement distincts les uns des autres.

Kirchhoff (*G.*). — Preuve de l'existence d'un potentiel qui admet des valeurs données sur la limite de l'espace considéré, dans le cas où cette limite n'est pas une surface partout convexe.

Il s'agit, au fond, de la méthode de C. Neumann pour la résolution du problème de Dirichlet, méthode que Kirchhoff avait trouvée de son côté et dont l'exposition est simplifiée sur certains points.

Sylvester (*J.*). — Solution funiculaire du « problème de l'aiguille » de Buffon dans sa forme la plus générale.

Dans le problème de l'aiguille tel qu'il fut posé originairement par Buffon, on donne une série de parallèles équidistantes ainsi qu'une aiguille de longueur inférieure à la distance de deux parallèles consécutives, et l'on cherche la probabilité pour que l'aiguille, projetée au hasard sur le plan des parallèles, rencontre une de ces droites. La solution se généralise au cas où l'aiguille est

remplacée par une figure plane quelconque et conduit au théorème de Barbier : « La probabilité cherchée est donnée par le quotient de la longueur d'un fil tendu autour de la figure (autrement dit du périmètre de celle-ci, si elle est convexe) par la circonférence inscrite à deux parallèles consécutives. »

Considérons maintenant $n+1$ figures planes invariablement liées les unes aux autres (le cas de deux figures a été étudié par Czuber) et prenons la probabilité cherchée pour i quelconque de ces figures, probabilité qui peut être prise conjonctivement ou disjonctivement. Soient p_i la somme des probabilités conjonctives, ϖ_i la somme des probabilités disjonctives pour toutes les combinaisons i à i de nos $n+1$ figures. On a les relations

$$(1) \qquad \varpi_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} p_i,$$

$$(2) \qquad p_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \varpi_i,$$

qui, dans chaque cas de figure, permettent d'obtenir des formules de récurrence donnant les probabilités cherchées.

Pour trois figures, onze cas sont à distinguer. Dans le problème relatif à deux aiguilles, figurées par des segments de droites formant un système invariable, les trois cas généraux sont : A. Les deux lignes se coupent; B. Les prolongements des deux lignes se coupent; C. L'une des lignes coupe le prolongement de l'autre.

Schrœter (*H.*). — Sur les huit points d'intersection de trois surfaces du second ordre.

M. Schrœter rapproche la proposition de Buchheim : « Dans un octogone inscrit à une cubique ou à une biquadratique gauche, si, par chaque série de trois sommets consécutifs, on mène un plan, les intersections des plans opposés sont quatre génératrices d'un même hyperboloïde », de la conclusion analogue obtenue par M. Zeuthen relativement à un système de huit points associés et donne une démonstration commune aux deux théorèmes.

Hurwitz (*A.*). — Sur les séries de puissances entièrement convergentes à coefficients rationnels avec des zéros prescrits à l'avance.

« On peut remplacer un développement de Taylor quelconque par un développement à coefficients rationnels sans changer les zéros (en appelant nombre rationnel le quotient de deux entiers réels ou imaginaires). Si le développement primitif est réel, on peut s'arranger pour que le nouveau développement le soit aussi. »

Car le développement du logarithme de la fonction peut toujours être transformé en un développement rationnel par l'addition d'une série convergente dans tout le plan.

En particulier, « tout nombre est racine (et racine unique) d'une équation dont le premier membre est à coefficients rationnels. »

Hilbert (*D.*) et *Hurwitz* (*A.*). — Sur les équations de Diophante d'espèce nulle.

Soit

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

l'équation d'une courbe de genre 0 et de degré n à coefficients rationnels. M. Nöther a indiqué, au tome XXIII des *Math. Annalen,* une méthode qui permet de former par des opérations rationnelles les adjointes de la courbe (1).

En utilisant les premiers membres de trois de ces adjointes pour opérer une transformation birationnelle, on fait correspondre à la courbe donnée une autre d'ordre $n - 2$. Continuant ainsi, on arrive à une droite ou à une conique suivant que n est ou non impair.

Dans le premier cas, il y a toujours une infinité de solutions rationnelles auxquelles correspondent des solutions rationnelles de l'équation proposée. A ces dernières peuvent venir s'ajouter d'autres en nombre fini, correspondant à des points singuliers.

Si l'on arrive à une conique, on peut écrire cette dernière (à l'aide d'opérations rationnelles) sous la forme

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0,$$

et l'on voit par des opérations arithmétiques connues si cette équation admet ou non des solutions rationnelles. S'il n'y en a aucune, l'équation proposée n'admet tout au plus que des solutions singulières en nombre fini. Sinon, on est ramené au premier cas.

Phragmén (*E.*). — Remarques sur la théorie de la représentation conforme.

M. Phragmén élucide plusieurs points de cette théorie :

1° Une fonction u harmonique d'un côté d'une droite et qui s'annule sur cette droite est continuable au delà. La démonstration de Harnack est remplacée par une autre plus rigoureuse et très élémentaire;

2° On peut appliquer la théorie de la représentation conforme à la démonstration de l'existence des fonctions fuchsiennes et kleinéennes;

3° La démonstration de Schläfli relative à la possibilité de la représentation d'un polygone sur un demi-plan est mise à l'abri de toute objection.

Brioschi (*F.*). — Les invariants des équations différentielles linéaires.

Une équation linéaire d'ordre n a $n - 2$ invariants fondamentaux. La partie linéaire de ces invariants se calcule aisément. Le calcul de la partie non linéaire se simplifie par comparaison avec un type spécial d'équations dont les intégrales peuvent s'exprimer par des formes binaires à coefficients constants de deux arguments ξ_1, ξ_2, solutions d'une équation du deuxième ordre. Une équation du $n^{\text{ième}}$ ordre appartient à cette classe si tous ses invariants fondamentaux sont

nuls. Si les invariants de rang impair sont seuls nuls, l'équation est identique à son adjointe.

M. Brioschi étudie ensuite le problème posé par Halphen : « Rechercher si les intégrales d'une équation d'ordre n vérifient une relation homogène d'ordre m », pour les cas suivants : $n = 3$, $m = 3$; $n = 4$, $m = 2$ (cas traités par Halphen) ; $n = 3$, $m = 4$; $n = 5$, $m = 2$.

Berger (*A.*). — Recherches sur les nombres et les fonctions de Bernoulli.

I. Les fonctions de Bernoulli $\varphi(z, m)$ (où z est la variable, m un entier) sont définies sans ambiguité par les conditions

$$\begin{array}{ll} \varphi''(z, m+1) = \varphi'(z, m) & (m \geqq 0), \\ \varphi(z, 0) = 0 & \\ \varphi(0, m) = 0 & (m \geqq 0), \\ \varphi(1, 1) = 1 & \\ \varphi(1, m) = 0 & (m \geqq 2). \end{array}$$

Quant aux nombres de Bernoulli $B(m)$, ils sont donnés par

$$B(m) = \varphi'(0, m+1).$$

On déduit aisément de ces définitions les propriétés des fonctions bernoulliennes relatives à la sommation des puissances semblables des nombres entiers consécutifs et leur rôle dans le développement de la fonction $\frac{e^{xv}-1}{e^{v}-1}$ suivant les puissances croissantes de v. Le développement en série trigonométrique des fonctions bernoulliennes fournit d'ailleurs l'expression des nombres B comme sommes des puissances réciproques des nombres entiers.

II. On peut former des suites analogues à la suite des nombres et des fonctions de Bernoulli, mais où figure un entier Δ assujetti seulement à la condition d'être ce que M. Kronecker appelle un *discriminant fondamental*. On arrive ainsi, en particulier, aux conclusions suivantes :

L'expression

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}},$$

où Δ est positif et $\left(\frac{\Delta}{k}\right)$ représente le symbole de Legendre généralisé, est rationnelle. Il en est de même de l'expression

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{\pi^{2n-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n-1}}$$

et de la suivante :

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m},$$

pour x rationnel, ε étant le signe de Δ.

Le Mémoire se termine par une bibliographie de la question.

Tchebycheff (P.). — Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités.

M. Tchebycheff a démontré (*Journal de Liouville*, 2e série, t. XII) un théorème qui contient comme cas particulier le théorème de Bernoulli. Certains résultats qui servent à la démonstration de ce théorème conduisent à la conclusion suivante :

« Si les espérances mathématiques des quantités

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_m,\ \ldots$$

sont toutes nulles, et si les espérances mathématiques de toutes leurs puissances ne dépassent pas une limite finie quelconque, la probabilité que la somme d'un nombre n de ces quantités, divisée par la racine carrée de la double somme des espérances mathématiques de leurs carrés, sera comprise entre deux limites quelconques t et t' se réduit à

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_t^{t'} e^{-x^2}\,dx$$

lorsque le nombre n devient infini. »

Hensel (K.). — Sur la représentation du déterminant d'un système composé de deux autres systèmes.

« Étant donnés deux déterminants

$$A = |a_{h,i}|,\qquad B = |b_{k,l}|$$

d'ordre m, n respectivement, en multipliant chaque élément du premier par chaque élément du second, on forme un tableau carré de $(mn)^2$ éléments dont le déterminant est égal à $A^n B^m$. »

Démonstration par la résolution d'équations linéaires.

Hacks (J.). — Sur le nombre de classes des formes quadratiques proprement primitives qui appartiennent à un déterminant négatif $D = -q$, où q est un nombre premier de la forme $4n+3$.

Ce nombre de classes peut se mettre sous plusieurs formes, parmi lesquelles [(x) désignent le plus grand entier contenu dans x]

$$h = \frac{q-1}{2} - 2\sum_{s=1}^{\frac{q-3}{2}} (-1)^s \left(\sqrt{\frac{q}{2}s}\right),$$

ou encore

$$h = \left[2-\left(\frac{2}{q}\right)\right]\frac{R'-R}{q},$$

où R est la somme des résidus quadratiques de q, R' la somme des non-

Ce Mémoire a été publié en 1886, dans les *Berichte der k. Sächs. Ges. d. Wiss.* L'auteur, ayant en vue la démonstration de l'existence d'une fonction *harmonique* ou potentielle, c'est-à-dire d'une fonction satisfaisant à l'équation

$$\nabla^2 u = 0,$$

dans une région déterminée et ayant, sur le contour limite de cette région, des valeurs données, considère tout d'abord le problème dans le plan en ayant soin de donner à sa démonstration une forme qui puisse être étendue au cas de trois ou de plus de trois variables. Ce travail constitue un développement intéressant des travaux de Christoffel (*Annali di Matem.*, t. I_2) et de Schwarz (*J. de Crelle,* t. LXX); il a d'ailleurs été publié par l'auteur à la suite du travail sur l'intégrale de Cauchy, cité plus haut, où la question se présentait naturellement; il se rattache directement au programme connu de Schwarz (*Prog. der eidgen. polytechn. Schule,* 1869-1870).

Harnack (*A.*). — Sur la représentation d'une fonction quelconque par les fonctions de Fourier-Bessel. (41-62).

Ce Mémoire a été publié en 1887, dans les *Berichte der k. Sächs. Ges. d. Wiss.* En s'appuyant sur les travaux de Cauchy, de Sturm et de Liouville, Hankel, dans son Mémoire *sur quelques applications du calcul des résidus de Cauchy* (*J. de Crelle,* t. LXXXIX) et dans son *Traité des fonctions sphériques* (t. II, p. 216) est arrivé à énoncer le problème de la représentation dans un intervalle fini d'une fonction réelle quelconque par des séries infinies sous la forme suivante :

« Une fonction $f(x)$ peut être représentée par une série de la forme

$$\sum_\lambda \theta(\lambda, x) \frac{\int_0^X f(x)\,\theta(\lambda, x)\,g(x)\,dx}{\int_0^X [\theta(\lambda, x)]^2 g(x)\,dx},$$

où λ prend toutes les valeurs fournies par les racines d'une équation transcendante $\varpi(\lambda) = 0$, toutes ces racines étant simples et réelles, dans le cas où les cinq conditions suivantes sont satisfaites. »

1° Pour toute valeur réelle de α, l'intégrale complexe

$$\int \frac{\theta(z, x)}{(z-\alpha)\,\varpi(z)}\,dz,$$

prise le long d'une circonférence de rayon infini est nulle. Alors, on a le développement

$$\frac{\theta(\alpha, x)}{\varpi(\alpha)} = \sum_\lambda \frac{\theta(\lambda, x)}{(\alpha-\lambda)\,\varpi'(\lambda)},$$

c'est-à-dire que la fonction $\theta(\alpha, x)$ est développable en une série infinie, au moyen des fonctions $\theta(\lambda, x)$.

2° Cette série doit être uniformément convergente.

3° Il faut pouvoir déterminer une fonction $g(x)$ telle que

$$\int_0^X \Theta(\lambda, x)\,\Theta(\mu, x)\,g(x)\,dx$$

est égale à zéro lorsque λ et μ sont deux racines distinctes de l'équation $\varpi(\lambda) = 0$ et que, pour $\lambda = \mu$, cette intégrale est différente de zéro.

4° L'intégrale

$$\int_0^X \Theta(\alpha, x)\,g(x)\,\psi(x)\,dx$$

ne peut être nulle pour toutes les valeurs réelles, quelles qu'elles soient, que l'on attribue à α, sans que la fonction $\psi(x)$ soit nulle, du moins en général, c'est-à-dire que, dans tout intervalle, si petit qu'il soit, il est nécessaire que la valeur moyenne de ψ soit zéro. Si $\psi(x)$ est continue, sa valeur est la constante zéro.

5° La série écrite comme développement de $f(x)$ doit être uniformément convergente.

Heine a appliqué cette proposition au développement d'une fonction en série de fonctions trigonométriques et de fonctions cylindriques de première espèce du second et du troisième ordre, mais il n'a pas examiné si la cinquième condition était remplie. L'auteur se propose ici de combler cette lacune en suivant une marche analogue à celle employée par Liouville dans ses deux Mémoires *Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre, contenant un paramètre variable* (*J. de Liouville*, p. 16 et p. 418).

Von Gall. — Les syzygants irréductibles d'une forme binaire du sixième ordre qui relativement aux coefficients sont de degré supérieur au neuvième. (63-81).

Dans le tome VII de l'*American Journal of Mathematics*, Hammond a donné les syzygants irréductibles de la forme binaire a_x^6 qui contiennent les coefficients jusqu'au neuvième degré. Stéphanos, dans le tome XCVI des *Comptes rendus*, montra comment, à l'aide de théorèmes généraux connus relatifs aux formes gauches, on peut former un nombre illimité de syzygants relativement simples, dès que l'on a exprimé au moyen des formes fondamentales les premières et les secondes transvections des formes paires. Stéphanos a donné ensuite toute une série de résultats dont quelques-uns étaient d'ailleurs connus déjà et a montré comment on pouvait parvenir à des syzygants fondamentaux plus complexes. L'auteur, en appliquant et en étendant la méthode et les procédés de Stéphanos, en passant directement des relations simples à celles d'un ordre plus élevé et en appliquant le procédé d'Aronhold, l'opération δ, a réussi à déterminer dans le grand nombre de syzygants que l'on obtient, ceux qui sont irréductibles.

Les résultats donnés par Sylvester, dans le tome IV de l'*American Journal*, doivent en certains points être corrigés. Le travail contient tous les résultats et les procédés de calcul lorsqu'ils diffèrent de ceux de Stéphanos.

End (*W.*). — **Recherches algébriques sur les surfaces ayant une courbe en commun. (82-90).**

Ce Mémoire est un résumé de la dissertation inaugurale de l'auteur (*Tubingue*, 1887). L'auteur s'est proposé d'étendre les théorèmes de Bézout, de Jacobi et de Clebsch aux fonctions de trois variables qui s'annulent pour un nombre finl de système de valeurs des variables en même temps que pour un système infini de valeurs, ou, en s'exprimant géométriquement au cas de trois surfaces qui ont une courbe en commun. La généralisation se fait facilement en partant de certains résultats dus à Nöther et relatifs aux courbes gauches (*Abh. d. Berl. Akad. d. Wiss.*, 1882).

Stäckel (*Paul*). — **Une propriété caractéristique des surfaces dont l'élément linéaire ds est donné par la formule**

$$ds^2 = [\varkappa(q_1) + \lambda(q_2)](dq_1^2 + dq_2^2).$$

(91-104).

Les surfaces qui admettent un élément linéaire de la forme indiquée ont été d'abord étudiées par Liouville [*Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point peuvent s'intégrer* (*Journal de Liouville*, t. XI et XII)] et ont fait depuis, comme on le sait, l'objet de nombreux travaux. On sait que le mouvement d'un point sur une surface d'élément linéaire donné revient, lorsqu'il existe une fonction des forces $\Pi(q_1, q_2)$, à la détermination d'une solution complète d'une équation aux dérivées partielles de Hamilton.

L'auteur se demande ici quelles sont les équations de Hamilton qui se présentent ainsi et qui se prêtent à la séparation des variables. Il montre que les surfaces de Liouville ont la propriété caractéristique que pour un choix convenable de la fonction des forces, l'équation de Hamilton répondant à l'élément linéaire de ces surfaces, se prête toujours à la séparation des variables, il existe toujours des transformations de la forme

$$p_1 = \Phi(q_1) + \Psi(q_2), \qquad p_2 = X(q_1) + \Omega(q_2),$$

qui transforment cette équation en lui donnant la forme

$$\left(\frac{\partial W}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial p_2}\right)^2 - [\mu(p_1) + 2\alpha\,\varkappa(p_1) + \nu(p_2) + 2\alpha\,\lambda(p_2)] = 0,$$

qui répond précisément à une surface de Liouville dont l'élément linéaire est fourni

$$ds^2 = [\varkappa(p_1) + \lambda(p_2)](dp_1^2 + dp_2^2).$$

Köpcke (*Alfred*). — **Complément au Mémoire intitulé :** ***Sur une fonction continue à oscillations dans tout intervalle et admettant partout une dérivée*** **(*Math. Ann.*, t. XXXIV). (104-109).**

Les résultats donnés dans le Mémoire indiqué étaient justes, mais une partie du raisonnement doit être modifiée.

Petersen (*Julius*). — Sur le nombre fini du système de formes d'une forme fondamentale binaire. (110-112).

Hilbert a démontré dans le tome XXXIII, p. 223, des *Mathematische Annalen,* que le système d'invariants d'une forme fondamentale linéaire était fini et Cayley, dans le tome XXXIV, a simplifié la démonstration et appliqué ses raisonnements au système de covariants. La démonstration de Cayley contient une erreur que signale l'auteur; il montre comment on peut modifier la démonstration de Hilbert et l'appliquer aux demi-invariants.

Werner (*Hermann*). — Détermination des plus grands sous-groupes appartenant au groupe projectif qui laisse invariable une équation du second degré à n variables. (113-160).

Un faisceau de transformations

$$x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r), \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

relatif aux variables $x_1, \ldots, x_n$ constitue, d'après Lie, un groupe fini continu de transformations, lorsque deux transformations du faisceau, effectuées successivement, conduisent à une transformation appartenant au faisceau. Les quantités $a_1, \ldots, a_r$ sont les paramètres du groupe et un groupe présentant r paramètres essentiels est appelé groupe à r termes.

Une transformation est infinitésimale lorsqu'elle est de la forme

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1, \ldots, x_n)\,\delta t, \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

où δt est une quantité infiniment petite. Cette transformation appliquée à une fonction f donne

$$f(x'_1, \ldots, x'_n) = f(x_1, \ldots, x_n) + \left(\sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\delta t,$$

et l'on pose

$$\sum_1^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \mathrm{X}(f)$$

comme symbole de la transformation infinitésimale.

Des substitutions infinitésimales en nombre r

$$\mathrm{X}_\varkappa f = \sum_1^n \xi_{i\varkappa} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (\varkappa = 1, \ldots, r)$$

sont dites *indépendantes,* quand il est impossible de déterminer r constantes $c_1, \ldots, c_r$ en sorte que l'expression

$$c_1 \mathrm{X}_1 f + \ldots + c_r \mathrm{X}_r f$$

soit identiquement nulle.

Lorsque les transformations d'un groupe à r termes peuvent être arrangées par couples de transformations inverses, le groupe contient la transformation identique et r transformations infinitésimales indépendantes. Les transforma-

tions finies résultent de la répétition faite un nombre infini de fois de transformations infinitésimales. Si $X_1 f, \ldots, X_r f$ sont des transformations infinitésimales indépendantes d'un groupe à r termes, on a entre les expressions Xf des relations de la forme

$$(X_i, X_\varkappa) = X_i[X_\varkappa(f)] - X_\varkappa[X_i(f)] \equiv \sum_{j=1}^{h} [X_i(\xi_{j\varkappa}) - X_\varkappa(\xi_{ji})] \frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{s=1}^{n} c_{i\varkappa s} X_s f,$$

où les quantités $c_{i\varkappa s}$ sont des constantes numériques.

Inversement, si l'on a entre r transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$ les relations précédentes, les fonctions Xf engendrent un groupe de transformations à r termes fini et continu.

Si deux groupes à r termes $X_1 f, \ldots, X_r f$ et $Y_1 f, \ldots, Y_r f$ correspondent à un même système de constantes $c_{i\varkappa s}$, on dit que les deux groupes sont également composés ou qu'ils sont holoédriques et isomorphes.

Deux sous-groupes à m termes d'un groupe à r termes sont congrus lorsque l'on peut les transformer l'un dans l'autre par une transformation du groupe à r termes. Si une équation $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$ admet une transformation infinitésimale

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

on a $X\varphi = 0$ seulement lorsque $\varphi = 0$.

Lie a montré l'importance des sous-groupes d'ordre le plus élevé et a déterminé ces sous-groupes pour le groupe projectif général à n variables.

L'auteur s'occupe ici de la construction des plus grands sous-groupes pour le groupe projectif à n variables qui laisse invariable une équation du second degré à déterminant différent de zéro. Le résultat de ces recherches est contenu dans le théorème suivant :

« Le groupe projectif continu relatif à un espace du second degré à déterminant différent de zéro détaché dans l'espace à n dimensions ne possède, si $n = 4$ ou si $n > 5$, aucun sous-groupe continu possédant plus de $\frac{n(n-1)}{2} + 1$ paramètres. Tout sous-groupe supérieur est caractérisé par ce fait qu'il laisse invariable un point déterminé de F_2. Il n'y a que dans le cas de $n = 4$ et de $n = 7$, qu'existe un second type de sous-groupes supérieurs qui sont caractérisés par le fait que, pour eux existe un espace plan d'ordre supérieur de F_2 qui reste invariable ».

Pour $n = 3$ et $n = 7$, il existe des sous-groupes possédant un paramètre de plus et ces sous-groupes sont caractérisés encore par le fait que pour eux un espace plan d'ordre supérieur de F_2 reste invariable.

Schur (*Friedrich*). — Nouvel exposé de la théorie des groupes finis de transformations. (161-197).

Exposé très simple et très net de la théorie de Lie dans ses parties fondamentales. Lie a reproché à l'auteur d'avoir parfois altéré sa manière de voir; nous croyons que l'étude de ce travail peut cependant être faite avec fruit; les théorèmes s'y détachent et leur ensemble constitue un tout des plus homogènes.

Burkhardt (*Heinrich*). — Fondements d'une théorie générale des fonctions hyperelliptiques du premier ordre (d'après les leçons de F. Klein). (198-296).

Dans les leçons faites à l'Université de Göttingen pendant le semestre d'hiver 1887-88, F. Klein s'était proposé d'étendre aux fonctions hyperelliptiques du premier ordre une série de considérations qui se sont montrées des plus utiles dans la théorie des fonctions elliptiques. C'est cet ensemble de recherches que l'auteur expose, après avoir, comme nous l'indique M. F. Klein dans une Note, mis en ordre, revu et disposé pour la publication les leçons de son maître. Une introduction contient tout d'abord une série de notions empruntées à la théorie des intégrales, puis vient une classification des fonctions hyperelliptiques, en tout point analogue à celle qui se présente dans l'étude des fonctions elliptiques (division en échelons). L'auteur passe ensuite à l'application des principes développés précédemment à des problèmes plus spéciaux, en particulier, à la question de la division et de la transformation. L'exposé des points de vue généraux, des propriétés fondamentales et de la méthode proprement dite a surtout été mis en lumière. Le développement des particularités est réservé pour des Mémoires ultérieurs qui trouveront ainsi dans ces fondements une base solide.

Les fonctions thêta n'ont pas ici été introduites. La théorie des fonctions hyperelliptiques, pour être faite d'une façon complète, nécessiterait peut-être l'introduction de ces fonctions, mais on rencontre alors des difficultés sérieuses et si l'auteur avait voulu les surmonter il aurait dû donner à son travail un caractère tout différent de celui qu'il voulait lui conserver.

Pringsheim (*Alfred*). — Théorie générale de la divergence et de la convergence des séries à termes positifs. (297-394).

C'est à Cauchy (*Analyse algébrique*, 1821) que l'on doit les premiers critériums de divergence ou de convergence des séries infinies à termes positifs. Ces critériums, tout aussi bien que ceux qui sont plus précis et qui ont été plus tard formulés par Raabe, Duhamel, de Morgan, Bertrand, Bonnet et Plucker ne peuvent être considérés que comme des critériums spéciaux; ils reposent tous, en effet, simplement sur la comparaison du $n^{\text{ième}}$ terme de la série avec le terme d'une série particulière a^n, n^x, $n(\log n)^x$, ... C'est Kummer qui a le premier établi des critériums de caractère général permettant de déterminer la façon dont se comporte la série Σa_n à l'aide de certaines relations entre le terme a_n de la série et une certaine fonction positive $\varphi(x)$ soumise à des conditions des plus restreintes. Dini (*Annali dell' Univers. Tosc.*, t. IX, 1867) est parvenu à généraliser le principal critérium de Kummer et aussi à établir d'autres types de critériums généraux, comprenant comme cas particuliers les critériums spéciaux cités précédemment. Paul du Bois Reymond a retrouvé les principaux résultats de Dini [*Neue Theorie der Convergenz und Divergenz von Reihen mit positiven Gleidern* (*Journal de Crelle*, t. LXXVI, p. 61, 1873, et *Comptes rendus*, 2e semestre, p. 941, 1888)] et a essayé de donner une véritable théorie mathématique de l'étude de la convergence et de la divergence. Les recherches de Du Bois Reymond contiennent quelques erreurs; d'autre part, l'auteur estime que ses travaux laissent au point de vue de la méthode quelque chose à désirer, les résultats pouvant être obtenus d'une façon plus simple et

plus logique; il est arrivé d'autre part à des théorèmes plus précis et plus nets où les critériums de convergence et de divergence se rapprochent davantage et qu'il expose ici tout au long. Le Mémoire contient une série de renseignements bibliographiques des plus utiles et une discussion serrée des différentes propositions auxquelles sont arrivés les auteurs qui ont traité de la convergence et de la divergence des séries. Nous ne pouvons analyser un tel travail : nous devons y renvoyer tous ceux qu'intéresse l'étude de la convergence et de la divergence des séries.

Stahl (*Wilhelm*). — Sur une représentation nouvelle du résultant de deux formes du même ordre. (395-400).

Bézout a montré comment on peut représenter le résultant de deux formes linéaires d'ordre n par un déterminant à n^2 éléments. L'auteur montre comment on peut mettre ce résultant sous la forme d'un déterminant à $(n-1)^2$ éléments seulement. Il considère d'abord pour plus de simplicité deux formes du quatrième ordre, il montre quelle est la nature des éléments qui apparaissent dans le déterminant d'ordre 3 auquel il arrive alors; puis il étend immédiatement ses résultats au cas général.

Vries (*Jean de*). — Sur une espèce de configurations régulières. (401-422).

Kantor a montré (*Sitzb. d. Wiener Akad.*, t. LXX) que p q-gones complets dont les sommets sont situés sur q droites issues d'un point constituent une configuration spéciale possédant des propriétés remarquables. Jung (*Ann. di Matem.*, t. XII_2) a été conduit par des considérations statiques à attribuer aux points et aux droites de cette configuration des symboles qui mettaient nettement en évidence la régularité de la configuration et permettaient en outre de la décomposer en configurations plus simples et de même nature. L'auteur donne dans ce Mémoire la démonstration de l'existence de ces configurations et applique la notation de Jung à des décompositions nouvelles analogues à celles qu'il a déjà rencontrées dans les configurations polyédrales (*Math. Ann.*, t. XXXIV, p. 227).

Killing (*Wilhelm*). — Extension de la notion d'invariant des groupes des transformations. (423-432).

Étant donné un groupe, toute fonction entre les coordonnées d'un ou de plusieurs points d'un espace à n dimensions qui n'est altérée par aucune transformation du groupe peut, d'une façon générale, être appelée un *invariant*. Avec cette définition, tout groupe possède des invariants.

Signalons, en particulier, l'application que fait l'auteur de ses résultats (p. 430) aux géométries Euclidiennes et non Euclidiennes. Les conclusions de de Tilly, qui veut fonder la théorie de l'espace sur la notion de distance, ne résultent pas nécessairement de cette notion et les raisonnements de de Tilly contiennent implicitement un appel à l'évidence.

Wiltheiss (*Ed.*). — Une opération d'espèce particulière qui fournit des covariants. (433-450).

Quelques remarques sur les équations aux dérivées partielles qui se présentent dans la théorie des fonctions thêta hyperelliptiques ont conduit l'auteur à considérer une opération particulière déduite comme il suit de l'opération δ de Aronhold.

On applique le procédé de Aronhold, relatif à une fonction contenant les variables v_1, v_2 à un covariant où les variables sont u_1, u_2, puis, l'opération une fois effectuée, on égale les deux couples de variables v_1, v_2 et u_1, u_2.

L'auteur représente par $\underset{v=u}{\delta}$ cette opération, et il montre qu'il existe des opérations $\underset{v=u}{\delta}$ qui, appliquées à une série de covariants, fournissent des covariants de même nature et que, pour obtenir tous les covariants, il suffit d'avoir recours à un nombre restreint de formes et non pas à toutes les formes du système complet.

Le Mémoire ne contient qu'une première Partie relative aux covariants d'une forme du sixième ordre.

***Illigens* (*E.*). — Sur la définition des nombres irrationnels. (451-455).**

***Bertini* (*E.*). — Sur un théorème de Netto. (456).**

L'auteur montre comment on peut déduire d'un théorème qu'il a donné dans le tome XXXIV (p. 447) des *Math. Ann.* un théorème dû à Netto (*Acta mat.*, t. VII, p. 101) relatif aux intersections des courbes.

***Weber* (*H.*). — Paul du Bois-Reymond.**

Paul du Bois-Reymond, né à Berlin le 2 décembre 1831, mort à Fribourg le 7 avril 1889, est bien connu par ses recherches sur les équations aux dérivées partielles, sur la série de Fourier et sur la théorie des fonctions.

H. Weber donne une Notice nécrologique qui est suivie de la liste des publications de P. du Bois-Reymond. Cette liste contient quelques Mémoires d'Histoire naturelle (du Bois-Reymond devait d'abord être médecin) et une série de publications mathématiques.

***Pochhammer* (*L.*). — Sur une intégrale à double circuit. (470-494).**

L'auteur considère l'intégrale $\int f(u)\,du$ prise le long d'une ligne qui tourne autour de deux points de ramification p et q et est décrite comme il suit :

La courbe part d'un point c ordinaire, tourne autour du point q dans le sens positif, puis autour du point p dans le même sens, ensuite et dans la direction négative autour du point q et dans la même direction, autour du point p. A un tel chemin correspond une intégrale à double circuit (*mit doppeltem Umlauf*). Les fonctions $f(u)$ considérées peuvent être mises sous la forme

$$f(u) = (u-p)^{\sigma-1}(u-q)^{\tau-1}\varphi(u),$$

où φ est une fonction univoque de u dans le voisinage des points p et q. Si l'intégrale $\int_p^q f(u)\,du$, lorsqu'elle a un sens, satisfait à une équation diffé-

rentielle linéaire homogène, l'intégrale considéré ici peut être substituée à l'intégrale $\int_p^q f(u)\,du$ dans les cas où cette intégrale n'a plus de sens, par suite de la façon dont se comporte la fonction $f(u)$ dans le voisinage des points des discontinuités $u=p$ et $u=q$. Il est alors possible de remédier à certains défauts que présente presque toujours l'emploi des intégrales définies pour la représentation de la solution des équations différentielles linéaires.

L'auteur examine aussi le cas d'une fonction

$$F(u) = (u-p)^{\sigma-1}\varphi(u),$$

une portion du contour comprenant le point p et l'autre toutes les singularités de la fonction $F(u)$, ce contour étant d'ailleurs encore décrit comme dans le cas précédent.

L'auteur applique ses résultats à l'équation différentielle de la série hypergéométrique où les intégrales à double circuit permettent de donner une solution générale; les intégrales définies employées d'ordinaire ne peuvent être appliquées dans le cas où il y aurait divergence, mais elles sont remplacées par des intégrales à double circuit ayant toujours un sens déterminé.

Pochhammer (*L.*). — Sur la théorie des intégrales eulériennes. (495-526).

L'emploi des intégrales à double circuit étudiées dans le Mémoire précédent est ici appliquée aux intégrales eulériennes. En ce qui concerne les intégrales de première espèce, que l'auteur représente par le symbole $E(a,b)$, où

$$E(a,b) = \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}\,du,$$

l'auteur considère l'intégrale

$$\mathfrak{E}(a,b) = \int (-u)^{a-1}(u-1)^{b-1}\,du,$$

où il s'agit d'une intégrale à double circuit relativement aux deux points o et 1 et la relation entre les deux fonctions est donnée par la formule

$$\mathfrak{E}(a,b) = -4\sin\pi a\sin\pi b\,E(a,b).$$

Relativement à la fonction $\Gamma(a)$, l'auteur est conduit à considérer l'intégrale

$$\overline{\Gamma}(a) = \int e^{n} n^{a-1}\,du,$$

où l'intégrale est prise le long d'une ligne partant de $-\infty$ venant jusque dans le voisinage du point o, qui tourne autour du point o et s'éloigne à l'infini dans la direction négative de l'axe réel. La relation entre les fonctions $\Gamma(a)$ et $\overline{\Gamma}(a)$ est donnée par la formule

$$\overline{\Gamma}(a) = 2i\sin\pi a\,\Gamma(a).$$

L'auteur applique de nouveau les résultats qu'il obtient à la série hypergéométrique.

Schönflies (*A*.). — Sur une classe spéciale de configuration tracée sur les courbes normales elliptiques du $n^{\text{ième}}$ ordre. (527-540).

Dans les *Göttinger Nachrichten*, l'auteur a montré l'existence sur les courbes du troisième ordre de configurations m_s formées de cycles de polygones alternativement inscrits et circonscrits. Il y a de telles configurations en nombre infini sur les courbes du troisième ordre. Si l'on exprime les coordonnées de la courbe générale C_3 en fonctions elliptiques d'un paramètre u et en sorte que $u = 0$ corresponde à un point d'inflexion, les points de la configuration ont, *en général*, des arguments qui sont avec une quelconque des périodes primitives de la courbe dans un rapport rationnel.

Il y avait encore à examiner ce qui se passe dans le cas d'exception. C'est ce que fait ici l'auteur. De plus, il généralise ses conclusions qui peuvent être étendues aux courbes normales elliptiques du $n^{\text{ième}}$ ordre, c'est-à-dire aux courbes tracées dans l'espace à $n - 1$ dimensions et dont les coordonnées homogènes $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ sont données par les formules

$$\begin{aligned} \rho x_0 &= \mathrm{A}\Pi\,\sigma(u-a_i), \\ \rho x_1 &= \mathrm{B}\Pi\,\sigma(u-b_i), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \rho x_{n-1} &= \mathrm{N}\Pi\,\sigma(u-n_i), \end{aligned}$$

avec les conditions

$$\Sigma a = \Sigma b \ldots = \Sigma n.$$

La détermination des arguments répondant aux points des configurations qui se présentent alors est fournie par des équations linéaires. En général, le déterminant de ces équations est différent de zéro. S'il est égal à zéro, on est dans le cas d'exception. Alors encore existent des configurations que l'auteur détermine. Ces recherches sont en relation avec les études de Kantor et de J. de Vries sur les configurations.

Scheeffer (*Ludwig*). — Théorie des maxima d'une fonction de deux variables. (541-576).

Ce Mémoire a été publié en 1886, dans les *Berichte der k. Sächs. G. der W.*, par A. Mayer, d'après les manuscrits laissés par l'auteur. Les résultats intéressants qu'il contient ont conduit la rédaction des *Mathematische Annalen* à la reproduire ici.

Krausse (*Martin*). — Sur le développement des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en séries trigonométriques. (Quatrième Mémoire.) (577-587).

Dans trois autres Mémoires parus dans les tomes XXX, XXXII et XXXIII des *Mathematische Annalen*, l'auteur a montré que la question du développement en séries trigonométriques des fonctions elliptiques de troisième espèce se ramène à l'expression sous cette même forme des fonctions

$$\frac{\vartheta_\alpha(mv + ma, m\tau)}{\vartheta_\beta(v, \tau)} \quad \text{et} \quad \frac{\vartheta_\alpha(v-a)}{\vartheta_\beta(v-b)\,\vartheta_\gamma(mv, m\tau)}.$$

Relativement à la première forme le problème a été résolu de différentes façons; l'auteur s'occupe ici des fonctions de la seconde forme et parvient à les développer, soit indirectement par l'introduction de fonctions dues à Appell, soit directement et il retrouve alors des résultats dus en partie à Appell.

Korkine (*A*.). — Sur les Cartes géographiques. (588-604).

Bonnet (*Journal de Liouville*, t. XVII, 1852) a montré que, si l'on veut représenter une sphère sur le plan en imposant la condition générale que le rapport de deux régions correspondantes soit constant et la condition particulière que les méridiens et les parallèles sur la Carte soient perpendiculaires entre eux, on est conduit à la considération d'une équation aux dérivées partielles du second ordre.

L'intégration de cette équation n'a pas été donnée. L'auteur en reprend ici l'étude après l'avoir mise sous la forme

$$\frac{r}{p^2} + \frac{t}{q^2} = 0.$$

Tome XXVI, 1890.

Klein (*F*.). — Sur la théorie des fonctions abéliennes. (1-83).

Dans le tome XXXII des *Mathematische Annalen*, l'auteur a présenté un résumé de ses recherches sur les fonctions hyperelliptiques d'un nombre quelconque de variables; il a depuis exposé dans ses leçons la théorie des fonctions abéliennes et il est parvenu à donner, en ce qui concerne ces fonctions et en partant de l'étude de la forme algébrique qui sert à les déterminer, une définition des fonctions thêta et un résumé de leurs propriétés en tout point analogue à ce qui a été fait pour les fonctions hyperelliptiques. Aucune difficulté ne s'est présentée dans les questions où les modules de la forme algébrique considérée étaient supposés donnés; mais, si l'on considère les modules comme variables, il a été nécessaire de limiter la question au cas de $p = 3$. De là résulte la division du présent Mémoire en deux Parties. Dans la première, il s'agit des fonctions abéliennes générales; dans la seconde on n'examine que le cas de $p = 3$. Les principaux résultats contenus dans ce Travail d'ensemble ont été publiés déjà par l'auteur, en particulier dans les *Göttinger Nachrichten : Sur les covariants irrationnels* (Mars 1888) et *Sur la théorie des fonctions abéliennes*, I et II (Mars et Mai 1889), dans les *Comptes rendus : Formes principales sur les surfaces de Riemann* (Janvier 1889); *Des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann* (Février 1889) et dans une Note des *Proc. of the London Math. Soc.* de Février 1889.

Nous ne pouvons songer à donner ici une idée de l'ensemble des résultats condensés par l'auteur dans ces quatre-vingts pages. Tous ceux qui ont quelque idée des travaux de M. Klein, tous ceux qui connaissent la manière toute particulière avec laquelle il sait rendre simples et presque évidents les faits mathématiques les plus complexes au premier abord sont heureux de voir se poursuivre ces publications où l'auteur se dépasse à chaque pas et sait toujours trouver du nouveau.

Pochhammer (L.). — Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients linéaires. (84-96).

L'équation différentielle linéaire d'Euler (*Institutiones Calculi integralis*, t. II, § 1036), mise sous forme normale

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = (x-\rho)\frac{dy}{dx} + \alpha y,$$

a deux intégrales fondamentales qui peuvent être mises, en général, sous la forme

$$\frac{1}{\mathrm{E}(\alpha, \rho-\alpha)}\int_0^1 e^{ux}u^{\alpha-1}(1-u)^{\rho-\alpha-1}\,du$$

et

$$\frac{x^{1-\rho}}{\mathrm{E}(\alpha-\rho+1, 1-\alpha)}\int_0^1 e^{ux}u^{\alpha-\rho}(1-u)^{-\alpha}\,du,$$

où $\mathrm{E}(a, b)$ représente l'intégrale eulérienne de première espèce [dont le symbole est pris d'ordinaire sous la forme $\mathrm{B}(a, b)$]. Mais, pour que les deux intégrales aient un sens, il faut que les parties réelles de α et de $\rho-\alpha$ soient comprises entre 0 et 1. Spitzer, dans ses *Études sur les équations différentielles linéaires*, a déjà montré comment on pouvait ramener le cas général au cas où les conditions énoncées précédemment sont satisfaites; les calculs sont longs et pénibles.

L'auteur applique à la question précédente une méthode semblable à celle qu'il a proposée dans le tome précédent des *Mathematische Annalen* (p. 470 et 495), en particulier pour l'équation différentielle du second ordre de la série hypergéométrique. Dans sa méthode, les deux intégrales fondamentales se présentent au même titre et sont mises sous forme d'intégrales définies prises le long d'une courbe partant de $-\infty$, entourant les points 0 et x et revenant à $-\infty$.

Wölffing (Ernst). — Sur les covariants hessiens d'une fonction entière et rationnelle de formes ternaires. (100-120).

Brill (*Math. Ann.*, t. XIII, p. 175) a montré que le covariant hessien d'une forme ternaire peut être obtenu en ordonnant cette forme suivant les puissances des variables servant à établir l'homogénéité et en exprimant le hessien à l'aide des transvections des formes binaires qui se présentent alors comme coefficients. Cette méthode a été utile dans plusieurs cas, par exemple dans l'étude des singularités des courbes. L'auteur a été conduit à se poser alors le problème général suivant : « Si l'on se donne une forme ternaire composée rationnellement avec des formes ternaires, par exemple un produit de deux ou de plusieurs formes, quelle est la nature de la hessienne correspondante? Cette hessienne est en tout cas un covariant simultané des formes données et il y a lieu alors de l'exprimer en fonction des invariants et des covariants contenus dans le système complet des formes fondamentales. La solution du problème général peut être donnée même pour des formes d'ordre supérieur dont le système complet n'est pas connu; elle est contenue dans quatre formules fondamentales établies dans le § 1 du Mémoire. L'auteur examine ensuite

quelques cas particuliers et complète alors la solution pour pouvoir en faire des applications nombreuses et importantes exposées sous forme géométrique. Il retrouve au milieu de propositions nouvelles l'énoncé de propositions dues en partie à Salmon, en partie à Clebsch-Lindemann. Il étudie en terminant certaines singularités des courbes relativement auxquelles la hessienne se comporte d'une façon anormale, par exemple dans le cas où la courbe considérée présente deux branches tangentes entre elles, les courbures des deux branches étant égales et de sens contraires, dans le cas où il y a un point d'ondulation, ou trois branches tangentes entre elles, ou encore deux points de rebroussement ayant la même tangente.

Eberhard (*V.*). — Un théorème de topologie. (121-133).

Steiner s'est occupé (*Journal de Crelle*, t. I) de la détermination du nombre des régions que déterminent dans le plan ou dans l'espace un nombre déterminé de lignes ou de circonférences, de plans ou de sphères. La question a été reprise depuis par Roberts dans les *Proceed. of the London Math. Soc.*, t. XIX. L'auteur examine le cas d'un espace d'un nombre quelconque de dimensions. Il retrouve, en particulier, une proposition relative aux polyèdres tracés dans l'espace à n dimensions qui a déjà été donnée par Stringham (*American J. of Math.*, t. III : *Figures régulières dans l'espace à n dimensions*); par Biermann (*Berichte d. Wiener Ak. d. W.*, t. XC : *Sur les corps réguliers de dimensions supérieures*); par Hoppe (*Grunert's Arc.*, t. LXVII) et par Schlegel (*Nova Acta Leop. Car. Acad. d. Naturf.*, t. XLIV). (Depuis encore cette proposition a été retrouvée par Poincaré). Le théorème qui constitue une généralisation du théorème d'Euler est énoncé de la manière suivante : « Dans un polyèdre situé dans l'espace à p dimensions déterminé par des espaces linéaires, le nombre des régions limites de dimension impaire diminué du nombre des régions limites de dimension paire est égal à 0 ou à 2 suivant que p est pair ou impair ». Il est peut être préférable de donner à la proposition une forme applicable au cas où p est quelconque et où n'apparaît pas, suivant l'expression de Listing, un 2 mystérieux. En désignant par E_r le nombre des régions limites de dimension r, on a la relation

$$\sum_{0}^{p}(-1)^r E_r = 1,$$

pourvu que l'on pose $E_p = 1$. Il n'y a plus alors à distinguer entre le cas de p pair et de p impair. »

Wiltheiss (*Ed.*). — Une opération d'espèce particulière qui fournit des covariants. (134-153).

Seconde Partie du Mémoire commencé dans le volume précédent. L'auteur applique ici le procédé déduit du procédé δ de Aronhold et qu'il désigne par $\underset{u=v}{\delta}$ à la formation des covariants simultanés de deux formes cubiques. Il avait été conduit à cette opération par l'étude des équations aux dérivées partielles qui se rencontrent dans la théorie des fonctions thêta à deux va-

riables. Il montre comment le développement en série des fonctions thêta paires à deux variables se ramène à un calcul des plus simples.

Stroh (*E.*). — Remarque sur le Mémoire de von Gall relatif aux syzygants fondamentaux de deux formes binaires biquadratiques simultanées. (154-156).

Hammond avait énoncé la proposition que tout syzygant fondamental irréductible doit contenir une combinaison binaire des formes fondamentales. Dans le tome XXXIV (p. 332) des *Mathematische Annalen*, von Gall avait donné un exemple qui paraissait en contradiction avec ce théorème, mais il n'était pas démontré que la méthode de von Gall fournissait tous les syzygants et on pouvait croire qu'une autre méthode donnerait relativement aux formes du quatrième ordre des syzygants répondant à l'énoncé de Hammond. L'auteur montre que cela est impossible : il n'existe aucun syzygant fondamental contenant le terme D^3. Le théorème de Hammond n'est donc pas général.

Peano (*G.*). — Sur une courbe qui remplit toute une aire plane. (157-160).

Dans cette Note, l'auteur détermine deux fonctions x et y, uniformes et continues d'une variable réelle t, qui, lorsque t varie de o à 1, prennent tous les couples de valeurs satisfaisant aux inégalités $0 \leqq x \leqq 1$ et $0 \leqq y \leqq 1$.

Killing (*Wilhelm*). — La composition des groupes de transformation finis et continus. (Quatrième Partie. Fin). (161-189).

Suite des Mémoires publiés dans le même journal (t. XXXI, p. 252-290; t. XXXIII, p. 1-48; t. XXXIV, p. 57-122).

Maschke (*Heinrich*). — Sur une configuration remarquable de droites dans l'espace. (190-215).

On peut définir une droite de l'espace par six paramètres p entre lesquels existe une relation homogène du second degré ou encore, comme l'a fait Klein (*Math. Ann.*, t. XXVIII, p. 206), par des coordonnées surabondantes x_0, ..., x_6 en nombre égal à 7 satisfaisant aux équations

$$\Sigma x_i = 0, \qquad \Sigma x_i^2 = 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que deux droites x', x'' se rencontrent est donnée par l'expression

$$\Sigma x'_i x''_i = 0.$$

On peut toujours ramener une équation linéaire homogène entre les 7 coordonnées x,

$$\Sigma \alpha_i x_i = 0,$$

à être telle que la somme $\Sigma \alpha_i$ soit nulle; on appelle $\Sigma \alpha_i^2$ l'invariant du com-

plexe et $\Sigma\alpha_i\beta_i$ l'invariant simultané de deux complexes dont les équations sont supposées mises sous forme normale.

Une droite définie par les coordonnées $x_0, \ldots, x_6$ fournit, si l'on effectue sur ces coordonnées une permutation quelconque, un nombre total de droites égal à 7! On obtient une configuration particulière contenant un bien moins grand nombre de droites en supposant que deux triplets de trois coordonnées des droites soient respectivement égaux. Les valeurs des coordonnées sont alors

$$3, \ \lambda, \ \lambda, \ \lambda, \ \mu, \ \mu, \ \mu,$$

où λ et μ sont racines de l'équation

$$z^2 + z + 2 = 0$$

et le nombre des droites se réduit alors à

$$\frac{7!}{3!\,3!} = 140.$$

C'est la configuration constituée par l'ensemble de ces droites qu'étudie l'auteur : rencontre des droites entre elles, points de rencontre, plans fondamentaux, combinaisons de droites, de points et de plans définis par la configuration, etc.

Study (*E.*). — Sur les points d'intersection des courbes algébriques. (216-229).

Olivier a donné dans le *Journal de Crelle* (t. 70, p. 156, et t. 71, p. 1) une série de théorèmes sur les courbes algébriques qui sont des cas particuliers de la proposition générale suivante :

Si, sur une courbe algébrique C^n d'ordre n, on considère quatre groupes de points a, b, γ, δ tels que a et b sont résiduels relativement à γ et δ, en sorte que les points des couples (a, γ), (a, δ), (b, γ), (b, δ) constituent chacun un système complet de points d'intersection de C^n relativement avec C^l, C^m, C^{m_1}, C^{l_1}, les groupes de points d, c, β, α suivant lesquels se rencontrent en dehors des points déjà considérés les courbes C^l et C^{m_1}, C^m et C^{l_1}, C^l et C^m, C^{l_1} et C^{m_1} sont situés sur une courbe C^{n_1} dont l'ordre est déterminé par les relations

$$l + l_1 = m + m_1 = n + n_1.$$

Ce théorème n'est pas nouveau. Il est contenu dans les recherches de Brill et Nöther (*Math. Ann.*, t. XII, p. 273). C'est ce que montre ici l'auteur. Il donne ensuite des applications telles que celles d'Olivier.

Brill (*A.*). — Sur les courbes rationnelles et les surfaces réglées. (230-238).

Ce Mémoire a été publié d'abord dans les *Sitzb. der k. bayr. Akad. d. W.*, 1885. Si $n - 2$ est divisible par 3, à toute courbe gauche rationnelle C_n d'ordre n correspond une courbe gauche déterminée de classe $p = \frac{n-2}{3}$ qui lui cor-

respond univoquement, en sorte que chacun de ses plans d'osculation passe par le point de C_n qui lui est conjugué. Si $n-1$ ou bien n est divisible par 3, il y a un système simplement infini dans le premier cas, doublement infini dans le second de courbes gauches de classe égale respectivement à $\frac{n-1}{3}$ et à $\frac{n}{3}$ qui jouissent de la même propriété. La courbe gauche générale rationnelle d'ordre n peut être engendrée par l'intersection de plans correspondant à trois courbes rationnelles entre lesquelles existe une correspondance univoque et qui sont de classe $\frac{n}{3}$ ou bien $\frac{n-2}{3}$ et $\frac{n+1}{3}$ ou bien $\frac{n-1}{3}$ et $\frac{n-2}{3}$.

Le nombre des constantes distinctes contenues dans la surface gauche rationnelle d'ordre n est égal à $4n+1$, etc.

Killing (*Wilhelm*). — Détermination des plus grands sous-grouges des groupes de transformation finis. (239-254).

Lie a remarqué depuis longtemps que la détermination de tous les sous-groupes ne dépend que de la composition du groupe et que, par suite, la connaissance des quantités $c_{i\times\rho}$ suffit pour fournir les sous-groupes. Il y a donc lieu de se proposer de déduire de la connaissance de ces quantités c les différents sous-groupes sans avoir recours à la formation explicite du groupe correspondant. L'auteur, en partant de ces remarques, arrive à des propositions telles que les suivantes :

« Tout groupe à r termes de rang *un* contient des sous-groupes à $r-1$ termes; et même, si un groupe à r termes se décompose et que l'un des groupes de décomposition soit de rang *un*, le groupe donné contient toujours des sous-groupes à $r-1$ termes.

» Si un des plus grands sous-groupes d'un groupe donné contient une transformation de caractère général, il contient aussi toutes les transformations contenues dans les groupes et qui sont permutables avec cette transformation. »

Hammond (*James*). — Une démonstration simple de l'existence d'invariants irréductibles des degrés 20 et 30 pour la forme binaire du septième ordre. (255-261).

L'auteur considère la forme particulière

$$(a, 0, 0, 0, 0, f, 0, 0)(x, y)^7;$$

il est alors facile de calculer un invariant irréductible du 20e ordre, $I_{20} = a^4 f^{16}$. La même forme permet aussi de démontrer l'existence d'un I_{30} (von Gall a montré qu'il y a deux invariants irréductibles de degré 20 et un de degré 30). L'auteur donne alors la fonction génératrice des covariants de la forme binaire du 7e ordre.

Stroh (*Emil*). — Sur la représentation symbolique des syzygants fondamentaux d'une forme binaire du sixième ordre et sur une extension de la symbolique de Clebsch. (262-303).

Perrin et Stephanos (*C. R.*, t. XCVI), Hammond (*Amer. J. of Math.*,

t. VII) et von Gall (*Math. Ann.*, t. XXXV) ont établi l'existence de 204 syzygants irréductibles de la forme binaire du 6ᵉ ordre. L'auteur établit ici que ces 204 syzygants sont exprimables à l'aide de 11 syzygants élémentaires.

Dans la seconde Partie du Mémoire, l'auteur développe une extension de la symbolique de Clebsch qui permet de faire rentrer dans le domaine de la méthode symbolique les travaux récents de Cayley, de Mac-Mahon, etc., sur les semi-invariants et les perpétuants. Les covariants et en particulier les semi-invariants peuvent alors s'exprimer sous forme de puissances simples de symboles fondamentaux.

Rogel (*Franz*). — Sur la détermination du nombre des nombres premiers inférieurs à un nombre donné. (304-315).

Remarques sur une formule donnée par l'auteur dans les *Arch. d. Math. und Phys.* (t. VII_2, p. 381; 1889). Transformations diverses de la formule.

Rosanes (*J.*). — Sur un système d'équations linéaires qui se présente relativement aux courbes planes du troisième ordre. (316-318).

Si l'on forme avec les symboles $a_1 \mid a_2 \mid a_3$, $\rho_1 \mid \rho_2 \mid \rho_3$ de deux formes ternaires cubiques indéterminées (de deux courbes) C_3 et Γ_3 et avec les variables $u_1 \mid u_2 \mid u_3$ l'expression $P = (a\rho u)^3$, en écrivant que l'on a identiquement $P \equiv 0$, on est conduit à dix équations bilinéaires relativement aux coefficients de C_3 et de Γ_3. L'auteur montre que le système d'équations admet des solutions constituant au moins un groupe à deux termes. En général, le groupe n'est pas d'ordre supérieur. L'ensemble des triplets de points détachés sur une courbe du troisième ordre par une droite variable constitue un groupe à huit termes seulement.

Pour des courbes spéciales C_3 il se présente des particularités.

Brill (*A.*). — Sur les correspondances algébriques. Deuxième Mémoire. Groupes spéciaux de points sur une courbe algébrique. (321-360).

D'après le théorème de Riemann-Roch, toute courbe adjointe d'ordre $n - 3$, qui détache sur une courbe d'ordre n un groupe spécial, rencontre cette courbe en des points constituant un groupe spécial qui appartient à un faisceau dont la dimension est déterminée par le nombre des points du premier groupe et par la dimension de leur faisceau. Brill et Nöther (*Math. Ann.*, t. VII) ont donné au théorème le nom de Riemann et de Roch pour rappeler que c'est à ces deux mathématiciens que sont dues les propositions fondamentales qui ont conduit au théorème.

En ce qui concerne les groupes spéciaux situés sur une courbe générale o[illegible] se contente de montrer d'ordinaire leur existence à l'aide de l'énumération d[illegible] constantes que contiennent les équations d'où ils dépendent. Mais cela p[illegible] fort bien conduire à des résultats faux; aussi, l'auteur s'est proposé dans [illegible] Mémoire de montrer comment on peut effectivement trouver le nombre [illegible] solutions communes au système d'équations desquelles dépend la question [illegible] groupes spéciaux.

Le problème proposé peut être énoncé comme il suit :

« Soit une courbe algébrique $f(x, y) = 0$ du $n^{\text{ième}}$ ordre et de genre p à points multiples quelconques mais où les tangentes sont toutefois distinctes; soit, de plus, une série linéaire d'ordre ∞^{P-1} de courbes adjointes (passant $\alpha - 1$ fois par chaque point α — uple)

$$\alpha_1 \varphi_1(xy) + \alpha_2 \varphi_2(xy) + \ldots + \alpha_P \varphi_P(xy) = 0.$$

On doit déterminer sur la courbe f un groupe G_R de R points tels que les courbes du faisceau qui y passent constituent encore un système de dimension q, où

$$q > P - 1 - R, \qquad R \lesseqgtr P.$$

Les équations

$$\alpha_1 \varphi_1(x_k y_k) + \alpha_2 \varphi_2(x_k y_k) + \ldots + \alpha_P \varphi_P(x_k y_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, R)$$

sont alors telles que

$$r = q - (P - 1 - R)$$

d'entre elles sont une conséquence des autres, c'est-à-dire que les déterminants d'ordre $R - r + 1$ de la matrice formée avec les éléments φ doivent tous être nuls.

Il y a lieu de voir alors : 1° combien on peut encore prendre arbitrairement des points xy, c'est-à-dire combien d'équations restènt effectivement indépendantes, et ensuite, 2° de déterminer le nombre des systèmes de points que l'on peut encore ajouter à ce premier ensemble pris d'une façon quelconque, en sorte que les équations considérées ne cessent pas d'être satisfaites.

Relativement à la première question, l'auteur montre que, en égalant à zéro les déterminants en question, on est conduit à un nombre d'équations indépendantes égal à

$$r[P - (R - r + 1) + 1] = r(q + 1).$$

Il semble donc que le problème admet toujours des solutions si $r(q+1) \geqq R$, mais cette conclusion ne serait pas juste : elle n'est pas valable par exemple dans le cas où

$$R = 3, \qquad q = 2, \qquad r = 1.$$

Le théorème de Riemann-Roch fournit une autre condition (*Cf.* § 9 du Mémoire de Brill et Noether) qui conduit à exclure de tels cas.

Si l'on se borne au cas des courbes adjointes d'ordre $n - 3$, on a $P = p$ et le théorème de Riemann-Roch donne alors

$$(R - Q) = 2(r - q),$$

et l'on a lorsque p est pair

$$R = \frac{3p}{2} - 3, \qquad r = \frac{p}{2} - 1, \qquad q = 1,$$

et lorsque p est impair,

$$R = \frac{3p - 7}{2}, \qquad r = \frac{p - 3}{2}, \qquad q = 1.$$

On est alors amené à déterminer le nombre des groupes $G_Q^{(1)}$ de $Q = 2p - 2 - R$ points qui correspondent à un point pris arbitrairement et sont tels que les courbes adjointes qui passent par ces points constituent un ensemble à r dimensions. Si l'on prend d'une part r points et d'autre part un point ($q = 1$) d'une façon arbitraire, à tout groupe $G_R^{(r)}$, qui répond, comme groupe spécial ayant la propriété énoncée, aux r points, correspond seulement un groupe G_Q^1 qui contient le point dont il a été question, puisque les $R + 1$ points déterminent une courbe d'ordre $n - 3$, et inversement. On a donc à déterminer certains points $x_1 y_1, \ldots, x_Q y_Q$ où Q est égal à $\frac{p}{2} + 1$ ou à $\frac{p+3}{2}$ pour lesquels les équations

$$\alpha_1 \varphi_1(x_i y_i) + \ldots + \alpha_p \varphi_p(x_i y_i) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, Q)$$

soient satisfaites, en outre que chacune d'elles soit une conséquence des $Q - 1$ autres.

Il faut alors que, en même temps que les équations

$$f(x_1 y_1) = 0, \quad f(x_2 y_2) = 0, \quad \ldots, \quad f(x_Q y_Q) = 0$$

subsistent, les déterminants d'ordre Q de la matrice

$$\begin{Vmatrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \ldots & \varphi_p(x_1 y_1) \\ \varphi_1(x_2 y_2) & \ldots & \varphi_p(x_2 y_2) \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \varphi_1(x_Q y_Q) & \ldots & \varphi_p(x_p y_p) \end{Vmatrix}$$

soient tous nuls. Le problème ainsi posé peut être traité et a été traité par l'auteur d'une façon purement algébrique.

Brill (*A.*). — Sommation d'une certaine série finie. (361-370).

Cette Note constitue un appendice au Mémoire précédent dans lequel l'auteur a rassemblé certaines formules et certains développements qui auraient alourdi le travail principal. Il s'agit surtout de la somme

$$\sum (-1)^\nu \binom{m - 2\nu}{n} \binom{q}{\nu}.$$

Burkhardt (*Heinrich*). — Recherches relatives aux fonctions modulaires hyperelliptiques. Première Partie. (371-434).

Dans l'exposé des leçons de F. Klein que l'auteur a publiées (*Math. Ann.*, t. XXXV, p. 198), l'auteur a montré comment la théorie des fonctions hyperelliptiques du premier ordre pouvait être présentée nettement et clairement; il se propose dans une suite de Mémoires d'établir la puissance de la méthode en traitant une série de problèmes spéciaux que les méthodes antérieures permettaient à peine d'attaquer.

Meyer (*Franz*). — Sur des propriétés de divisibilité des fonctions entières de dérivées d'ordre supérieur. (435-452).

Meyer (*Franz*). — Sur des relations algébriques entre les coefficients du développement de différentielles d'ordre supérieur. (453-466).

Sturm (*Rudolf*). — Énumération des congruences de rayons du second ordre à lignes focales ou lignes singulières. (467-472).

Dans le Mémoire qu'il a publié en 1866, dans les *Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, Kummer a énuméré les congruences du deuxième ordre à lignes focales et sans lignes focales. L'auteur a rencontré des congruences à lignes focales qui ne figurent pas dans le travail de Kummer et il a été ainsi conduit à faire une revision de ces congruences dont il donne rapidement les conclusions.

Les congruences du second ordre se divisent en trois espèces :

I. Tous les rayons de la congruence rencontrent une seule et même courbe gauche deux fois.

II. Tous les rayons de la congruence rencontrent deux courbes différentes chacune une fois.

III. Une seule ligne singulière est rencontrée par tous les rayons de la congruence et en général une fois seulement.

L'espèce I ne contient que la congruence formée par les sécantes doubles de la courbe gauche du quatrième ordre et de première espèce.

L'espèce II offre deux cas : 1° les lignes singulières sont deux coniques qui ont deux points en commun; la congruence est de quatrième classe; 2° une des lignes singulières est une droite, l'autre est une courbe d'ordre n qui rencontre $n-2$ fois la droite; la congruence est de $n^{\text{ième}}$ classe.

Ces deux cas ont été reconnus et étudiés par Kummer. Il n'en est plus de même en ce qui concerne le troisième cas.

L'auteur distingue trois cas distincts qui contiennent des variétés que l'on peut distinguer. Les trois cas principaux sont ceux :

III_1 où la ligne singulière est une droite;

III_2 où la ligne singulière n'est pas droite et où de chacun de ses points part un buisson de rayons appartenant à la congruence;

III_3 où la ligne singulière n'est pas droite et où de chacun de ses points part un cône du second degré appartenant à la congruence.

Hilbert (*David*). — Sur la théorie des formes algébriques. (473-534).

Théorème I. — Étant donné un nombre quelconque de formes de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que l'on représente par $F_1, F_2, \ldots, F_n$, il existe toujours un nombre m tel que toute forme de la série peut être représentée par la formule

$$F = A_1F_1 + A_2F_2 + \ldots + A_mF_m,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des formes convenablement choisies des mêmes n variables.

Théorème II. — Si l'on considère une série illimitée de formes $F_1, F_2, F_3, \ldots$ à coefficients entiers et d'ordres quelconques des n variables homogènes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, il existe toujours un nombre m tel que toute forme de la série peut être représentée par la formule

$$F = A_1 F_1 + A_2 F_2 + \ldots + A_m F_m,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sont des formes à coefficients entiers des mêmes n variables.

Théorème III. — Si un système d'équations est de la forme

$$F_{t1} X_1 + F_{t2} X_2 + \ldots + F_{tm'} X_{m'} = 0 \qquad (t = 1, 2, \ldots, m),$$

la détermination des relations qui existent entre les solutions d'un tel système conduit à un second système d'équations de même forme; du second système dérivé résulte de même un troisième système dérivé et ainsi de suite. En tout cas il y a une limite pour les opérations successives, le $n^{\text{ième}}$ système d'équations dérivées n'admet pas de solution.

Théorème IV. — Le nombre des conditions linéairement indépendantes auxquelles les coefficients d'une forme d'ordre R doivent satisfaire pour qu'elle soit congruente à zéro relativement aux formes considérées comme modules $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$ est fourni par l'expression

$$\chi(R) = \chi_0 + \chi_1 \binom{R}{1} + \chi_2 \binom{R}{2} + \ldots + \chi_d \binom{R}{d},$$

où $\chi_0, \chi_1, \ldots, \chi_d$ sont certains nombres entiers particuliers au module $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$. La fonction entière $\chi(R)$ de degré d relativement à R s'appelle la *fonction caractéristique du module* $(F_1, F_2, \ldots, F_m)$.

Théorème V. — Si l'on donne un système de formes fondamentales à un nombre quelconque de variables qui sont soumises toutes aux mêmes transformations linéaires, ou par groupes à des transformations linéaires différentes, il existe toujours un nombre fini d'invariants entiers et rationnels au moyen desquels on peut exprimer sous forme entière et rationnelle tout autre invariant entier et rationnel.

London (Franz). — Sur les figures polaires des courbes planes du troisième ordre. (524-584).

L'auteur s'est proposé de résoudre le problème de la représentation d'une forme cubique ternaire au moyen d'une somme de cubes de formes linéaires et de la représentation simultanée de plusieurs formes cubiques ternaires au moyen de sommes de cubes. Il établit comment on peut déterminer les formes linéaires et quel est le nombre de ces formes telles que la forme cubique donnée puisse s'exprimer linéairement au moyen de leurs cubes, et, dans les cas de plusieurs formes cubiques ternaires, il donne le minimum de formes linéaires qu'il faut introduire. La question est d'aspect purement algébrique; le travail a cependant un caractère géométrique qu'il doit aux remarques suivantes. Soit la forme cubique

$$f(xxx) = \Sigma a_{ikl} x_i x_k x_l \qquad (i, k, l = 1, 2, 3),$$

où les coefficients a ne changent pas de valeur si on permute leurs indices, et p formes linéaires

$$a_i x = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + a_{i3} x_3 \qquad (i = 1, 2, \ldots, y);$$

si l'on peut déterminer p constantes $k_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ telles que

$$f(xxx) = \Sigma k_i a_i (x)^3,$$

les p droites $a_i(x) = 0$ constituent un p — gone particulier relatif à la courbe C_3 représentée par l'équation $f = 0$. Un tel p — gone s'appelle p — gone polaire de la courbe C_3. La question revient donc à la détermination et à la construction des figures polaires d'une ou de plusieurs courbes du troisième ordre. Comme exemple des résultats obtenus par l'auteur citons les deux suivants :

Au premier abord deux courbes C_3 paraissent devoir admettre un nombre fini de pentagones polaires. Il n'en est rien, pour qu'un tel pentagone existe il faut et il suffit qu'un certain invariant s'annule.

Deux C_3 ont en commun ∞^1 hexagones polaires.

London (*Franz*). — Constructions linéaires du neuvième point d'intersection des deux courbes du troisième ordre. (585-596).

Application des résultats obtenus dans le Mémoire précédent à la solution simple du problème énoncé dans le titre. L'auteur donne quatre constructions différentes.

White (*H.-S.*). — Sur deux formes covariantes de la théorie des fonctions abéliennes relatives aux courbes sans singularités d'intersection de deux surfaces. (547-601).

Soit une courbe gauche formant l'intersection complète de deux surfaces de l'espace à trois dimensions; en employant la terminologie de Klein on a la proposition suivante : sur la courbe gauche considérée les coordonnées homogènes z_1, z_2, z_3, z_4 constituent un système complet. L'auteur arrive en partant de ce théorème à établir l'existence de deux covariants, dont l'un est une généralisation d'une expression rencontrée par Pick (*Math. Ann.*, t. XXIX) et l'autre un facteur qui s'est présenté à Klein dans ses *Recherches sur la théorie des fonctions abéliennes* contenues dans le présent Volume.

Schröder (*Ernst*). — Une correction au premier volume de mon algèbre de la logique. (601).

Miss Ladd (*Studies in Logic*, 1883) avait déjà donné un résultat que l'auteur avait donné comme nouveau, p. 671 de son Ouvrage.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE (¹).

LXᵉ Cahier, 1890.

Andrade. — **Sur le mouvement d'un corps soumis à l'attraction newtonienne de deux corps fixes. (3-57).**

Ce problème a été pour la première fois ramené aux quadratures par Euler, puis repris par Lagrange, par Legendre et par Jacobi, qui y appliqua sa théorie des systèmes canoniques.

La plus grande partie du travail de M. Andrade est consacrée à l'inversion des quadratures auxquelles Euler a ramené le problème; c'est là un nouvel exemple d'inversion dans les fonctions elliptiques.

Dans ce problème de Mécanique l'auteur a rencontré des analogies intéressantes. Lorsqu'un mobile décrit une section conique sous l'influence de l'attraction newtonienne d'un centre fixe, on sait que le signe de la constante de l'intégrale des forces vives suffit pour décider si la trajectoire reste ou non confinée dans une région limitée de l'espace. Toutefois ceci n'est exact que si la constante des aires n'est pas nulle. S'il n'en est pas ainsi, il peut arriver que, quel que soit le signe de la constante des forces vives, le mobile vienne se réunir au centre fixe. En sorte que, dans la combinaison de l'intégrale des forces vives et de celle des aires réside le criterium de la limitation ou de la non-limitation de la trajectoire.

Or M. Andrade fait voir que le même criterium subsiste dans le cas de deux masses fixes.

Il cherche en outre si cette propriété persiste dans le cas de n corps en ligne droite. Lorsque la constante h de l'intégrale des forces vives est négative, cette seule intégrale établit que la trajectoire est limitée. Sans élucider complètement le cas de $h > 0$, l'auteur démontre, en dehors de toute recherche d'intégration, le théorème suivant :

« Si la constante des forces vives est positive et si, de plus, la constante des aires n'est pas nulle, on peut fixer une limite *inférieure* et *permanente* à l'étendue des oscillations de la projection du mobile sur l'axe qui porte les masses fixes. »

M. Andrade étudie encore le cas où le mobile peut être considéré comme satellite de l'une des deux masses fixes M'. Dans le cas où la constante des aires est nulle, on peut encore avoir, comme dans le cas général, un mouvement du mobile où celui-ci reste dans le voisinage de M'; mais, contrairement à ce qui se passe pour les satellites du système planétaire, ce voisinage peut s'exagérer de manière à produire des singularités assez inattendues. C'est ainsi qu'on peut trouver des dates de passage, suffisamment éloignées, aussi voisines l'une de l'autre qu'on le désire; c'est ainsi que le rayon vecteur allant de la masse M' à son satellite peut ne pas toujours tourner dans le même sens. L'existence d'un

(¹) Voir *Bulletin*, t. XV_2, p. 101.

satellite, au sens ordinaire du mot, dans le cas où la constante des aires est nulle, doit donc être regardée comme exceptionnelle.

Mannheim. — Sur le déplacement d'une figure de forme invariable dont tous les plans passent par des points fixes. (75-88).

Le problème que résout M. Mannheim est de trouver directement les conditions de déplacement d'une figure de grandeur invariable, conditions telles que tous les plans de l'espace, en nombre infini, liés à cette figure et entraînés avec elle, passent par des points fixes.

L'auteur commence l'étude directe du déplacement par ces propositions :

1° Si l'on suppose que tous les plans d'une figure mobile de grandeur invariable passent par des points fixes, leurs enveloppes sont des cônes de révolution dont les axes sont parallèles;

2° Si le déplacement d'une telle figure est possible, on l'obtient en la liant à un cylindre de révolution mobile (C) qui roule sur un cylindre fixe situé dans son intérieur, dont la section droite a un rayon moitié du rayon de section droite de (C), et qui glisse dans la direction de son axe de façon qu'un plan lié au cylindre mobile passe par un point fixe.

Les déplacements dont il est question paraissent au premier abord impossibles. M. Mannheim montre cependant qu'ils ne le sont pas et parvient directement à plusieurs manières de déplacer une figure invariable de telle sorte que tous les plans qui lui sont invariablement liés passent par des points fixes. C'est à cet objet que répond, entre autres, le théorème suivant :

« Si un trièdre de grandeur invariable se déplace de façon que deux de ses faces restent tangentes à des cônes de révolution dont les axes sont parallèles et que la troisième face passe par un point fixe, un plan quelconque entraîné avec ce trièdre passe toujours par un point fixe. »

En terminant, M. Mannheim fait remarquer que si, inversement, on rend mobiles les données du déplacement par rapport à la figure de grandeur invariable devenue fixe, tous les points entraînés décrivent des lignes planes.

De là, par réciprocité, découlent des solutions *indirectes* de la question posée au début.

Picard. — Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé. (89-105).

Les équations dont s'occupe M. Picard sont les équations linéaires de la forme

$$(\mathrm{E}) \qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial u}{\partial x} + 2E\frac{\partial u}{\partial y} + Fu = 0,$$

les coefficients dépendant seulement de x et y.

Si l'on envisage uniquement la région du plan où l'on a

$$B^2 - AC < 0,$$

une intégrale de l'équation (E), continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres à l'intérieur d'un contour fermé, est déterminée par ses valeurs sur ce contour, pourvu que celui-ci soit suffisamment petit. L'auteur approfondit ce théorème, déjà établi par lui (*Journal de Mathématiques*, 1890), dans l'hypothèse où les coefficients A, B, ..., F sont des fonctions analytiques de x et y.

Dans ce cas particulier, toute intégrale, continue ainsi que ses deux dérivées partielles des deux premiers ordres dans la région considérée du plan, est-elle aussi une fonction analytique? M. Picard montre qu'il en est bien ainsi, en faisant usage de la méthode des approximations successives. Ce résultat montre bien la différence de nature des intégrales de l'équation (E) suivant le signe de $B^2 - AC$. C'est ainsi que les intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

sont des fonctions analytiques, tandis qu'il n'en est pas nécessairement de même des intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

M. Picard examine ensuite le cas où il n'y a pas de terme en u, c'est-à-dire où $F = 0$. Alors, dans la région du plan où l'on a

$$B^2 - AC < 0,$$

il n'y a qu'une intégrale continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres prenant une succession de valeurs sur un contour fermé. Cette intégrale peut être rigoureusement obtenue par des approximations successives, grâce à l'emploi du procédé alterné de Schwarz.

La proposition énoncée pour le cas où F est identiquement nul subsiste encore si F est de signe contraire à A et C.

Laurent. — Mémoire sur les fonctions entières. (107-136).

Le but de ce Mémoire est surtout de perfectionner la théorie de l'élimination. En ce qui concerne les systèmes de deux équations, l'auteur rappelle une méthode simple qu'il a déjà publiée, méthode qui, convenablement modifiée, donne celle de Cauchy et beaucoup d'autres. En ce qui touche aux systèmes de plus de deux équations, il indique plusieurs moyens nouveaux pour former la résultante et calculer les solutions communes quel qu'en soit le nombre. Pour plus de trois équations, cette méthode conduirait à des calculs très pénibles; mais M. Laurent en donne une autre qui peut être considérée comme la généralisation de la méthode de Cauchy-Cayley et qui permet, sinon de développer la résultante, du moins de la représenter symboliquement par le discriminant d'une fonction du second degré homogène que l'on peut écrire sous forme de déterminant.

L'auteur discute complètement la nature des solutions communes, et donne les conditions d'existence d'une solution par une méthode purement algébrique, qui n'est pas fondée sur des considérations infinitésimales, c'est-à-dire qui ne suppose pas les solutions variables et tendant les unes vers les autres.

Au cours de son travail, M. Laurent est conduit à une formule d'interpolation qui est une généralisation de la formule de Lagrange, et qui permet de construire une fonction de plusieurs variables prenant des valeurs données pour les valeurs des variables qui annulent des polynômes en nombre égal à celui des variables.

Poincaré. — Notice sur Halphen. (137-161).

LXIe Cahier, 1891.

Léauté. — Du mouvement troublé des moteurs, consécutif à une perturbation brusque. Nouvelle méthode graphique pour l'étude complète de ce mouvement. (1-33).

Le mouvement troublé d'un moteur est celui qui succède à une perturbation brusque de la résistance ou de la puissance. La vitesse alors se modifie, et si la machine est pourvue d'un régulateur, ce régulateur entre en action et un nouvel état de régime se rétablit. Mais ce résultat n'est pas obtenu instantanément et une période d'oscillations de la vitesse existe entre les deux états d'équilibre.

L'étude de ce mouvement troublé est fondamentale, et il est nécessaire, si l'on veut avoir une sécurité absolue, de savoir déterminer tous les éléments de la plus forte période de trouble à laquelle on est exposé, c'est-à-dire de savoir calculer la durée qu'elle aura, les oscillations qui la constituent, les plus grands écarts de vitesse qu'elle présentera.

La méthode analytique conduisant à des formules compliquées, M. Léauté préfère recourir à des tracés graphiques. Il définit et étudie certaines lignes utiles à considérer dans l'étude des perturbations de régime.

L'état d'une machine hydraulique en mouvement à un moment donné est défini par trois quantités : 1° la vitesse N (nombre de tours par minute que fait l'arbre principal); 2° la résistance R qu'il faut vaincre; 3° l'ouverture A de la vanne d'admission.

Si l'on prend pour abscisses les ouvertures de vanne et pour ordonnées les vitesses de régime correspondantes, on obtient, pour chaque valeur de la résistance R, une suite de points formant une ligne. Ces lignes, M. Léauté les appelle *lignes de régime*. Leur équation peut être déduite de la connaissance des rendements. Soit r le rendement, qui est une fonction connue de la vitesse N et de l'ouverture de vanne A, et soit ϖ la quantité de fluide qui traverse le moteur en une minute, quantité qui est également une fonction connue de A et de N. Les lignes de régime sont données par l'équation

$$\frac{\varpi r}{N} = cR,$$

où c est une constante et R le paramètre dont la valeur particulière détermine chacune d'elles.

On peut tracer aisément, en prenant A et N pour coordonnées, les lignes le long desquelles ϖ et $\frac{r}{N}$ sont respectivement constants. Les premières sont ap-

pelées par M. Léauté *lignes de dépense constante*, les secondes *lignes d'effort constant*. Dans une planche annexée à son Mémoire, l'auteur montre comment on peut disposer l'épure pour le tracé de ces diverses lignes de régime, de dépense constante, d'effort constant, ainsi que des *lignes de rendement* qui représentent la manière dont varie le rendement r en fonction de la vitesse N pour différentes ouvertures d'admission A. Il discute l'allure affectée par ces diverses lignes dans les divers cas qui se présentent dans la pratique, suivant la nature du moteur

Ces conceptions géométriques vont servir à l'étude graphique du mouvement troublé. Le régime de la machine étant brusquement altéré, la résistance prend une nouvelle valeur $\mathcal{R}$. Soit $\mathcal{A}$ l'ouverture qu'il faudrait donner à la vanne pour que, sous l'influence de la résistance R, la machine puisse prendre et conserver sa vitesse moyenne de régime $\mathcal{N}$, et soit Λ la *caractéristique cinématique* de la machine, c'est-à-dire le nombre de tours qu'elle décrit en vertu de la seule inertie si, pendant la marche uniforme, on supprime brusquement l'arrivée du fluide moteur sans modifier les résistances. Soient enfin A et N l'ouverture de la vanne et la vitesse à un moment quelconque, et R le paramètre de la ligne de régime correspondant à l'état A, N. L'état de la machine est, à ce moment, défini par la résistance $\mathcal{R}$ et la position du point ayant pour coordonnées A et N. Quant au *chemin* total λ décrit par la machine, il est lié à la vitesse par l'équation

$$(1) \qquad dN = \frac{\mathcal{N}}{2\Lambda}\,\frac{\dfrac{R}{\mathcal{R}} - 1}{\dfrac{N}{\mathcal{N}}}\,d\lambda.$$

La connaissance du mouvement de la machine exige que l'on puisse déterminer la suite des valeurs que prennent N, A et λ. Si la machine est pourvue d'un appareil de régulation à action indirecte, cet appareil déplace la vanne dans un sens ou dans l'autre dès que la vitesse sort de la zone de régime.

Les états successifs de la machine pendant les périodes d'action des régulateurs sont déterminés par l'équation générale (1) combinée à l'équation $dA = 0$.

Les vitesses relatives de fermeture et d'ouverture du vannage étant des constantes, l'intégration des équations du mouvement dépend en définitive de la seule fonction

$$\frac{\dfrac{R}{\mathcal{R}} - 1}{\dfrac{N}{\mathcal{N}}} = T.$$

Il est utile par suite de tracer sur l'épure les *trajectoires* le long desquelles cette fonction T conserve une même valeur. Ce tracé s'effectue immédiatement quand on connaît les lignes de régime.

Ces trajectoires étant supposées tracées, l'auteur examine alors comment on peut déterminer le mouvement de la machine dans la zone de régime et en dehors de cette zone.

Pour bien faire saisir sa méthode graphique, M. Léauté l'applique à l'un des exemples les plus compliqués et les moins abordables à la méthode analytique que l'on puisse rencontrer, celui d'une turbine qui peut être alternativement noyée et dénoyée, et pour laquelle la résistance varie du simple au double et inversement.

Autonne. — Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. (35-122).

Pour l'analyse de ce Mémoire, *voir* ci-après, au cahier suivant.

LXII[e] Cahier, 1892.

Phillips. — Disposition propre à rendre le pendule isochrone. (1-35).

Mémoire posthume de M. Phillips retrouvé dans les papiers qu'il a laissés.

Godefroy. — Sur les rayons de courbure de certaines courbes et surfaces et en particulier des courbes et surfaces de Lamé. (37-46).

Les problèmes que traite l'auteur sont les suivants :

1° Recherche du rayon de courbure des courbes $ax^m + by^n + c = 0$;
2° Rayon de courbure des courbes de Lamé et de leurs développées;
3° Rayons de courbure principaux des surfaces de Lamé;
4° Rayons de courbure principaux des surfaces $z^2 = f(x) + \varphi(y)$, f et y étant des fonctions continues quelconques.

Autonne. — Sur la théorie des équations différentielles du premier ordre et du premier degré. (47-180).

Les équations différentielles dont s'occupe M. Autonne sont de la forme

$$M(\xi, \eta)\, d\xi + N(\xi, \eta)\, d\eta = 0,$$

où M et N sont des fonctions rationnelles. Si l'on introduit des variables homogènes, x_1, x_2, x_3, et qu'on fasse usage de la notation symbolique

$$(x\, dx)_1 = x_2\, dx_3 - x_3\, dx_2,$$

l'équation devient

$$\Sigma_i P_i (x\, dx)_i = 0,$$

P_i étant une forme ternaire d'ordre m en x_i; m est la *dimension* de l'équation différentielle.

M. Darboux a montré que, pour de telles équations, la connaissance de l'intégrale générale dépend de celles d'un nombre suffisant d'intégrales particulières *algébriques*.

Abordant la question par une autre voie, M. Autonne cherche à mettre à profit : 1° les relations qui existent entre les intégrales et certaines courbes tracées sur des surfaces unicursales; 2° l'existence dans l'équation de singularités soit ordinaires (points *critiques*), soit exceptionnelles (points *polycritiques* et *hypercritiques*).

Le mode de représentation de l'équation par une surface dont l'auteur fait usage présente l'avantage suivant : les courbes qui représentent les intégrales

jouissent d'une propriété qui reste toujours la même quelle que soit l'équation différentielle, à savoir que la tangente à l'une quelconque de ces courbes fait partie d'un complexe linéaire toujours le même (**complexe *capital***). M. Autonne appelle *intégrante* toute courbe dont les tangentes sont situées sur ce complexe.

Il démontre que toute équation du premier ordre

$$F(\xi, \eta, p) = 0, \qquad p = \frac{d\eta}{d\xi},$$

où F est un polynôme en ξ, η, p, peut être considérée comme donnant les intégrantes sur une certaine surface algébrique $\mathfrak{F}$, qui même est unicursale, et si p figure dans F au premier degré. Réciproquement, la détermination des intégrantes entraîne l'intégration d'une équation du premier ordre; celle-ci est du premier degré lorsque la surface $\mathfrak{F}$ est unicursale.

Les coordonnées homogènes $z_j (j = 1, 2, 3, 4)$ d'un point z de $\mathfrak{F}$ sont, lorsque $\mathfrak{F}$ est unicursale, données par les relations

$$\rho z_j = \varphi_j(x_1, x_2, x_3),$$

où ρ est un facteur de proportionnalité et φ_j une forme ternaire. La relation infinitésimale qui caractérise les courbes intégrantes est

$$(z\,dz) = \begin{vmatrix} dz_1 & dz_2 \\ z_1 & z_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} dz_3 & dz_4 \\ z_3 & z_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Les intégrantes de F se trouvent donc représentées sur le plan lieu des points x de coordonnées $x_i (i = 1, 2, 3)$ par les intégrales de l'équation du premier ordre et du premier degré (équation *réglementaire*)

$$(\varphi\, d\varphi) = \begin{vmatrix} (x\,dx)_1 & (x\,dx)_2 & (x\,dx)_3 \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} (x\,dx)_1 & (x\,dx)_2 & (x\,dx)_3 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\varphi_{ji} = \frac{d\varphi_j}{dx_i}.$$

Toute équation différentielle du premier ordre et du premier degré peut être considérée comme une réglementaire. La connaissance des intégrantes sur la surface unicursale F entraîne celle des intégrales de la réglementaire. C'est là le principe de la méthode de M. Autonne.

Abandonnant la classification des équations d'après leur dimension, l'auteur les classe d'après l'ordre de la surface $\mathfrak{F}$ ou, ce qui revient au même, d'après l'ordre des formes φ_j, suivant qu'elles sont linéaires, quadratiques, cubiques, etc.

Dans la première Partie de son Mémoire, il établit les fondements de sa méthode. Si dans une équation du premier ordre

$$F[x_1, x_2, x_3, (x\,dx)_1, (x\,dx)_2, (x\,dx)_3] = 0,$$

on remplace $(x\,dx)_i$ par la coordonnée u_i d'une droite variable u, on obtient un connexe L dont les courbes de coïncidence sont précisément les intégrales de l'équation différentielle. M. Autonne donne des formules qui établissent une correspondance birationnelle entre les points d'une surface algébrique $\mathfrak{F}$ et les

léments du connexe L. Il établit les relations qui lient l'ordre de $\mathfrak{F}$ à l'ordre à la classe de F et il démontre qu'aux intégrales du connexe correspondent ien sur F les courbes intégrantes. Cette première Partie se termine par l'in-roduction des équations différentielles réglementaires et l'identification des eux problèmes suivants : recherche des intégrantes sur les surfaces unicur-ales, et intégration de l'équation $P = \Sigma_i P_i (x\, dx)_i = 0$.

La seconde Partie, purement géométrique, est consacrée au problème des ntégrantes. Le principal artifice employé pour la solution est la transformation es surfaces, birationnelle et *régulière,* c'est-à-dire changeant les intégrantes n d'autres intégrantes. L'auteur indique les conditions générales de *régularité* construit toutes les substitutions régulières linéaires.

Il fait alors la théorie géométrique des intégrales. Par chaque point d'une urface algébrique ne passe qu'une intégrante; les points *nodaux* par lesquels peut en passer plus d'une sont en général en nombre fini sur la surface, ais quelquefois il peut exister toute une courbe *nodale,* et dans ce cas la re-herche des intégrantes est beaucoup plus facile.

Sur les plans, les quadriques, les cubatiques gauches, l'emploi d'une substi-ution régulière linéaire convenable permet de trouver les intégrantes par des rocédés élémentaires. Pour le plan et la quadrique, on n'a besoin d'effectuer ue des quadratures. Pour la cubatique gauche, on est ramené à une équation e Riccati, à moins que la droite double de la cubatique ou bien la directrice ectiligne des génératrices ne soit rectiligne, auquel cas on est ramené sim-lement aux quadratures.

La seconde Partie se termine par une étude détaillée des intégrantes sur une ubatique ayant une ligne nodale. On est alors ramené, pour trouver ces in-égrantes, à intégrer une équation différentielle P de dimension 2 ou 1.

Dans la troisième Partie, M. Autonne introduit la notion de points polycri-iques et hypercritiques. On sait que si l'équation différentielle $P = 0$ est de imension m, il y a dans le plan $m^2 + m + 1$ points *critiques* par lesquels eut passer plus d'une intégrale. En ces points, $P = \Sigma_i A_i dx_i$ s'annule indé-endamment des différentielles dx_i. L'auteur dit qu'un point (x_1, x_2, x_3) est *olycritique d'ordre* α, si en ce point P, dP, d^2P, ..., $d^{\alpha-1}P$ s'annulent ndépendamment des différentielles dx_i, d^2x_i, ..., $d^\alpha x_i$. Si $\alpha = 1$, le point est onocritique, dicritique si $\alpha = 2$, etc. Enfin, si en un point dicritique, les ourbes du réseau ont un point double, le point dicritique devient *hyper-ritique.*

Tous ces points se trouvent en connexion étroite avec les points nodaux de a surface $\mathfrak{F}$ et aussi avec les points fondamentaux des formes ternaires φ_j. Les oints fondamentaux sont en général dicritiques pour la réglementaire.

Ces préliminaires posés, l'auteur passe à l'étude des réglementaires obtenues n opérant sur les formes ternaires φ_j d'ordre 1, 2, 3. Si cet ordre est l, la di-ension de la réglementaire est $m = 2(l-1)$.

Il insiste peu sur les formes linéaires $(l = 1)$ qui ne donnent rien d'inté-essant, car dans ce cas les intégrales sont des droites courantes et sur les ormes quadratiques $(l = 2)$, cas qui a été étudié à fond par M. Darboux. Mais l fait une longue étude du cas $l = 3$ lorsque la surface unicursale $\mathfrak{F}$ est cuba-ique, ce qui entraîne l'existence de six points fondamentaux. La dimension de a réglementaire est $m = 4$. La présence sur la surface $\mathfrak{F}$ d'une ligne nodale est évélée soit par l'abaissement de la dimension, soit par l'apparition d'un point icritique. Voici même un théorème qui ne suppose pas que l'équation diffé-

rentielle est la réglementaire qui provient des quatre formes cubiques ternaires à six points fondamentaux.

La dimension étant 3, l'existence de trois points dicritiques permet de ramener l'intégration à celle d'une équation de dimension 2; un quatrième point dicritique ramène à une équation de Riccati; un cinquième ramène aux quadratures. Il faut toutefois que le quatrième ou le cinquième dicritique ne soit pas sur les côtés du triangle formé par les trois premiers.

L'auteur termine son Mémoire par diverses applications des résultats géométriques établis dans la seconde Partie. Cette méthode lui permet d'intégrer des équations pour lesquelles les méthodes d'intégration dues à M. Darboux ne réussissent pas, les intégrales particulières algébriques n'étant pas en nombre suffisant.

Liouville (*R.*). — Sur une équation différentielle du premier ordre. (181-186).

L'équation différentielle

$$\frac{dy}{dx} + (m_1 x^3 + 3 m_2 x^2 + 3 m_3 x + m_4) y^3 + 3(n_1 x + n_2) y^2 = 0$$

est intégrable s'il existe entre les constantes qu'elle contient les relations

$$m_2 n_1 - m_1 n_2 = 0,$$
$$n_1^2 (m_4 n_1 - 3 m_3 n_2) + 2 m_1 n_2^3 = 0,$$

sauf dans deux cas exceptionnels.

L'intégration se fait par les fonctions hyperelliptiques ou elliptiques si l'équation numérique

$$m_1 - h(2h - 3) n_1^2 = 0$$

donne pour h des valeurs rationnelles.

Une première exception se présente lorsque n_1 est nul. Alors on ne connaît pas le moyen d'intégrer l'équation différentielle.

La seconde exception répond au cas où $h = \frac{3}{2}$. L'équation proposée se ramène à l'équation de Riccati :

$$\frac{dx}{dY} = \frac{3 n_1 x^2}{2} + n_2 x - m_3 + m_4 Y + k.$$

THE QUARTERLY JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, edited by N.-M. Ferrers, A. Cayley, J.-W.-L. Glaisher, A.-R. Forsyth (¹).

Tome XXIV; 1890.

Baker (H.-F.). — Application des formules de Weierstrass aux formes binaires biquadratiques et aux formes cubiques ternaires. (1-30).

Le principal objet de ce travail est l'application des formes algébriques, qui se présentent dans la théorie de Weierstrass, à la théorie des formes cubiques ternaires et des formes binaires du quatrième ordre. Les formes données par Weierstrass paraissent avoir des rapports plus étroits avec la théorie des invariants que celles de Jacobi.

Dixon (A.-C.). — Sur les cubiques gauches. (31-54).

Étude géométrique intéressante des cubiques gauches. L'auteur se préoccupe surtout des analogies avec la théorie des coniques. Les propriétés métriques sont relatives surtout aux quatre surfaces de révolution du second degré qui passent par une cubique gauche donnée, et analogues aux propriétés focales des coniques. Les propriétés descriptives sont les analogues des propriétés d'une conique relativement aux pôles et aux polaires.

Taylor (H.-M.). — Sur le centre d'une courbe algébrique. (55-63).

L'auteur appelle ainsi le point fixe qui est le centre des moyennes distances des points de contact de la courbe avec les tangentes parallèles à une direction fixe. Ce point jouit des propriétés suivantes : 1° toutes les courbes qui ont les mêmes asymptotes ont le même centre; 2° le centre d'une courbe est le centre des moyennes distances des points d'intersection des asymptotes prises deux à deux; 3° le centre est aussi le centre des moyennes distances des foyers. Les deux premières propriétés résultent de ce que les coordonnées du centre ne dépendent que des coefficients des termes de degré n ou $n-1$; la dernière propriété s'établit aisément au moyen de l'équation tangentielle.

Karl Pearson. — Sur la flexion d'une poutre pesante, soumise à une charge continue. (63-110).

Askwith (E.-H.). — Sur les groupes de substitutions que l'on peut former avec 3, 4, 5, 6 et 7 lettres. (111-167).

(¹) Voir *Bulletin*, XVIII₁, p. 67.

L'auteur donne d'abord un certain nombre de propositions générales sur la théorie des groupes, dont quelques-unes se trouvent déjà dans le *Cours d'Algèbre supérieure* de Serret, dont les autres paraissent nouvelles. Dans la seconde partie du Mémoire, il forme par une méthode uniforme tous les groupes de 3, 4, 5, 6, 7 lettres.

L'auteur ne se préoccupe pas de former les fonctions qui admettent un groupe donné.

Dixon (A.-C.). — Sur les fonctions doublement périodiques provenant de la courbe $x^3+y^3-3xy=1$. (167-233).

Soit $u=\int_0^x \frac{dx}{y^2-x^2x^2}$ l'intégrale de première espèce attachée à la courbe $x^3+y^3-3xy+1=0$. Les coordonnées x et y sont des fonctions uniformes doublement périodiques de u, $x=\operatorname{sn} u$, $y=\operatorname{cn} u$. L'auteur refait la théorie générale des fonctions doublement périodiques en partant de ce point de vue; il est bien clair que les formules ne peuvent différer que par la notation des formules habituelles.

Hudson (Edmond-Christopher). — Sur un développement en série. (233-245).

Il s'agit du développement de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$; l'auteur applique une formule donnant la somme des produits t à t des n premiers nombres. On arrive à la formule finale

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\left(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}x^2-\frac{7}{16}x^3-\ldots\right),$$

où tous les coefficients sont commensurables.

Mac-Mahon (P.-A.). — Un théorème dans le calcul des opérations des équations linéaires aux dérivées partielles. (246-250).

Théorème sur certains opérateurs linéaires et leurs combinaisons.

Jeffery (Henry-M.). — Sur l'identité des nœuds d'une courbe nodale du quatrième ordre avec ceux des courbes contrevariantes du quatrième et du sixième degré. (250-256).

Soient U, S, T la quartique primitive et les deux contrevariants du quatrième et du sixième ordre. Si la courbe $U=0$ a un point double en C, les deux courbes $S=0$, $T=0$ ont le même point double avec les mêmes tangentes, chaque tangente en ce point est une tangente d'inflexion pour T. L'auteur fait l'application de cette propriété générale aux quartiques bicirculaires et aux quartiques trinodales.

Routh (E.-J.). — Note sur l'intersection d'une courbe avec une ligne droite. (257-259).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les abscisses des points de rencontre d'une courbe de degré n avec une parallèle $y = m$ à l'axe des x. On trouve immédiatement la relation $\Sigma x = -(a_0 + a_1 y)$, a_0 et a_1 étant deux coefficients constants; on en déduit par des différentiations successives une suite de relations

$$\sum \frac{dx}{dy} = -a_0, \quad \sum \frac{d^2 x}{dy^2} = 0, \quad \sum \frac{d^3 x}{dy^3} = 0, \quad \ldots,$$

qui peuvent s'interpréter géométriquement. Appelons ρ le rayon de courbure en un des points d'intersection, φ l'angle de la tangente avec la sécante variable, θ l'angle du diamètre de la parabole osculatrice avec la tangente; les formules précédentes peuvent s'écrire

$$\sum \cot\varphi = -a_0, \quad \sum \frac{1}{\rho \sin^3\varphi} = 0, \quad \sum \frac{\cot\varphi + \cot\theta}{\rho^2 \sin^4\varphi} = 0.$$

La seconde formule, appliquée à une cubique, conduit à des résultats intéressants.

Cayley. — Une transformation dans la théorie des fonctions elliptiques. (259-262).

Démonstration algébrique de la formule

$$pu = \frac{\Psi_x^y + \sqrt{\Psi(x)\Psi(y)}}{2(x-y)^2}, \quad \text{où} \quad u = \int_y^x \frac{dx}{\sqrt{\Psi(x)}},$$

attribuée à Weierstrass (*voir* HALPHEN, *Fonctions elliptiques*, t. II, p. 359).

Askwith (E.-H.). — Sur les groupes de substitutions de huit lettres. (263-331).

Tableau de tous ces groupes. L'auteur trouve 157 groupes de substitutions déplaçant toutes les lettres.

Heawood (P.-J.). — Théorème des cartes coloriées. (332-338).

Remarques au sujet de ce théorème, dont on ne possède, paraît-il, aucune démonstration : on peut colorier avec quatre couleurs différentes toutes les subdivisions de la carte d'un pays, de manière que les provinces contiguës soient coloriées d'une façon différente.

Baker (B.-A.). — Sur le centre d'une courbe algébrique. (338-339).

Remarques au sujet de l'article de M. Taylor (p. 55-60 de ce Volume).

Chree (C.). — Sur les vibrations longitudinales d'une barre allotropique, possédant un axe de symétrie. (340-358).

Frank Morley. — Sur la cinématique d'un triangle de forme constante et de grandeur variable. (359-369).

Étant donné un triangle qui reste semblable à lui-même tout en changeant de grandeur et de position dans son plan, un point est dit invariablement lié à ce triangle, s'il forme avec le triangle donné une figure qui reste semblable à elle-même. L'auteur se propose d'étudier les trajectoires des points liés à un triangle et les enveloppes des courbes liées au même triangle, pour une loi de déplacement connue. On est conduit ainsi à différentes généralisations des théorèmes connus de Cinématique proprement dite.

Stieltjes (*T.-J.*). — Sur quelques intégrales définies et leur développement en fractions continues. (370-382).

L'auteur considère d'abord l'intégrale

$$\int_0^\infty (\cos u + a \sin u)^m \sin^n u e^{-xu} du = f(m, n),$$

où m et n sont des nombres entiers positifs. Des formules connues

$$\int_0^\infty \cos pu e^{-xu} du = \frac{x}{x^2+p^2}, \qquad \int_0^\infty \sin pu e^{-xu} du = \frac{p}{x^2+p^2},$$

on déduit d'abord sans difficulté que $f(m, n)$ est une fonction rationnelle de x, $f(m, n) = 1.2.3\ldots n \frac{A}{B}$, où le dénominateur B a l'une des valeurs suivantes

$$B = (x^2+2^2)(x^2+4^2)\ldots[x^2+(m+n)^2],$$
$$B = (x^2+1^2)(x^2+3^2)\ldots[x^2+(m+n)^2],$$

suivant que $m+n$ est pair ou impair. Quant au numérateur A, M. Stieltjes montre qu'on peut le définir de la manière la plus simple au moyen d'une fraction continue. On obtient des résultats analogues pour l'intégrale

$$\int_0^\infty (\cos h u + a \sin h u)^m \sin h^n u e^{-xu} du.$$

M. Stieltjes développe ensuite en fractions continues l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin h(au) \sin h(bu)}{\sin h(cu)} e^{-xu} du,$$

et d'autres intégrales plus compliquées.

Sharpe (*H.-J.*). — Note sur les polynomes de Legendre. (383-386).

Dans son traité des *Fonctions de Laplace*, Todhunter a donné la formule approchée

$$P_n(\cos\theta) = \left(\frac{2}{n\pi \sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(n\theta + \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\pi\right),$$

pour des valeurs très grandes de n. L'auteur de cette Note s'est proposé de rechercher pour quelles valeurs de θ l'équation précédente donne une véritable approximation. Il se sert pour cela de l'équation différentielle à laquelle satisfait le polynome P_n, dont il cherche une solution ordonnée suivant les puissances de $\frac{1}{n}$.

Tome XXV; 1891.

Homersham Cox. — Application de l'*Ausdehnungslehre* de Grassmann aux propriétés des cercles. (1-71).

Cayley. — Sur les groupes de substitutions de 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8 lettres. (71-88; 136-155).

L'illustre géomètre donne, sous une forme condensée, le tableau de tous ces groupes de substitutions, obtenus par Serret et par M. Askwith.

***Workman* (*W.-P.*).** — Théorie des singularités des surfaces de révolution. (89-103).

Quand on fait tourner une courbe plane autour d'un axe situé dans son plan, la surface de révolution obtenue présente en général des singularités provenant des singularités de la méridienne, et des points de rencontre de cette méridienne avec l'axe. L'auteur ramène toutes les singularités possibles à huit singularités élémentaires distinctes, et donne des exemples de chacune d'elles.

Cayley. — Sur le problème des contacts. (104-127).

Le problème de mener un cercle tangent à trois cercles donnés se décompose en réalité en quatre problèmes admettant chacun deux solutions. Après avoir rappelé la construction géométrique donnée par Newton dans les *Principes*, qui revient à chercher l'intersection de deux hyperboles ayant un foyer commun, M. Cayley donne une solution analytique et développe complètement les équations.

***Mathews* (*G.-B.*).** — Sur la classification des fonctions symétriques. (127-136).

Appelons *ultra-ternaire* une fonction symétrique des racines d'une équation dont le terme général $\alpha^p \beta^q \gamma^r \ldots$ ne contient que des exposants supérieurs à 3. Toute fonction ultra-ternaire satisfait à deux équations linéaires aux dérivées partielles et, inversement, toute solution de ce système est une fonction ultra-ternaire. Il existe un théorème analogue pour les fonctions *ultra-septenaires*.

***Brungate* (*W.-E.*).** — Les concomitants des formes ternaires. (155-181).

Extension aux formes ternaires des résultats obtenus par M. Hermite pour

les formes binaires dans son Mémoire *Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées* (*Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, vol. IX).

William Walton. — Sur les vitesses des rayons conjugués dans un cristal biaxe et leur inclinaison. (182-185).

Morley (*F.*). — La Géométrie covariante du triangle. (186-197).

Représentons les trois sommets d'un triangle par trois quantités imaginaires z_1, z_2, z_3, suivant la méthode habituelle : ces trois quantités sont racines d'une équation du troisième ordre $U \equiv az^3 + 3bz^2 + 3cz + d = 0$. Les racines d'un covariant quelconque de la forme binaire U représentent des points ayant avec les trois sommets du triangle des relations qui se conservent par une transformation circulaire. Ainsi les points-racines du covariant du second degré sont deux points tels qu'une transformation par rayons vecteurs réciproques, ayant pour pôle un de ces points, remplace les trois sommets du triangle proposé par les trois sommets d'un triangle équilatéral. L'article de M. Morley se rattache d'une part aux travaux de Beltrami sur les formes cubiques et de Klein sur l'icosaèdre, d'autre part aux recherches récentes sur la géométrie du triangle de Casey, Neuberg, Brocard, etc.

Stieltjes. — Note sur quelques fractions continues. (198-200).

Développement en fraction continue de

$$\frac{\Gamma\left(x - \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(x + \frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(x + \frac{a}{2} + \frac{1}{4}\right)\Gamma\left(x - \frac{a}{2} + \frac{3}{4}\right)}.$$

Perott (*J.*). — Les formules d'interpolation de Gauss pour $n = 7$, 8 et 9. (200-202).

Tableau des racines des polynomes de Legendre P_{n+1} pour les valeurs $n = 7$, 8, 9; ces racines sont calculées avec 16 décimales. L'auteur donne aussi les coefficients qui se présentent dans l'application de la formule de Gauss avec le même nombre de décimales.

Cayley. — Sur la transformation orthomorphique. (203-226).

On sait que la transformation définie par la relation $x_1 + iy_1 = \varphi(x + iy)$ fait correspondre aux droites $x = C$, $y = C'$ une famille de courbes orthogonales et isothermes dans le plan (x_1, y_1). Si l'on se donne une courbe S de l'un de ces systèmes et la courbe S' infiniment voisine du même système, des considérations géométriques montrent que le système orthogonal est complètement déterminé. M. Cayley donne la solution analytique suivante de ce problème. Supposons la courbe S représentée par les deux équations $x_1 = p$, $y_1 = q$, p et q étant des fonctions réelles de la variable indépendante θ, et la courbe voisine S' par les équations $x_1 = p + \gamma P$, $y_1 = q + \gamma Q$, où γ est infiniment petit

et où P et Q sont aussi des fonctions de θ. Déterminons une fonction $\theta = f(w)$ par l'équation

$$Cw = \int \frac{(p'^2 + q'^2)\, d\theta}{p'Q - q'P},$$

et remplaçons dans p et q la variable θ par $f(w) = f(x + iy)$; la fonction d'une variable complexe $x_1 + iy = p + iq = \varphi(x + iy)$ répond à la question. L'auteur reproduit aussi une solution différente due à Meyer (*Inauguraldissertation;* 1879), puis il s'occupe du problème de la représentation conforme d'une aire simplement connexe sur un cercle, dont il donne des exemples simples.

Max Mandl. — Sur la généralisation d'un théorème de Gauss et son application. (227-236).

Démonstration d'un théorème énoncé par Schering dans les *Proceedings de l'Académie de Berlin* (22 juin 1876) :

Soit m un nombre entier et n un nombre entier impair premier avec m; en remplaçant chaque nombre de la suite

$$m, \; 2m, \; 3m, \; \ldots, \; \frac{n-1}{2} m,$$

par son plus petit résidu suivant le module n, on obtient, dans un certain ordre, les nombres de la suite

$$\mathcal{E}_1, \; 2\mathcal{E}_2, \; 3\mathcal{E}_3, \; \ldots, \; \frac{n-1}{2} \mathcal{E}_{\frac{n-1}{2}},$$

où $\mathcal{E}_i = \pm 1$; on a la relation

$$\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 \ldots \mathcal{E}_{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{m}{n}\right),$$

$\left(\frac{m}{n}\right)$ désignant le symbole de Legendre généralisé par Jacobi.

Biggin (T.). — Sur les coordonnées biangulaires, et une extension de ce système de coordonnées à l'espace à trois dimensions. (237-258).

Dyson (F.-W.). — Les potentiels d'ellipsoïdes de densité variable. (259-288).

Mathews (G.-B.). — Sur les formes binaires quadratiques à coefficients complexes. (289-300).

L'auteur étudie les relations qui existent entre le groupe de substitutions linéaires $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$, où α, β, γ, δ sont des nombres entiers complexes tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, et la théorie de la réduction des formes binaires quadratiques à coefficients complexes. Les résultats sont à rapprocher de ceux de M. Bianchi (*Mathematische Annalen,* t. XXXVIII, p. 313) et de M. Picard (*Mathematische Annalen,* t. XXXIX, p. 142).

Platts (*C.*). — Sur certaines classes d'invariants, associés aux équations différentielles linéaires. (300-335).

Étude des semi-invariants, relatifs au cas où l'on multiplie la fonction inconnue par une fonction de x, et au cas où l'on change la variable indépendante.

Henry (*M.*) et *Jeffery*. — Sur certaines propriétés analogues des quadrilatères et pentaèdres inscrits et circonscrits. (336-347).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les sommes des inverses des puissances des nombres premiers. (347-362).

Soient

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \dots,$$

$$\Sigma_n = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} - \dots$$

tous les nombres entiers figurant dans S_n et les nombres premiers seulement dans Σ_n. On sait que les sommes S_n s'expriment d'une façon simple au moyen des nombres de Bernoulli. M. Glaisher donne une formule permettant d'exprimer Σ_n au moyen des sommes successives S_n, S_{2n}, S_{3n}, ...

$$\Sigma_n = \log S_n - \frac{1}{2}\log S_{2n} - \frac{1}{3}\log S_{3n} - \frac{1}{5}\log S_{5n} + \frac{1}{6}\log S_{6n} - \dots;$$

les seuls nombres 2, 3, 5, 6, 7, ... que l'on rencontre dans le second membre sont ceux qui n'admettent aucun diviseur carré, et le signe de chaque terme est + ou —, suivant que le nombre des facteurs premiers est pair ou impair. Cette formule se déduit de la formule élémentaire

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots,$$

d'où l'on tire, d'après un théorème de Möbius,

$$x = -\log(1-x) + \frac{1}{2}\log(1-x^2) + \frac{1}{3}\log(1-x^3) + \dots.$$

Il suffit d'y faire successivement $x = \frac{1}{2^n}, \frac{1}{3^n}, \frac{1}{6^n}, \dots$ et d'ajouter, pour obtenir le résultat de M. Glaisher. L'auteur donne le tableau des valeurs de Σ_n avec 24 décimales, jusqu'à $n = 80$.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Calcul du logarithme hyperbolique de π, avec 31 décimales. (362-368).

M. Glaisher se sert de la formule

$$B_n \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} = \frac{2^{2n}}{2^{2n}-1}\,\frac{3^{2n}}{3^{2n}-1}\,\frac{5^{2n}}{5^{2n}-1}\,\frac{7^{2n}}{7^{2n}-1}\dots,$$

où B_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli. Il prend successivement $n = 5$, $n = 11$, et trouve des résultats concordants, qui sont aussi d'accord avec un résultat obtenu par Euler, qui avait calculé $\log \pi$ avec 35 décimales.

Glaisher (J.-W.-L.). — Sur les séries

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \ldots$$

(369-375).

Valeurs approchées des sommes des inverses des puissances de nombres premiers, depuis 2 jusqu'à x. Applications de la formule de Riemann, qui donne le nombre des nombres premiers inférieurs à x, au moyen du logarithme intégral.

Glaisher (J.-W.-L.). — Sur les séries

$$\frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \ldots$$

(375-383).

Chaque terme de la série a le signe $\pm$, suivant que le nombre premier qui figure au dénominateur $\equiv 3$, ou $1 \pmod 4$), Les sommes s'expriment au moyen des logarithmes des nombres d'Euler et de Bernoulli.

Glaisher (J.-W.-L.). — Addition au Mémoire sur le calcul du logarithme hyperbolique de π. (384).

L'auteur rappelle qu'il avait déjà calculé ce logarithme avec 48 décimales (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XIV).

Tome XXVI; 1893.

Cayley. — Note sur l'équation aux dérivées partielles

$$Rr + Ss + Tt + U(s^2 - rt) - V = 0.$$

(1-5).

Lorsque l'un des deux systèmes de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables u et v, le premier membre de l'équation proposée est égal, à un facteur près, au déterminant fonctionnel $\frac{D(u, v)}{D(x, y)}$; on en déduit donc une intégrale première $u = f(v)$.

Richmond (Herbert-W.). — Les quartiques cuspidales. (5-26).

L'équation de toute quartique cuspidale peut s'écrire, avec un triangle de référence convenablement choisi,

$$\text{(E)} \qquad (y^2 + x^2 z)^2 = (y + ax)(y + bx)\ldots(y + fx),$$

où l'on a

$$a + b + c + d + e + f = 0;$$

les six droites $y + ax = 0$, $y + bx = 0$, ... sont les six tangentes menées à la quartique du point de rebroussement. Cette forme de l'équation (E) permet de déterminer très aisément les tangentes doubles et les coniques qui touchent la quartique en quatre points. La discussion du nombre des tangentes doubles réelles conduit l'auteur à distinguer les quartiques en quatre catégories. Les derniers paragraphes sont consacrés à l'étude directe de certaines propriétés des bitangentes, propriétés qui ont été établies déjà pour la quartique générale. Cet article constitue un excellent exercice de Géométrie analytique à deux dimensions.

Mathews (*G.-B.*). — Sur le développement des coordonnées d'un point d'une courbe gauche suivant les puissances de l'arc. (27-30).

Il s'agit du problème classique où l'on se donne la courbure et la torsion en fonction de l'arc. L'auteur établit des formules de récurrence commodes pour le calcul des coefficients successifs.

Dyson (*F.-W.*). — Note sur les sphériques harmoniques. (30-32).

Soit U_n un polynome homogène de degré n en x, y, z;

$$V = U_n - \frac{r^2}{2(2n-1)} \nabla^2 U_n + \frac{r^4}{2.4(2n-1)(2n-3)} \nabla^4 U_n - \ldots$$

est une solution de l'équation de Laplace.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les séries

$$\frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{13^2} + \ldots.$$

(33-47).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les séries

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \ldots.$$

(48-65).

L'auteur applique dans ces deux articles les mêmes procédés que dans un précédent travail (*Quarterly Journal*, t. XXV, p. 375-383).

Cayley. — Sur les semi-invariants. (66-69).

Un semi-invariant ne peut pas toujours s'obtenir par une simple dérivation au moyen d'une forme de même étendue et d'un degré inférieur d'une unité.

Edwardes (D.). — Mouvement stable d'un liquide visqueux, dans lequel un ellipsoïde est forcé de tourner autour de son axe principal. (70-78).

Askwith (E.-H.) — Sur les groupes de substitutions que l'on peut former avec neuf lettres. (79-128).

Énumération de tous ces groupes. On trouve trente-deux groupes transitifs.

Lachlau (R.). — Sur les systèmes *coaxal* de cercles. (129-144).

Forsyth (A.-R.) — Note sur une application conforme spéciale. (145-148).

Étude de la correspondance entre les points de deux plans, définie par la relation

$$\frac{z}{c} = \left(\frac{1+w}{1-w}\right)^{\frac{2h}{\pi i}}.$$

Taylor (H.-M.). — Coniques orthogonales. (148-155).

Recherche des coniques qui coupent orthogonalement une conique donnée aux quatre points de rencontre.

Bennet (G.-T.). — Note sur l'article précédent. (155-157).

Étude du même problème à un point de vue plus général, en rapportant les deux coniques orthogonales à leur triangle conjugué commun.

Edwardes (D.). — Mouvement produit dans un liquide visqueux par un cylindre animé d'un mouvement de rotation. (157-168).

Cayley. — Sur les réciproquants et les invariants différentiels. (169-194; 289-307).

Résumé des principaux résultats dus à Halphen et à Sylvester. M. Cayley fait remarquer que l'invariant différentiel connu sous le nom de *dérivée schwarzienne* s'était déjà présenté à Lagrange dans un Mémoire sur la construction des cartes géographiques (*Œuvres complètes*, t. IV, p. 651). La notion d'invariant différentiel se trouve expliquée très nettement dans un Mémoire d'Ampère (*Journal de l'École Polytechnique*, t. VII, p. 151-191).

Cayley. — Sur les invariants de Pfaff. (195-205).

Démonstration des propriétés d'invariance, dans les cas les plus simples, de $n = 2, 3, 4$.

Richmond (Herbert-W.). — Une construction pour le polygone régulier de dix-sept côtés. (206-207).

Soient OA, OB deux rayons rectangulaires d'un cercle; on prend sur OB un point I tel que $OI = \frac{OB}{4}$, puis sur OA un point E tel que $\widehat{OIE} = \frac{\widehat{OIA}}{4}$. Sur le prolongement de AO, on prend un point F tel que EIF = 45°. Le cercle décrit sur AF comme diamètre rencontre OB en un point K, et le cercle décrit de E comme centre avec EK pour rayon rencontre OA en deux points N_3 et N_5. Soient P_3 et P_5 les points qui se projettent en N_3 et N_5; les arcs AP_3 et AP_5 sont égaux respectivement aux $\frac{3}{17}$ et aux $\frac{5}{17}$ de la circonférence.

Dixon (A.-C.). — Sur l'équation générale des quadriques doublement tangentes à deux quadriques données. (207-211).

Si l'on rapporte les deux quadriques données à leur tétraèdre conjugué commun, les paramètres dont dépend la quadrique variable peuvent s'exprimer au moyen de fonctions elliptiques.

Dixon (A.-C.). — Extension d'un théorème de Géométrie plane. (212-214).

Si l'on mène à une conique deux séries de n tangentes, les $n(n-1)$ points communs à deux tangentes d'une même série sont sur une courbe de degré $n-1$, et ces $n(n-1)$ points, ainsi que les $2n$ points de contact, sont sur une courbe de degré n. Ce théorème se démontre aisément si l'on prend l'équation de la conique sous la forme $y^2 - xz = 0$, et si l'on prend pour coordonnées d'un point les paramètres des deux tangentes que l'on peut mener de ce point à la conique.

Taylor (H.-M.). — Quadriques orthogonales. (214-224).

Recherche des quadriques qui coupent orthogonalement la quadrique

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + d = 0,$$

en tous les points de la ligne d'intersection. Il y a un grand nombre de cas particuliers à considérer.

Artemas Martin. — Sur les puissances de nombres entiers dont la somme est égale à une même puissance d'un certain nombre. (225-227).

Exemples d'une méthode assez rapide pour obtenir des solutions en nombres entiers de l'équation

$$a^n + b^n + \ldots + e^n = h^n.$$

Les nombres h, a, n étant pris arbitrairement ($h > a$), on cherche le plus grand nombre b tel que $b^n \leqq h^n - a^n$, puis le plus grand nombre c tel que $c^n \leqq h^n - a^n - b^n$, etc.

Taylor (J.-H.). — Une preuve euclidienne de l'extension, due à M. Casey, du théorème de Ptolémée. (228-231).

D'après le théorème de Ptolémée, si un quadrilatère est inscrit dans une circonférence, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. Considérons quatre cercles tangents au cercle considéré aux quatre sommets du quadrilatère; si l'on remplace, dans la relation précédente, la distance de deux sommets du quadrilatère par la longueur de la tangente commune aux deux cercles correspondants, on a l'extension de M. Casey. La démonstration de M. Taylor, présentée à la manière des anciens, ne fait appel qu'aux éléments.

Fawcett (Miss). — Note sur le mouvement des solides dans un liquide. (231-257).

Percival-Frost. — Électrification des conducteurs. Emploi des coordonnées bipolaires et d'autres méthodes. (258-270).

Edwardes (*D.*). — Les tensions dans un solide élastique indéfini, avec une cavité ellipsoïdale, dues à certains déplacements superficiels. (270-278).

Cayley. — Note sur les fonctions lacunaires. (279-281).

Explication du sens précis que l'on doit attacher à ce mot de fonction *lacunaire*.

Cayley. — Note sur la théorie de l'orthomorphose. (282-288).

L'équation de toute courbe plane peut être mise sous la forme

$$\varphi(x+iy)+\varphi(x-iy)=0.$$

La solution de ce problème, dont les rapports avec le problème de Dirichlet sont évidents, est ramenée par M. Cayley à une certaine équation aux différences.

Maddisson (*Isabel*). — Sur certains facteurs dans les discriminants des équations en c et en p, et leur relation avec les points fixes de la famille de courbes. (307-321).

Soit $f(x,y,c)=0$ une famille de courbes algébriques dépendant d'un paramètre c; en égalant à zéro le discriminant de cette équation en c, on obtient une équation qui peut s'écrire sous forme abrégée $EN^2C^3=0$, où $E=0$, $N=0$, $C=0$ représentent respectivement l'enveloppe, le lieu des points doubles et le lieu des points de rebroussement. Si l'on forme l'équation différentielle

$$\Phi(x,y,p)=0$$

de la famille de courbes considérée, le discriminant de l'équation en p peut de même s'écrire ECT^2, $T=0$ étant l'équation du *tac-locus*, c'est-à-dire du lieu des points par lesquels passent deux courbes distinctes de la famille, tangentes l'une à l'autre. Lorsque les courbes passent par des points fixes, les discrimi-

nants peuvent contenir des facteurs linéaires représentant des droites joignant ces points fixes. Miss Maddisson montre par des exemples comment, dans certains cas, ces lignes droites doivent être considérées comme faisant partie de l'enveloppe, et, dans d'autres cas, du *tac-locus*.

Carey (*F.-S.*). — Notes sur la division du cercle. (320-371).

La plus grande partie de ce travail est consacrée à l'étude des périodes des racines de l'équation $\frac{x^p - 1}{x - 1} = 0$, p étant un nombre premier.

Cole (*F.-N.*). — Liste des groupes de substitutions de neuf lettres. (372-388).

ACTA MATHEMATICA.

Tome XV; 1891 (¹).

Mittag-Leffler (*G.*). — Sur la représentation analytique des intégrales et des invariants d'une équation différentielle linéaire et homogène. (1-33).

Une équation différentielle linéaire et homogène à coefficients uniformes étant donnée, quelle substitution subiront ses intégrales lorsque la variable décrira un contour fermé, situé à l'intérieur d'une couronne circulaire déterminée, laquelle est supposée ne comprendre aucun des points singuliers (quelconques d'ailleurs) de l'équation?

Pour résoudre ce problème, on cherche une transformation dans laquelle la valeur initiale soit représentée par o, la même valeur retrouvée après description du contour fermé correspondant à une autre valeur t_0 de la nouvelle variable, située dans le domaine de convergence des séries qui représentent les intégrales. Désignons alors par

$$y_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

(où n est l'ordre de l'équation) l'intégrale dans le développement de laquelle (suivant les puissances de la variable) un seul des n premiers coefficients est différent de zéro, le $k^{\text{ième}}$, ce coefficient étant égal à $k!$ et soit y'_k l'intégrale qui jouit des mêmes propriétés pour la valeur finale; on aura évidemment

$$(1) \qquad y_k = \Sigma C_{ki} y'_i,$$

où C_{ki} est la valeur de la dérivée $i^{\text{ème}}$ de y_k lorsque la variable prend cette valeur finale. Les équations (1) définissent la substitution cherchée S, sauf à tenir compte, ce qui est facile, du changement de variable qui a été opéré.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIX_1, p. 15.

Première transformation (comprenant comme cas particulier celle de M. Poincaré). — x_0 étant la valeur initiale de la variable donnée, on fera

$$t = \frac{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} - 1}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\pi i}{2h}} + 1}.$$

h étant choisi suffisamment petit, les séries intégrales seront convergentes pour $t < 1$, et la valeur x_0 retrouvée correspondra à la valeur

$$t = t_0 = \frac{e^{-\frac{\pi^2}{h}} - 1}{e^{-\frac{\pi^2}{h}} + 1}.$$

Bien entendu, les invariants de la substitution S, c'est-à-dire les coefficients de l'équation en s correspondante, sont indépendants de x_0. Comme on peut développer les quantités qui y figurent suivant les puissances de x_0, les expressions des invariants qu'on en déduit se réduiront à leurs premiers termes.

Seconde transformation (méthode de M. Hamburger). — Posant

$$x = x_0 e^{\tau},$$

la valeur finale correspondra à $\tau = 2i\pi$.

Mais, dans cette méthode de M. Hamburger, la valeur $2i\pi$ peut ne pas être comprise dans le cercle de convergence des séries intégrales. M. Mittag-Leffler tourne la difficulté en divisant le cercle de rayon $|x_0|$ en l parties égales et calculant successivement les l substitutions (1) correspondant aux passages de la valeur $\tau = 0$ à la valeur $\tau = \frac{2i\pi}{l}$; de celle-ci à $\tau = \frac{4i\pi}{l}$, et ainsi de suite. La composition de ces substitutions fournit évidemment le résultat cherché.

Le Mémoire se termine par l'étude, faite d'après les mêmes principes, du cas où plusieurs points singuliers sont en ligne droite.

Cassel (*G.*). — Sur un problème de représentation conforme. (33-45).

Considérons un domaine U limité d'une part par des segments de l'axe réel, d'autre part par des cercles, en nombre infini, ayant leurs centres sur cet axe, sans points communs et ne s'éloignant pas indéfiniment. On peut trouver une représentation conforme d'un pareil domaine sur un demi-plan.

A cet effet, soit $A_\mu(u)$ la substitution linéaire résultant de deux inversions successives, l'une par rapport au $\mu^{\text{ième}}$ cercle, l'autre par rapport à l'axe réel. En combinant de toutes les façons possibles les substitutions A_μ on obtient un groupe. Les différents domaines transformés de U par les substitutions de ce groupe n'ont aucune partie commune. On en déduit que les diamètres des cercles transformés des cercles donnés par les mêmes substitutions forment une série absolument convergente. Il en est par suite de même du produit $\prod \frac{u-a}{u-b}$, où u est la variable, a et b désignant successivement les trans-

formés, par les différentes substitutions du groupe, des points d'intersection d'un cercle donné appartenant à la série avec l'axe réel. Le carré de ce produit réalise la représentation conforme cherchée. Il reste inaltéré par les substitutions du groupe et présente plusieurs autres propriétés analytiques intéressantes.

Kowalewski (*Mme S.*). — Sur un théorème de M. Bruns. (45-53).

Ce théorème est le suivant :

« Une surface fermée S étant donnée, il existe une fonction u satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \Delta u = 4k\pi,$$

s'annulant ainsi que ses dérivées premières en tout point de S et développable en série de Taylor autour d'un point régulier quelconque de cette surface. »

Pour le démontrer, considérons les points de l'espace comme définis par leur distance normale s à la surface et les coordonnées curvilignes u, v du pied de cette normale. La surface donnée correspond à $s = 0$.

D'ailleurs l'équation (1), écrite dans ce nouveau système de coordonnées, est de la forme

$$\Omega \frac{\partial^2 U}{ds^2} + \Phi = 0$$

$\left(\text{où } \Phi \text{ ne contient plus } \frac{\partial^2 U}{ds^2}\right)$ et a d'ailleurs ses coefficients développables autour de chaque point de S. D'après le théorème fondamental de Mme Kowalewski, il existe donc une intégrale U développable dans les mêmes conditions et s'annulant pour $s = 0$, si Ω n'est ni nul ni infini. Or on trouve

$$\Omega = \sqrt{EG - F^2}\left(1 - \frac{s}{\rho_1}\right)\left(1 - \frac{s}{\rho_2}\right),$$

E, F, G étant les coefficients de Gauss, ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux.

Koch (*H. von*). — Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires. (53-65).

L'emploi des déterminants infinis permet d'étendre la théorie de M. Fuchs au cas où les intégrales ne sont pas régulières.

Il faut alors considérer une intégrale de la forme $y = \sum_\lambda g_\lambda x^{\rho+\lambda}$, où λ est un entier variant de $-\infty$ à $+\infty$. En écrivant que cette expression satisfait à l'équation linéaire donnée, dont l'ordre est n, on a les équations en nombre infini

$$(1) \qquad g_m + \sum_\lambda{}' \psi_{m\lambda}(\rho) g_\lambda = 0 \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty;\ \lambda \neq m).$$

Les $\psi_{m\lambda}$ ont pour dénominateur $\varphi(\rho + m)$, où φ est un certain polynôme de degré n.

Le déterminant infini des équations (1) est convergent pour toutes les valeurs

de ρ qui ne sont racines d'aucune des équations

$$(2)\qquad \varphi(\rho+m)=0 \qquad (m=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots,\ \pm\infty).$$

Il définit une certaine fonction Ω de ρ, fonction périodique et ne présentant que des discontinuités polaires correspondant aux racines des équations (2), laquelle est par conséquent de forme trigonométrique.

En supposant que l'équation $\varphi(\rho)=0$ ait toutes ses racines inégales et même incongruentes (ne différant pas par des nombres entiers); que les résidus correspondants de $\Omega(\rho)$ soient tous différents de o; enfin, que cette fonction $\Omega(\rho)$ ait n zéros incongruents, on obtient le développement en série de toutes les solutions, chacun des zéros de $\Omega(\rho)$ correspondant à une intégrale de la forme donnée ci-dessus.

Gyldèn (H.). — Nouvelles recherches sur les séries employées dans les théories des planètes. (65-190).

M. Gyldèn a étudié dans un précédent Mémoire une équation différentielle du second ordre qui se présente fréquemment en Mécanique céleste. Cette équation devient linéaire par la suppression d'un terme du troisième degré en la fonction inconnue. Mais cette suppression n'est pas toujours légitime, même comme première approximation.

L'équation peut être prise sous la forme

$$(1)\qquad \frac{d^2\rho}{dv^2}+(1-\beta_1)\rho-\beta_2\rho^3=-\sum_i \gamma_i\cos[(1-\sigma_i)v-B_i]$$

où les quantités β_i, σ_i, ... sont très petites de l'ordre des forces perturbatrices. En négligeant le terme en ρ^3, on serait conduit à écrire l'intégrale

$$(2)\qquad \rho=\varkappa\cos[(1-\varsigma)v-\Gamma]+\sum_i\frac{\gamma_i}{\beta_1-2\sigma_i+\sigma_i^2}\cos[(1-\sigma_i)v-B_i],$$

(en désignant par ς une constante convenablement choisie et par $\varkappa$, Γ des constantes arbitraires). Or, si une ou plusieurs des quantités $\beta_1-2\sigma_i+\sigma_i^2$ deviennent très petites d'un ordre supérieur aux quantités primitives, l'expression de ρ se présente sous forme infinie, ce qui montre que la suppression opérée n'était pas justifiée.

1. Pour tenir compte du terme en ρ^3, réduisant, pour simplifier, le second membre de l'équation (1) à un seul terme, on posera

$$\rho=\rho_0+R,$$

avec

$$\rho_0=\varkappa\cos f+\varkappa_1\cos f_1,$$
$$f=(1-s)v-\Gamma,$$
$$f_1=(1-\sigma)v-B,$$

R étant la nouvelle fonction inconnue. La fonction ρ_0 dépendra des indéterminées $\varkappa_1$, ς et l'on cherchera à calculer ces paramètres de manière que l'équation en R ne contienne pas de terme en $\cos f$ ni en $\cos f_1$. On trouve pour $\varkappa_1$

une équation du troisième degré qui permettra de l'exprimer en fonction des β, γ, σ, ... Les formules ainsi obtenues montrent en particulier que pour $\beta_1 - 2\sigma + \sigma^2 = 0$, le paramètre x_1 prend une valeur bien déterminée, au lieu que si l'on n'envisageait pas le terme en x_1^2, on verrait intervenir un terme non périodique, d'où résulterait l'instabilité du système.

Pour obtenir le développement de ρ, l'auteur se sert du principe suivant : Soit $F = 0$ une équation différentielle déterminant la fonction inconnue x. En posant $x = y + z$, on est libre de décomposer *arbitrairement* le premier membre de l'équation transformée en deux parties qu'on égalera séparément à zéro. On pourra alors, en simplifiant le plus possible la première équation, en tirer y, après quoi l'on cherchera à obtenir z par la seconde équation, et c'est une nouvelle décomposition de l'équation primitive en deux parties qui fournira la seconde approximation.

On obtient ainsi un développement en série que l'on simplifie par un changement convenable de variable et de fonction, où la nouvelle variable u passe par les valeurs 0, 2π, 4π, ... en même temps que l'ancienne.

2. Les équations qui figurent dans la partie précédente peuvent s'intégrer à l'aide des fonctions elliptiques. On est conduit en effet à mettre l'inconnue sous la forme $G \cos f_1 + H \sin f_1$ et à introduire la quantité $G^2 + H^2 = \eta_1^2$. Or on trouve qu'une variable z, liée linéairement à η_1^2, peut être considérée, en première approximation, comme dépendant elliptiquement du temps. Si ensuite on veut apporter à cette valeur de z la correction nécessaire, on est conduit à une équation linéaire qui s'intègre encore par les fonctions elliptiques, en partant de la remarque suivante : Soit

$$(3) \qquad Y = f(x, a, b)$$

l'intégrale supposée connue de l'équation

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(y),$$

on aura

$$(5) \qquad \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial a}\right) = \varphi'(Y)\frac{\partial Y}{\partial a},$$

et si, dans le facteur $\varphi'(Y)$, on remplace Y par son expression connue (3), l'équation (5) deviendra une équation linéaire en $\frac{\partial Y}{\partial a}$. Or l'équation qui se présente dans la question actuelle est précisément de cette dernière forme (5), et on a ainsi une intégrale. L'autre intégrale en résulte d'après les méthodes ordinaires.

Les solutions asymptotiques, c'est-à-dire celles où certains arguments tendent vers des limites déterminées, au lieu de varier périodiquement, se distinguent par ce fait que les fonctions elliptiques sont remplacées par des exponentielles. Mais ces exponentielles peuvent ne figurer qu'en apparence et être introduites par la méthode d'intégration, laquelle, dans ce cas, ne doit plus être appliquée sous cette forme. On constate en effet que les approximations cessent de converger.

3. Les fonctions elliptiques peuvent aussi être introduites à l'aide d'un argu-

ment θ dont la dérivée est liée à z. Par la relation $\sin\theta = l \sin\varphi$ on substitue un nouvel argument φ qui est une fonction elliptique de v.

4. Reprenant l'équation donnée et y remplaçant ρ par $\rho_0 + R$, on peut déterminer ρ_0 par l'équation (1) privée de second membre

$$\frac{d^2\rho}{dv^2} + (1 - \beta_1)\rho - \beta_2\rho^2 = 0.$$

Celle-ci est manifestement une équation elliptique. Si alors on passe à la seconde équation, l'équation en R, on peut, en première approximation, considérer son second membre comme connu, moyennant quoi on a à intégrer une équation de Lamé. De la forme des expressions obtenues on déduit la convergence des séries qui ont ces expressions pour termes et qui entrent dans l'intégrale de l'équation complète. Si dans la série des approximations successives, on trouve des termes non trigonométriques, on les détruira comme il est indiqué dans le Mémoire précédent, *Die intermediäre Bahn des Mondes* (*Acta Mathematica*, t. VII).

Catalan (E.). — Sur la courbure des surfaces. (191-193).

La définition de la courbure proposée par M. Casorati (*Acta Mathematica*, t. XIV) présente cet inconvénient de conduire à la même expression pour une surface à courbures opposées que pour une surface à courbures de même sens. M. Catalan en propose une autre, fondée sur la considération de l'aire de la portion de surface interceptée par un plan parallèle au plan tangent.

Petersen (J.). — Théorie des graphes réguliers. (193-220).

La théorie des invariants conduit (*voir* Hilbert, *Math. Ann.*, t. XXXIII) à considérer les produits de la forme

$$(1)\qquad (x_1 - x_2)^\alpha (x_1 - x_3)^\beta \ldots (x_{n-1} - x_n)^\lambda,$$

qui sont du même degré par rapport à chacune des variables x_i. A tout pareil produit on peut faire correspondre un tracé ou *graphe* dans lequel les x sont représentés par autant de points, les facteurs binômes du produit (1) par des lignes joignant ces points et comptées avec un degré de multiplicité égal à l'exposant correspondant. Ce graphe devra par conséquent être *régulier*, c'est-à-dire qu'en chaque point aboutiront le même nombre de lignes. Le nombre des points est dit l'*ordre* du graphe (en théorie des invariants c'est l'ordre de la forme donnée); le nombre constant des lignes aboutissant en chaque point en est le *degré* [correspondant au degré de l'invariant (1)].

Le produit (1) sera décomposable en facteurs de même forme si le graphe peut être considéré comme résultant de la superposition de deux graphes partiels (également nommés *facteurs*) de même ordre, mais de degré moindre. Le problème important est la recherche des graphes *primitifs*, c'est-à-dire non décomposables en facteurs.

1. *Tout graphe de degré pair est décomposable en facteurs du second degré.*

On démontre d'abord la proposition pour le degré 4, en remarquant que le

graphe peut être décrit d'un seul trait continu et prenant l'ensemble des lignes de rang pair, puis l'ensemble des lignes de rang impair. Puis on passe au cas général par les deux propositions : 1° En remplaçant les lignes *ab*, *cd* d'un graphe par les deux *ac*, *bd*, le nouveau graphe est décomposable en facteur du second degré si l'ancien l'est; 2° tous les graphes du même ordre et du même degré se déduisent les uns des autres par l'opération précédente.

2. Au contraire il existe des graphes primitifs de degré impair aussi élevé qu'on veut si l'ordre est pris suffisamment grand. Mais si l'ordre (qui est nécessairement pair) est limité et donné, par exemple, égal à $2n$, *le degré d'un graphe primitif ne peut être supérieur à* $\frac{2n}{3}+1$. Ceci se voit en prenant dans le graphe un nombre α, aussi grand que possible, de lignes n'ayant aucune extrémité commune. On reconnaît alors : 1° que $\alpha \geqq \frac{2n}{3}$; 2° que si $\alpha = n - \lambda$, le graphe consiste en un facteur de degré $2\lambda+1$ au plus et en facteurs du second degré : d'où le résultat en question.

Il est probable que les graphes primitifs de degré impair doivent tous renfermer des *feuilles*, c'est-à-dire des parties ne communiquant avec le reste que par une seule ligne. La proposition est démontrée seulement pour les graphes de degré 3, à l'aide des chaînes, c'est-à-dire de chemins prolongés aussi longtemps qu'on n'est pas arrêté par le manque de lignes disponibles. Ces chaînes sont en nombre égal à la moitié de l'ordre. Elles ne peuvent être toutes composées d'un nombre pair de lignes si le graphe est primitif. Les mêmes considérations permettent de construire directement tous les graphes primitifs du troisième degré.

***Runge* (*C.*). — Sur le calcul numérique de l'argument des fonctions cycliques, hyperboliques et elliptiques. (221-248).**

$$(1) \qquad f(u) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots$$

étant une fonction quelconque développable en série, si l'on sait calculer $f\left(\frac{u}{2}\right)$ en fonction de $f(u)$, on pourra, en répétant ce calcul, trouver la valeur de u qui correspond à une valeur donnée de f. Si, par exemple, a_1 est supposé différent de o, u sera manifestement la limite de $\frac{2^n}{a_1}\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right)-a_0\right]$, puisque l'on a

$$(2) \qquad 2^n\left[f\left(\frac{u}{2^n}\right)-a_0\right] = a_1 u + a_2\frac{u^2}{2^n} + \dots.$$

C'est au fond la méthode d'Archimède pour le calcul de π.

M. Runge modifie ce calcul de manière à obtenir une approximation bien plus rapide. Il suffit, pour cela, de combiner linéairement les équations obtenues en remplaçant successivement n par o, 1, 2, ..., n dans la formule (2), de manière à faire disparaître les termes en u^2, ..., u^{n+1}. Les multiplicateurs sont les coefficients du polynome

$$\varphi(x) = \frac{(x-2^2)}{1-2}\,\frac{(x-2^3)}{1-2^2}\cdots\frac{x-2^{n+1}}{1-2^n},$$

et l'on voit que l'erreur commise n'est plus de l'ordre de $\frac{1}{2^n}$, mais de l'ordre de $\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$, et cela dans l'hypothèse la plus défavorable, celle où la convergence de la série (1) est très lente. Bien entendu, si certains coefficients a sont nuls, on n'a pas besoin d'annuler les termes correspondants de la combinaison linéaire, et on peut en profiter pour annuler des termes plus éloignés encore et serrer davantage l'approximation, en changeant l'expression du polynôme $\varphi(x)$. C'est ce qui arrive, en particulier, pour les fonctions paires ou impaires.

L'auteur applique cette méthode au calcul :

1° D'un arc sinus. En particulier, la longueur approchée d'un arc AB du premier quadrant et dont le sinus est représenté par la longueur AC est $AB + \frac{1}{3}(AB - AC)$. Pour le calcul de π, Archimède, par le moyen du polygone de 96 côtés, n'était arrivé qu'à la quatrième décimale. La méthode actuelle permet, sans employer les polygones suivants, d'arriver à la seizième;

2° D'une fonction hyperbolique inverse;

3° D'une intégrale elliptique de première espèce. On a une difficulté à vaincre, qui est le calcul d'une limite supérieure du coefficient de $\frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ dans l'erreur commise.

M. Runge donne une table des coefficients de $\varphi(x)$ pour les premières valeurs de n. En général, le calcul de $\varphi(x)$ dépend de l'expression

$$(1+az)(1+a^2z)\dots(1+a^nz),$$

ce qui permet de donner une formule générale pour les coefficients demandés.

Knoblauch (*J.*). — Sur la signification géométrique des équations fondamentales de la théorie des surfaces. (249-258).

Les relations différentielles du troisième ordre relatives à une surface et indépendantes des coordonnées peuvent s'écrire à l'aide des quantités suivantes : 1° les rayons de courbure principaux ρ_1, ρ_2, ou, ce qui revient au même, les courbures principales r_1, r_2; 2° les courbures principales de la première nappe de la développée, introduites par leur somme H_1 et leur produit K_1; 3° les mêmes quantités relatives à la seconde nappe; 4° les courbures géodésiques g_1, g_2 des lignes de courbure. Les deux dernières formules de M. Codazzi s'écrivent ainsi

$$r_1^2 g_2[r_1 g_2 - H_1(r_1 - r_2)] + K_1(r_1 - r_2)^2(r_1^2 + g_1^2) = 0,$$
$$r_2^2 g_1[r_2 g_1 - H_2(r_2 - r_1)] + K_2(r_1 - r_2)^2(r_2^2 + g_2^2) = 0,$$

et permettent de chasser H_1, H_2 des expressions obtenues.

Pour les équations du quatrième ordre, il faut introduire les dérivées g_{ik} (où $i, k = 1, 2$) de la courbure géodésique g_i par rapport à l'arc de ligne de courbure d'indice k.

Par exemple, l'équation qui caractérise les surfaces à représentation sphérique isotherme est

$$\frac{g_1 g_2 r_1 r_2}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_1}{K_1} + \frac{r_2}{K_2}\right) - \frac{r_2}{r_1} g_{11} + \frac{r_1}{r_2} g_{22} = 0,$$

une équation linéaire du second ordre privée de second terme. Cette équation reprendra la même forme lorsqu'on remplacera z par $\varphi(z)$ et u par $u\sqrt{\varphi(z)}$, si l'on a

$$(6) \qquad f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2}f(z) + \frac{2\varphi'\varphi''' - 3\varphi''^2}{4\varphi'^4}.$$

Or, cette équation, en y considérant φ comme donné et f comme inconnue, est de la forme (2) et l'on peut en former la solution $f_1(z)$. L'équation (5) correspondante admettra deux solutions holomorphes que le changement de variable considéré conservera à un facteur constant près, d'où l'on déduit aisément que ces solutions seront de la forme $\frac{[B(z)]^n}{\sqrt{B'(z)}}$.

En reportant dans l'équation (5), on voit : 1° que n a les valeurs 0, 1; 2° que $f_1(z) = \frac{3B''^2}{4B'^2} - \frac{1}{2}\frac{B'''}{B'}$, ce qui se vérifie directement.

Mais la fonction $f_1(z)$ n'est pas la seule qui satisfasse à l'équation fonctionnelle, car la condition (4) est vérifiée avec $n = 2$. L'équation (6) admet, par suite, la solution générale

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^2$$

(α, constante arbitraire). L'équation linéaire correspondant à cette nouvelle valeur de $f(z)$ admet la solution $\frac{[B(z)]^r}{\sqrt{B'(z)}}$, où r est une quelconque des racines de l'équation fondamentale $r(r-1) = \alpha$.

Ces résultats peuvent s'énoncer ainsi : *L'équation* (5) *est susceptible d'être transformée, par un changement de variable et de fonction, en une équation à coefficients constants.* Ceci pouvait se prévoir *a priori* en remarquant que notre équation peut se former quand l'on donne la seule fonction $B(x)$, à chaque valeur de laquelle correspondent (comme l'a montré M. Kœnigs) une infinité de fonctions $\varphi(z)$. Notre équation (5) admet donc, non pas une, mais un nombre infini de transformations en elle-même; et c'est à cela que tient, au fond, son équivalence avec une équation à coefficients constants.

Cette conclusion s'étend aux équations du troisième ordre : toute équation du troisième ordre qui jouit de la propriété indiquée devient, par la transformation

$$u = \frac{v}{B(z)}, \qquad B(z) = e^t,$$

une équation à coefficients constants. L'hypothèse $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ conduit à l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dz^2} - \beta\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x'}\right]^2 u = 0,$$

déjà traitée par Halphen.

Pour arriver au même but relativement aux équations d'ordre supérieur, il suffit d'appliquer la théorie des invariants différentiels d'Halphen. Chaque invariant devra, par le changement de z en $\varphi(z)$, se retrouver multiplié par une

puissance de $\varphi'(z)$. Il est donc égal à une puissance de $\frac{B'}{B}$ marquée par son poids. On voit alors que la forme canonique d'Halphen est à coefficients constants.

La méthode précédente peut s'appliquer à certaines catégories d'équations non linéaires.

Mellin (Hj.). — Pour la théorie des équations différentielles linéaires du premier ordre. (317-384).

Ce Mémoire est le complément de deux travaux précédents du même auteur, l'un intitulé *Zur Theorie der Gammafunction* (même recueil, t. VIII), où la fonction

$$(1) \qquad F(z) = a_z \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z'_1)\ldots\Gamma(z-z'_n)} \qquad (a>0)$$

est décomposée en une fonction entière et une somme de fractions simples qui satisfont chacune à une équation fonctionnelle déterminée, généralisant ainsi le résultat connu relatif à la fonction Γ; l'autre, *Ueber einen Zusammenhang zwischen gewissen linearen Differential und Differenzengleichungen* (même Recueil, t. IX), où est montrée l'importance que présente la fonction Γ pour l'étude des équations différentielles de la forme

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &(a_m - b_m x)x^m \frac{d^m y}{dx^m} + (a_{m-1} - b_{m-1}x)x^{m-1}\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \ldots \\ &\qquad + (a_1 - b_1 x)x\frac{dy}{dx} + (a_0 - b_0 x)y = 0, \end{aligned} \right.$$

et dont l'équation hypergéométrique n'est qu'un cas particulier.

1. Lorsque, la partie réelle de z restant finie, la partie imaginaire croît indéfiniment dans un sens ou dans l'autre, la fonction (1) est comparable au produit d'une puissance de z par une puissance de $\Gamma(z)$. Ce résultat subsiste lorsque la fonction $F(z)$ est multipliée par un produit de facteurs trigonométriques de la forme $\sin\pi(z-c)$.

D'ailleurs, il est clair que le produit ainsi obtenu satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad F(z+1) = r(z)\,F(z),$$

où $r(z)$ est la fraction rationnelle

$$(4) \qquad a\frac{(z-z_1)\ldots(z-z_m)}{(z-z'_1)\ldots(z-z'_n)}.$$

2. Inversement, toute solution de l'équation fonctionnelle (3) est égale au produit de $F(z)$ par une fonction périodique.

Imposons en outre à notre solution la condition de se comporter régulièrement dans une certaine bande verticale et de ne pas croître indéfiniment (lorsque z s'éloigne indéfiniment dans cette bande) plus vite qu'une puissance de z. Il y a impossibilité à cela si $m < n$, et aussi, lorsque $m = n$, à moins que a ne soit réel et positif, auquel cas la solution est $F(z)$.

Dans le cas de $m > n$, la solution générale est donnée par

$$(5)\quad \begin{cases} \Phi(z) = F(z)\sin\pi(z-c_1)\ldots\sin\pi(z-c_p) \\ \times\left[\dfrac{A_1}{\sin\pi(z-c_1)}+\ldots+\dfrac{A_p}{\sin\pi(z-c_p)}\right], \end{cases}$$

où p est le plus grand nombre impair contenu dans $\dfrac{m-n}{2}+1$.

3. Envisageons maintenant l'équation non homogène

$$(6)\qquad F(z+1) = r(z)F(z) - S(z),$$

où $s(z)$ est une autre fonction rationnelle de même dénominateur que $r(z)$, avec un numérateur de degré moindre. Il suffit évidemment d'en trouver une solution particulière, si l'on sait intégrer l'équation (4).

Or, cette solution est fournie par l'une ou l'autre des séries

$$S(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{s(z+\nu)}{r(z)\,r(z+1)\ldots r(z+\nu)},$$

$$S_1(z) = -s(z-1) - \sum_{\nu=1}^{\infty} s(z-\nu-1)\,r(z-1)\,r(z-2)\ldots r(z-\nu),$$

dont la première est convergente si $\lim\limits_{z=\infty} r(z) > 1$, la seconde si $\lim\limits_{z=\infty} r(z) < 1$.

Les deux séries convergent si $\lim\limits_{z=\infty} r(z) = 1$, avec

$$x = z'_1 + z'_2\ldots + z'_n - z_1 - z_2\ldots - z_m > -1,$$

moyennant, du moins, l'hypothèse, vérifiée dans les applications, que $s(z)$ soit au plus de degré $m-2$.

Reste le cas de $\lim\limits_{z=\infty} r(z) = 1$, $x < -1$. Mais dans le cas plus général $\lim\limits_{z=\infty} r(z) \gtreqless 1$, $x < 0$, il existe une solution de la forme $\sum\limits_{\alpha} S(z, \alpha)$, où

$$S(z,\alpha) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left[\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-\alpha+\nu)^\mu}+\ldots+\frac{A_1^\nu}{(z-\alpha+\nu)}+g_\nu(z)\right],$$

α représentant successivement toutes les racines du numérateur de $r(z)$; le nombre μ étant l'ordre de multiplicité de la racine α, les A des constantes convenablement choisies et les g des polynomes entiers en z. Le cas de $\lim\limits_{z=\infty} r(z) = 1$ se distingue du cas de $\lim\limits_{z=\infty} r(z) > 1$ par le fait que l'on peut trouver une solution de ce type pour l'équation homogène correspondant à $s(z) = 0$, ce qui est impossible si $\lim\limits_{z=\infty} r(z) > 1$.

Les solutions ainsi trouvées satisfont d'ailleurs à des conditions de régularité analogues à celles que nous avons indiquées plus haut.

4. Soit maintenant l'équation différentielle (2) où a_m est essentiellement

supposé $\neq 0$. Si b_m est également différent de o, le changement de x en $\frac{1}{x}$ remplace l'équation par une autre de même forme. Les points singuliers sont o, ∞ et $a = \frac{a_m}{b_m}$, quantité que l'on peut supposer réelle et positive, moyennant multiplication de la variable indépendante par une constante convenable. Les intégrales sont régulières autour de chaque point singulier. On forme facilement les équations fondamentales déterminantes $r_0(-\rho)=0$ au point o et $r_1(\rho-1)=0$ au point ∞. Quant à celle du point a, elle est simplement

$$(7) \qquad \rho(\rho-1)\ldots(\rho-m+2)(\rho+\varkappa+1)=0,$$

avec

$$\varkappa = \frac{b_{m-1}}{b_m} - \frac{a_{m-1}}{a_m} - m = z'_1 + z'_2 + \ldots + z'_m - z_1 - z_2 - \ldots - z_m,$$

$z_1, z_2, \ldots, z_m$ étant les racines de $r_0(z)$ et $z'_1, \ldots, z'_m$ celles de $r_1(z)$.

Cela posé, l'intégrale

$$(8) \qquad \int_0^x y x^z \, dx,$$

où x est réel, satisfait, en vertu de l'équation différentielle donnée, à la relation

$$(9) \qquad r_1(z)\int_0^x y x^z \, dx = r_0(z)\int_0^x y x^{z-1} \, dx - x^{z-1} s_0(z, x),$$

où s_0 est un polynome entier en z, x, y et les dérivées de y jusqu'à l'ordre $m-1$.

Prenons pour y la solution η qui, au point a, correspond à la dernière racine $-\varkappa-1$ de l'équation (7), en supposant que $\varkappa$ ait sa partie réelle négative [condition nécessaire pour que l'intégrale (8) soit finie] et soit différent des nombres $-1, -2, \ldots, -m+1$ (pour que la racine $-\varkappa-1$ de l'équation déterminante soit simple). *La quantité* $s_0(z, a)$ *est nulle, quel que soit* z.

Ceci se voit directement si la partie réelle de $\varkappa$ est au plus égale à $-m$. Dans le cas contraire, on reconnaît que, si l'on développe l'expression $s_0(z, x)$ suivant les puissances croissantes de $a-x$, l'exposant du terme le moins élevé ne peut être zéro, à cause des hypothèses faites sur x. La quantité $s_0(z, a)$, étant forcément finie à cause de l'équation (9), est donc nulle. L'intégrale (8), pour $x = a$, considérée comme fonction de z, satisfait, par suite, à une équation fonctionnelle du type étudié au n° 2, et l'on peut lui appliquer les conclusions établies en cet endroit, de sorte que

$$\int_0^a \eta x^{z-1} \, dx = C a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\ldots\Gamma(z-z_m)}{\Gamma(z-z'_1)\ldots\Gamma(z-z'_m)}.$$

Supposons, au contraire, $b_m = 0$. L'équation n'admet plus que deux points singuliers, $x = 0$ et $x = \infty$; mais ce dernier est singularité essentielle. On peut néanmoins former le polynôme $r_1(z)$, dont le degré n est alors moindre que m. $\Phi(z)$ étant l'expression (5) formée à l'aide de la fonction rationnelle $\frac{r_0(z)}{r_1(z)}$,

l'intégrale

(10) $$\varphi(x) = \int x^{-z} \Phi(z)\, dz,$$

prise le long d'une droite verticale indéfinie, a un sens si cette droite est suffisamment éloignée dans le sens positif, et ne dépend pas de la position de cette verticale. $\varphi(x)$ *est une solution de l'équation* (2) et n'est d'ailleurs pas identiquement nulle [du moins, tant que $\Phi(z)$ ne l'est pas elle-même], ainsi qu'on s'en assure en développant $\varphi(x)$ en série. D'ailleurs, l'intégrale $\int_0^\infty \varphi(x) x^{z-1} dx$ est elle-même une expression $\Phi(z)$.

Inversement, toute solution de l'équation (2) satisfaisant à la condition $\lim_{x=\infty} x^k y = 0$, quel que soit k, est telle que l'intégrale $\int_0^\infty y x^{z-1}\, dx$ soit une expression $\Phi(z)$. On en conclut que les p solutions indépendantes de l'équation fournies par la méthode précédente sont les seules qui satisfassent à ladite condition.

THE MESSENGER OF MATHEMATICS, edited by J.-W.-L. GLAISHER. London and Cambridge, Macmillan and C° [1].

Tome XX; 1890-1891.

Mannheim. — Sur les normales aux coniques. (1-2).

M. Mannheim remarque que toute conique et sa polaire réciproque par rapport à une circonférence de centre O ont les mêmes normales issues de O. De ce théorème, qui est presque évident, l'auteur déduit un certain nombre de conséquences intéressantes. Par exemple, Laguerre avait établi qu'il y a seulement quatre coniques normales à quatre droites concourantes Oa, Ob, Oc, Od. quand on se donne le point m où la conique est normale à l'une de ces droites. M. Mannheim complète la proposition en montrant que deux de ces courbes sont homothétiques, par rapport à O, à deux courbes polaires réciproques par rapport à une circonférence de centre O, et les deux autres sont inversement homothétiques à celles-ci par rapport à O.

Hammond (J.). — Euclide et la loi associative. (3-4).

Euclide a-t-il considéré la loi associative pour la multiplication de trois nombres a, b, c comme un théorème susceptible d'être démontré? M. Hammond regarde les propositions 17, 18 et 19 du 7e livre des Éléments comme une véritable démonstration de cette loi.

Greenhill (A.-G.). — Sur les lignes de Sumner dans les Cartes de Mercator et les Cartes stéréographiques. (4-21).

---

(1) Voir *Bulletin*, XVIII$_1$, p. 53.

On appelle ainsi les lignes de la Carte qui sont les lieux des points pour lesquels le Soleil est, à un certain instant, à la même hauteur, c'est-à-dire les images des cercles de la sphère terrestre. M. Greenhill étudie la forme de ces courbes sur la Carte de Mercator.

Karl Pearson. — Sur les expériences de Wöhler sur les forces alternées. (21-37).

Allan Cunningham. — Sur la recherche des facteurs. (37-45).

La recherche directe des diviseurs d'un nombre entier est une opération très longue, dès que ce nombre est un peu grand. On a cherché à abréger l'opération par l'usage des Tables de carrés, dont l'emploi est basé sur l'identité

$$N = XY = (A+B)(A-B) = A^2 - B^2,$$

où $X = A + B$, $Y = A - B$. L'auteur montre comment on peut encore diminuer les essais, en cherchant *a priori*, d'après le nombre des chiffres de N, les nombres de chiffres possibles pour A^2 et B^2.

Mannheim. — Sur une parabole liée à une conique par certaines propriétés remarquables. (45-48).

Étude des propriétés de la parabole qui est l'enveloppe des droites menées par chacun des points M d'une droite fixe D perpendiculairement à la polaire du point M par rapport à une conique.

Burnside (W.). — Sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. (49-54).

Exposition d'une méthode facile pour retrouver l'équation de ces surfaces, basée sur la représentation sphérique et l'emploi des variables symétriques de Bonnet.

Segar (Hugh W.). — Quelques inégalités. (54-59).

Généralisation des résultats contenus dans le Tome XIX du *Journal*.

Cayley. — Note sur l'équation modulaire de Schläfli pour la transformation du troisième ordre. (59-60).

M. Cayley montre comment on peut déduire l'équation de Schläfli de l'équation modulaire ordinaire.

Burnside (W.). — Sur l'équation différentielle des sphéro-coniques confocales. (60-63).

Considérons l'intersection d'une sphère de rayon un avec des quadriques homofocales concentriques à la sphère; si l'on pose $\alpha = \tang\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}$, $\beta = \tang\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}$, θ

et φ désignant la colatitude et la longitude, l'équation différentielle des courbes précédentes est précisément l'équation d'Euler

$$\frac{d\alpha'^2}{(1-\alpha'^2)(1-k^2\alpha'^2)} = \frac{d\beta'^2}{(1-\beta'^2(1-k^2\beta'^2)}, \quad \alpha = \alpha'\sqrt{k}, \quad \beta = \beta'\sqrt{k}.$$

Cayley. — Note sur les racines neuvièmes de l'unité. (63).

Soient a, b, c les trois racines de l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$; on a

$$a^2b + b^2c + c^2a = 6, \quad ab^2 + bc^2 + ca^2 = -2, \quad (a-b)(b-c)(c-a) = -9.$$

Toute fonction rationnelle de a, b, c qui est invariable par la permutation circulaire (abc) a donc une valeur rationnelle.

Burnside (*W.*). — Sur une propriété des courbes planes isothermes. (64-68).

Soit u une fonction finie et continue à l'intérieur d'une aire A, limitée par un contour C. Si cette fonction u vérifie l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, on sait qu'elle est complètement déterminée à l'intérieur de C, quand on se donne la succession des valeurs qu'elle prend le long de C. M. Burnside établit une relation entre le nombre des maximums et des minimums de u le long de C et le nombre des points doubles des courbes $u =$ const.

Cayley. — Sur les deux invariants d'une forme doublement quadratique (68-69).

La fonction

$$z^2(ax^2 + 2hxy + g'y^2) + 2zw(h'x^2 + 2bxy + fy^2) + w^2(gx^2 + 2f'xy + cy^2),$$

considérée successivement comme fonction de (x, y) et de (z, w) possède deux discriminants U, V. Ces formes du quatrième ordre U et V ont les mêmes invariants du second et du troisième ordre; M. Cayley donne le développement de ces deux invariants.

Mathews (*G.-B.*). — Les déterminants irréguliers. (70-74).

Démonstration de théorèmes énoncés par Gauss (art. 306 des *Disquisitiones arithmeticæ*).

Cayley. — Sur un cas particulier de l'équation différentielle du troisième ordre de Kummer. (75-79).

Étude d'une solution particulière rationnelle de l'équation de Kummer.

Dixon (*A.-C.*). — Sur la somme des cubes des coefficients dans un certain développement par la formule du binome. (79-80).

Il s'agit de la somme des cubes des coefficients dans le développement de $(1-x)^{2n}$, chacun des coefficients étant pris avec son signe. Cette somme est re-

présentée par l'intégrale double

$$\frac{(-1)^n}{4\pi^2.4^{-3n}}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^{2n}\theta\,\sin^{2n}\varphi\,\sin^{2n}(\theta+\varphi)\,d\theta\,d\varphi;$$

on trouve ainsi qu'elle est égale à $(-1)^n\frac{(3n)!}{(n!)^3}$.

Lloyd Tanner (*H.-W.*). — Sur la règle de dérivation d'Arbogast. (81-82).

Lloyd Tanner (*H.-W.*). — Sur l'histoire de la règle d'Arbogast. (83-101).

Ces deux articles sont entièrement une exposition de la règle d'Arbogast, et une reproduction des passages des principaux auteurs relatifs à cette règle.

Johnston (*J.-P.*). — Sur les congruences de droites. (102-103).

Démonstration du théorème fondamental, que toute congruence de droites est formée des tangentes doubles d'une certaine surface.

Mac-Mahon (*P.-A.*). — Théorie des partitions parfaites des nombres et compositions des nombres composés. (103-119).

L'auteur appelle *partition parfaite d'un nombre entier* toute partition qui contient une partition et une seule de tout nombre inférieur. Un nombre composé (*multipartite*) est l'assemblage de plusieurs nombres distincts, représentant des quantités différentes; on le représente par un symbole tel que $(\alpha\beta\gamma)$. Il existe entre le nombre des partitions parfaites et le nombre des compositions d'un nombre composé des relations curieuses; nous citerons la suivante : « Le nombre $a^\alpha b^\beta c^\gamma\ldots-1$ possède autant de partitions parfaites que le nombre $(\alpha\beta\gamma\ldots)$ possède de compositions. »

Cayley. — Correction à la Note sur l'équation modulaire de Schläfli pour la transformation du troisième ordre. (120).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Théorème relatif aux sommes des puissances paires des nombres entiers. (120-128).

Si l'on pose $S_n = 1^n + 2^n + 3^n + \ldots + i^n$, on a

$$\frac{S_{2n}}{S_1} = A_2 S_{2n-2} + A_4 S_{2n-4} + \ldots + A_{2n-2} S_2 + A_{2n}(S_0 + \tfrac{1}{2}),$$

$A_2, A_4, \ldots, A_{2n}$ étant des coefficients numériques, qui s'expriment assez simplement au moyen des nombres de Bernoulli.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Relations récurrentes renfermant les sommes des puissances des diviseurs. (129-135; 177-181).

Énoncé de relations curieuses entre les sommes des puissances successives des diviseurs d'un même nombre n. La démonstration a été communiquée par l'auteur à la *Société Mathématique* de Londres.

Cayley. — Note sur l'involutant de deux matrices binaires. (136-137).

Étant données deux matrices $M = \frac{(a, b)}{|c, d|}$, $M' = \frac{(a', b')}{|c', d'|}$ et leurs produits

$$MM' = \frac{(A, B)}{|C, D|}, \quad M'M = \frac{(A_1, B_1)}{|C_1, D_1|},$$

on appelle *involutant* l'un ou l'autre des déterminants

$$I = \begin{vmatrix} 1 & a & a' & A \\ 0 & b & b' & B \\ 0 & c & c' & C \\ 1 & d & d' & D \end{vmatrix}, \quad I_1 = \begin{vmatrix} 1 & a' & a & A_1 \\ 0 & b' & b & B_1 \\ 0 & c' & c & C_1 \\ 1 & d' & d & D_1 \end{vmatrix}.$$

M. Cayley montre directement que ces deux déterminants ont la même valeur.

Cayley. — Sur une identité algébrique relative aux six coordonnées d'une droite. (138-140).

Soient (a, b, c, f, g, h) et (a', b', c', f', g', h') les coordonnées de deux droites qui se coupent et (A, B, C, F, G, H) les coordonnées d'une troisième droite qui rencontre les deux premières; cette nouvelle droite doit être située dans le plan des deux premières, ou passer par leur point commun. A cette remarque se rattache une identité intéressante entre les dix-huit coordonnées des trois lignes droites.

Segar (H.-W.). — Un théorème sur les déterminants. (141-142).

Soit $f(t)$ un polynome entier de degré n; on a

$$\begin{vmatrix} D\frac{1}{f(t)} & D\frac{t}{f(t)} & D\frac{t^2}{f(t)} & \cdots \\ D^2\frac{1}{f(t)} & D^2\frac{t}{f(t)} & D^2\frac{t^2}{f(t)} & \cdots \\ D^3\frac{1}{f(t)} & D^3\frac{t}{f(t)} & D^3\frac{t^2}{f(t)} & \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots \end{vmatrix} = \frac{n!\,n-1!\,n-2!\ldots}{[f(t)]^{n+1}},$$

le déterminant renfermant n lignes et n colonnes.

Segar (H.-W.). — Sur la sommation de certaines séries. (142-144).

Sommation de séries telles que $\frac{1}{u_1 u_2} + \frac{1}{u_2 u_3} + \frac{1}{u_3 u_4} + \ldots$, u_1, u_2, u_3, . . étant les termes d'une série récurrente, où la relation fondamentale est de la forme $u_{n-1} - a u_n + u_{n+1} = 0$.

Burnside (*W.*). — Sur un cas du mouvement d'un fluide. (144-145).

Burnside (*W.*). — Note sur le théorème d'addition pour les fonctions hyperboliques. (145-148).

Démonstration géométrique, analogue à la démonstration élémentaire de la Trigonométrie ordinaire.

Burnside (*W.*). — Correction à la Note précédente. (148).

L'auteur avait dit, dans un article précédent, que les lignes de courbure de la surface

$$z(z-a)(z-b) + (z-b)x^2 + (z-a)y^2 = 0$$

étaient des ellipses; il fait remarquer ici que ce sont des cercles.

Cayley. — Sur la notion de courbe plane d'un ordre donné. (148-150).

Cayley. — Sur l'épitrochoïde. (150-158).

Lorsqu'une courbe plane C roule sans glisser sur une droite, soit Q le point de contact à un instant donné, et A le centre de courbure de C relatif au point Q; tout point du cercle décrit sur QA comme diamètre a sa trajectoire qui présente un point d'inflexion. M. Cayley applique cette remarque au cas où la roulette C est une conique; il démontre, en particulier, que, lorsqu'une hyperbole roule sans glisser sur une droite, la courbe décrite par le sommet de cette hyperbole présente des points d'inflexion.

Hammond (*J.*). — Quelques formules d'Arithmétique. (158-163; 182-190).

Formules relatives aux nombres et à la somme des diviseurs d'un nombre entier.

Burnside (*W.*). — Sur une propriété des substitutions linéaires. (163-166).

Toute transformation résultant de deux transformations par rayons vecteurs réciproques peut être définie par une substitution linéaire effectuée sur une variable complexe $z' = \frac{az+b}{cz+d}$. Inversement, lorsque a, b, c, d sont réels et vérifient la relation $ad - bc = 1$, la transformation précédente peut être rem-

placée, d'une infinité de manières, par deux inversions successives, par rapport à deux cercles ayant leurs centres sur l'axe réel.

Brill (*J.*). — Sur l'application de la méthode des polaires réciproques aux théorèmes de Statique. (166-171).

L'auteur applique la méthode de représentation des quantités imaginaires qu'il a donnée antérieurement (*Messenger*, septembre 1887), à la transformation des théorèmes de Statique. Ce procédé revient au fond à une transformation par polaires réciproques, relativement à un cercle de rayon un.

Glaisher (*J.-W.-J.*). — Note sur la somme des puissances des nombres pairs et impairs. (172-176).

De la formule

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{B_1}{2!}2^2x^2 - \frac{B_2}{4!}2^4x^4 - \frac{B_3}{6!}2^6x^6 - \ldots,$$

on déduit que le coefficient de x^{2r} dans le produit $\sin kx \cot x$ est

$$(-1)^r\left[\frac{k^{2r+1}}{(2r+1)!} + 2^2\frac{B_1}{2!}\,\frac{k^{2r-1}}{(2r-1)!}\ldots \pm 2^{2r}\frac{B_r}{(2r)!}k\right].$$

D'ailleurs, on trouve directement que ce coefficient est égal à $(-1)^r\frac{1}{(2r)!}$, multiplié par

$$2[2^{2r} + 4^{2r} + \ldots + (k-2)^{2r}] + k^{2r},$$

ou par

$$2[1^{2r} + 3^{2r} + \ldots + (k-2)^{2r}] + k^{2r},$$

suivant que k est pair ou impair. En égalant ces deux valeurs du coefficient, on trouve une expression de la somme

$$1^{2r} + 3^{2r} + \ldots + k^{2r} \quad \text{ou} \quad 2^{2r} + 4^{2r} + \ldots + k^{2r};$$

on remarquera que l'expression est la même dans les deux cas, de k pair et de k impair. Il n'en est plus de même, si l'on considère des sommes de puissances impaires.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Sur les fonctions elliptiques de $\frac{1}{3}$K. (191-192).

Tome XXI; 1891-1892.

Sylvester. — Sur les séries arithmétiques. (1-19; 87-120; 192).

Cet important travail, qu'il serait difficile d'analyser, part de propriétés tout à fait élémentaires pour arriver à la difficile question de la détermination des nombres premiers inférieurs à une limite donnée. On y retrouve à chaque pas l'esprit si profondément original de l'illustre géomètre.

Rouse Ball (*W.-W.*). — Une hypothèse relative à la nature de l'éther et à la gravité. (20-24).

Burnside (*W.*). — Sur la forme des courbes fermées de la troisième classe. (25-26).

Il résulte de la discussion qu'une courbe fermée de troisième classe est formée d'une courbe à trois rebroussements, analogue à une hypocycloïde, ou d'une pareille courbe, entourée d'une ovale.

Burnside (*W.*). — Notes d'Algèbre. (26-28).

La première Note est relative au jacobien de deux formes quadratiques u et v d'une variable x; on a

$$\left(u\frac{\partial v}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \mathrm{A}u^2 + \mathrm{B}uv + \mathrm{C}v^2,$$

A, B, C étant des constantes. Dans la seconde Note, l'auteur résout d'une façon simple le système d'équations

$$\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n}{x_1} = \frac{a_2x_1 + \ldots + a_nx_n}{x_2} = \ldots = \frac{a_nx_1 + \ldots + a_mx_n}{x_n}.$$

Richmond (*H.-W.*) — Note sur la somme de fonctions de quantités qui sont en progression arithmétique. (29-34).

Extension des théorèmes de M. Glaisher sur les sommes des puissances des nombres entiers. L'auteur considère les sommes

$$\Phi(0) + \Phi(2) + \Phi(4) + \ldots + \Phi(n),$$

où Φ est une fonction entière de n, et des sommes analogues.

Rouse Ball (*W.-W.*). — Les nombres de Mersenne. (34-40; 121).

Résumé des résultats obtenus jusqu'à présent.

Fujisawa (*R.*). — Note sur une formule relative aux sphériques harmoniques. (40-41).

Démonstration simple de la formule

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}_n^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1},$$

où P_n représente le coefficient de α^n dans le développement de $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\cos\theta+\alpha^2}}$.

Anderson. — Note sur l'équilibre d'une surface fermée, sous l'action de forces normales. (42-43).

Étant donnée une surface fermée, si l'on désigne par ω un élément d'aire de cette surface, et par ρ_1, ρ_2 les rayons de courbure principaux, on connaît trois systèmes de forces normales, sous l'action desquelles la surface est en équilibre : 1° $F = \mu\omega$; 2° $F = \mu\omega\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ (Bertrand); 3° $F = \frac{\mu\omega}{\rho_1\rho_2}$ (Joubert). L'auteur de cette Note montre comment ces trois expressions de F peuvent se déduire par un procédé uniforme de la première. Le même procédé appliqué à la dernière expression ne donne pas de théorème nouveau.

Rogers (*L.-J.*). — Note sur les fonctions propres à représenter une substitution d'un nombre premier de lettres. (44-47).

L'auteur prouve par des exemples que les conditions trouvées par M. Hermite ne sont pas toujours indépendantes.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Expression de la somme des cubes des diviseurs d'un nombre au moyen des partitions des nombres inférieurs. (47-48).

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Relations récurrentes entre les sommes des puissances des diviseurs d'un nombre. (49-64).

Suite du Mémoire du Volume précédent.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Expressions des fonctions symétriques de I, G, E, au moyen de q. (65-69).

Anderson (*A.*). — Sur les centres de pression. (69-76).

Méthode élémentaire pour déterminer le centre de pression d'un triangle, d'un quadrilatère, d'un polygone régulier, d'un cercle, d'un demi-cercle, etc.

Richmond (*H.-W.*). — La somme des cubes des coefficients de $(1-x)^{2n}$. (77-78).

Démonstration de la formule de M. Dixon (*Messenger*, t. XX, p. 79).

Campbell (*J.-E.*). — Note sur la transformation simultanée de deux formes quadratiques. (78-83).

Étude algébrique de la réduction simultanée de deux formes quadratiques à n variables à des sommes de carrés. Discussion de l'équation en λ, et interprétation géométrique dans le cas de trois et de quatre variables.

Burnside (*W.*). — Deux Notes sur la fonction pu de Weierstrass. (84-87).

La première Note est relative à la formule d'addition. Dans la seconde Note, l'auteur donne une démonstration nouvelle d'une formule due à Klein, qui

donne l'expression de $\wp u$, quand on pose

$$u = \int_y^x \frac{dz}{s^{\frac{1}{2}}},$$

où s est une fonction entière de z du quatrième degré.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — Note sur une formule de récurrence pour $\sigma(n)$. (122-130).

Cayley. — Note sur une identité. (131-132).

Soit $\Omega = (x_1, y_1)^A (x_2, y_2)^B (x_3, y_3)^C (x_4, y_4)^D \ldots$ une forme homogène, et de degré A, B, C, D, ... par rapport à plusieurs couples de variables séparément (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... Soit $\overline{12} = dx_1\, dy_2 - dy_1\, dx_2$; on a

$$(A\overline{23} + B\overline{31} + C\overline{12})\Omega = 0,$$

quand on remplace les variables (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) par (x, y).

Cayley. — Sur la non-existence d'un groupe spécial de points. (132-133).

Il n'existe pas de groupe de *sept* points, tels que toute cubique passant par ces sept points passe aussi par un huitième point fixe.

Cayley. — Sur la formule de Waring pour la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des racines d'une équation. (133-137).

M. Cayley établit un rapprochement curieux entre la formule de Waring et la formule de Lagrange, donnant le développement d'une racine de l'équation $x = u + f(x)$.

Brill (*J.*). — Une propriété de l'équation de la chaleur. (137-139).

Si $f(x, y, z, t)$ est une solution de l'équation

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right),$$

l'expression

$$t^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}} f\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}, -\frac{1}{t}\right)$$

est aussi une solution.

Lloyd Tauner (*H.-W.*). — Sur les racines carrés de l'unité pour un module premier. (139-144).

Détermination des fonctions $A + Bx + Cx^2 + \ldots + Dx^{p-1}$, qui sont $\equiv \pm 1 \pmod{p}$ pour les valeurs 1, 2, ..., $p-1$ de x. L'auteur donne le Tableau de ces fonctions pour les valeurs $p = 3, 5, 7$.

Segar (*H.-W.*). — Sur la sommation de certaines séries. (145-147).

Sommation des séries

$$\sum \frac{c^{r}}{u_r u_{r+1} \ldots u_{r+n}}, \qquad \sum \frac{c^{r}}{u_r u_{r+1} \ldots u_{r+n-1}},$$

$u_r, u_{r+1}, \ldots, u_{r+n}, \ldots$ étant les termes d'une série récurrente, où la relation fondamentale est $u_r - bu_{r+1} + cu_{r+2} = 0$.

Segar (*H.-W.*). — Sur un théorème relatif aux déterminants, dû à Jacobi. (148-157).

Propositions diverses relatives aux déterminants dont les éléments sont des fonctions symétriques entières de r lettres.

Campbell (*J.-E.*). — Sur le nombre maximum de points arbitraires que l'on peut prendre pour points doubles d'une courbe, ou d'une surface, de degré quelconque. (158-164).

Discussion de cas singuliers. Par exemple, il n'existe pas de courbe du quatrième ordre avec cinq points doubles. Cependant, si l'on se donne cinq points arbitrairement, on peut former l'équation d'une courbe du quatrième degré admettant ces cinq points comme points doubles; le premier membre est le carré du premier membre de l'équation qui représente la conique passant par ces cinq points.

Burnside (*W.*). — Sur l'application du théorème d'Abel aux intégrales elliptiques de première espèce. (164-170).

M. Burnside prend pour courbe fixe la courbe

$$y^2 = \frac{ax^2 + 2bx + c}{Ax^2 + 2Bx + C},$$

et pour courbe variable l'hyperbole $y(m'x + n') = mx + n$. L'application du théorème d'Abel à l'intégrale de première espèce conduit facilement à des relations connues entre les fonctions elliptiques de quatre arguments u_1, u_2, u_3, u_4, tels que $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$.

Burnside (*W.*). — Sur la transformation linéaire de la différentielle elliptique. (170-176).

Étude des substitutions linéaires qui changent en elles-même une différentielle elliptique de première espèce, ou qui la ramènent à l'une des formes de Legendre, de Weierstrass ou de Riemann.

Segar (*H.-W.*). — Sur le déterminant *multinomial*. (177-188).

Quand on ordonne suivant les puissances croissantes de x un produit tel que

$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)^n$, le coefficient A_r de x_r se présente sous forme d'un déterminant à r colonnes, que l'auteur propose d'appeler *multinomial;* il en fait diverses applications à des développements connus.

Allan Cunningham. — Sur le cercle des pieds des perpendiculaires et l'axe orthocentral d'un quadrilatère complet. (188-191).

Extension au quadrilatère complet de quelques-unes des propriétés du cercle des neuf points d'un triangle.

Segar (H.-W.). — Note sur quelques remarquables séries de nombres. (191).

Les deux séries en question $u_1, u_2, \ldots, u_n$ et $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sont formées respectivement des plus petits nombres entiers qui vérifient les inégalités

$$\frac{u_1}{u_2} > \frac{u_2}{u_3} > \frac{u_3}{u_4} > \ldots,$$

$$\frac{v_1}{v_2} < \frac{v_2}{v_3} < \frac{v_3}{v_4} < \ldots,$$

avec les conditions $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $v_1 = 1$, $v_2 = 3$. On a les expressions générales de u_n et de v_n

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

qui permettent de vérifier les relations récurrentes

$$u_{2n} = u_n^2 + v_n^2, \quad u_{2n+1} = u_{n+1}^2 + v_n^2, \quad v_{2n} = u_{n+1}^2 - u_n^2, \quad v_{2n+1} = v_{n+1}^2 - v_n^2.$$

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

2ᵉ semestre 1890 (¹).

Kronecker (L.). — Sur les systèmes orthogonaux (suite). (601-607).

Dans le t. 32 du *Journal de Crelle*, M. Cayley a établi la formule célèbre

(¹) Voir *Bulletin*, XVII₁, p. 99.

qui permet d'exprimer rationnellement les éléments des systèmes orthogonaux d'ordre n en fonction de $\frac{n(n-1)}{2}$ variables indépendantes. M. Kronecker se propose de rechercher si l'on peut déduire de ce théorème, qui concerne les systèmes orthogonaux en général, une représentation des systèmes orthogonaux *symétriques*. A cet effet il reprend les recherches générales de M. Cayley; mais, au lieu d'étudier les propriétés d'un système de n^2 quantités *déterminées* c_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ vérifiant les équations caractéristiques de l'orthogonalité

$$\sum_{i=1}^{i=n} c_{gi} c_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n),$$

il étudie, plus généralement, les propriétés d'un système de n^2 quantités *indéterminées*, w_{ik}, envisagé suivant le système de modules M dont les $\frac{n(n+1)}{2}$ éléments sont

$$\delta_{gh} - \sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} \qquad \left(\begin{matrix} g, h = 1, 2, \ldots, n \\ g \leqq h \end{matrix}\right).$$

Ce point de vue auquel M. Kronecker et aussi M. Netto se sont placés à diverses reprises dans leurs publications les plus récentes offre de grands avantages et permet de compléter facilement les belles recherches de M. Cayley.

Désignons par (w'_{ik}) le système réciproque du système (w_{ik}); soit u une indéterminée; posons

$$u_{ik} = w_{ik} + u\delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

désignons par (u'_{ik}) le système réciproque du système (u_{ik}) et par U le déterminant $|u_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$; posons ensuite

$$\varphi_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u(u_{ik} + u_{ki}), \qquad \bar{\varphi}_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} u_{hi} u_{hk} - u(u_{ik} + u_{ki})$$
$$\psi_{ik} = \delta_{ik} - u(u'_{ik} + u'_{ki}).$$

On a alors pour $g = 1, 2, \ldots, n$ et pour $h = 1, 2, \ldots, n$, les relations remarquables

$$(1) \quad \left\{\begin{array}{lll} \varphi_{gh} = \sum_{i,k} u_{gi} u_{hk} \psi_{ik}, & \bar{\varphi}_{gh} = \sum_{i,k} u_{ig} u_{kh} \psi_{ik}, & \varphi_{gh} = \sum_{i,k} w_{hk} w'_{ig} \bar{\varphi}_{ik}, \\ \psi_{gh} = \sum_{i,k} u'_{gi} u'_{hk} \varphi_{ik}, & \psi_{gh} = \sum_{i,k} u'_{ig} u'_{kh} \bar{\varphi}_{ik}, & \bar{\varphi}_{gh} = \sum_{i,k} w_{kh} w'_{gi} \varphi_{ik} \\ & (i, k = 1, 2, \ldots, n), & \end{array}\right.$$

dont on voit bien l'importance en observant qu'elles sont identiques au théoreme suivant :

« Les substitutions

$$y_i = \sum_{k=1}^{k=n} u_{ik} \bar{x}_k = \sum_{k=1}^{k=n} u_{ki} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

transforment les formes quadratiques et bilinéaires

$$\sum_{i,k} \varphi_{ik} x_i x_k, \qquad \sum_{i,k} \bar{\varphi}_{ik} \bar{x}_i \bar{x}_k, \qquad \sum_{i,k} \bar{\varphi}_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

respectivement en

$$\sum_{i,k} \psi_{ik} y_i y_k, \qquad \sum_{i,k} \psi_{ik} y_i y_k, \qquad \sum_{i,k} \bar{\varphi}_{ik} (y_i - u x_i)(y_k - u x_k).$$

Les substitutions indiquées montrent que les variables x et $\bar{x}$ sont liées pour $h = 1, 2, \ldots, n$, par les relations

$$x_h = \sum_{i,k} u_{ik} u'_{ih} \bar{x}_k, \qquad x_h = \sum_{i,k} u_{ki} u'_{hi} x_k, \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

dont on déduit, en s'appuyant sur ce que les deux formes $\sum_{i,k} \varphi_{ik} x_i x_k$ et $\sum_{i,k} \bar{\varphi}_{ik} \bar{x}_i \bar{x}_k$ étant toutes deux transformées dans la même forme $\sum_{i,k} \psi_{ik} y_i y_k$, sont nécessairement égales,

$$(2) \qquad \bar{\varphi}_{gh} = \sum_{i,k,r,s} u_{rg} u_{sh} u'_{ri} u'_{sk} \varphi_{ik}, \qquad \varphi_{gh} = \sum_{i,k,r,s} u_{gr} u_{hs} u'_{ir} u'_{ks} \bar{\varphi}_{ik}$$
$$(i, k, r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

Les identités (1) et (2) jointes aux suivantes

$$(3) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} w_{hi} w'_{ik} = \sum_{i=1}^{i=n} w'_{hi} w_{ik} = \delta_{hk}, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} u_{hi} u'_{ik} = \sum_{i=1}^{i=n} u'_{hi} u_{ik} = \delta_{hk}$$
$$(h, k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui expriment la réciprocité des systèmes (w_{ik}) et (w'_{ik}), (u_{ik}) et (u'_{ik}), contiennent toutes les propriétés des systèmes orthogonaux. Les deux premières identités (1) suffisent pour simplifier et compléter les résultats de M. Cayley. En effet, les équations

$$\varphi_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} w_{ih} w_{kh} - \delta_{ik} u^2 = \sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} - u(u_{ik} + u_{ki}) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n$$

montrent que le système des n^2 quantités

$$\frac{w_{ik}}{u} \quad \text{ou} \quad \frac{u_{ik}}{u} - \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

est un système orthogonal, et *comme on a supposé qu'il existait un système* (u') *réciproque à* (u), *c'est-à-dire que le déterminant* U *était différent de zéro,* on voit sans peine que les équations

$$(4) \qquad \psi_{ik} = \psi_{ki} = \delta_{ik} - u(u'_{ik} + u'_{ki}) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

caractérisent elles aussi l'orthogonalité du système des n^2 quantités $\frac{w_{ik}}{u}$. [En effet, les deux premières équations (1) montrent que le système d'équations (4) est entièrement équivalent au système d'équations

$$\left.\varphi_{ik} = \sum_{h=1}^{h=n} w_{ih} w_{kh} - \delta_{ik} u^2 = \sum_{h=1}^{h=n} u_{hi} u_{kh} - u(u_{ik} + u_{ki}) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)\right].$$

Or ces équations (4) ne sont vérifiées que si après avoir choisi arbitrairement $\frac{n(n-1)}{2}$ variables arbitraires t_{ik} ($i<k$; $i, k = 1, 2, \ldots, n$), on donne aux variables u' les valeurs

$$uu'_{ii} = \frac{1}{2}, \qquad uu'_{ik} = t_{ik}, \qquad uu'_{ki} = -t_{ik} \qquad (i<k;\ i, k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Si donc on forme, à l'aide du système (u_{ik}) réciproque à *ce* système (u'_{ik}), le système des n^2 nombres

$$\frac{u_{ik}}{u} - \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on obtient le système orthogonal le plus général possible, *pour lequel* U *n'est pas nul*.

De même on obtient *tous* les systèmes orthogonaux (c_{ik}) d'un domaine de rationalité déterminé pour lesquels le déterminant $|c_{ik} + \delta_{ik}|$ ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) est différent de zéro, *et on n'obtient que de tels systèmes*, si l'on choisit, dans le domaine de rationalité, des systèmes (t_{ik}) pour lesquels

$$t_{ii} = \frac{1}{2}, \qquad t_{ik} = -t_{ki} \qquad (i<k;\ i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

puis, que l'on forme le système réciproque (t'_{ik}) et enfin que l'on pose

$$c_{ik} = t'_{ik} - \delta_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais parmi les systèmes orthogonaux (c_{ik}) à déterminant $|c_{ik} + \delta_{ik}|$ différent de zéro, *il n'y en a aucun*, sauf le système unité, qui soit *symétrique;* car si (c_{ik}) est symétrique, $(c_{ik} + \delta_{ik})$ l'est aussi, donc aussi son réciproque (t_{ik}); on a donc

$$t_{ii} = \frac{1}{2}, \qquad t_{ik} = t_{ki} = 0;$$

donc $t'_{ik} = 2\delta_{ik}$, donc $c_{ik} = \delta_{ik}$.

Ainsi les systèmes symétriques orthogonaux représentés par M. Lipschitz ne sont pas compris parmi les systèmes orthogonaux considérés par M. Cayley.

Kronecker (*L.*). — Sur les systèmes orthogonaux (suite). (691-699).

Soient v_{ik} ($i, k = 1, 2, \ldots, n$) des indéterminées; $V = |v_{ik}|$ leur déterminant

$V_1^{(m)}$, $V_2^{(m)}$, ... les mineurs, d'ordre $(n-m)$, obtenus en prenant la dérivée de V par rapport à m des indéterminées v_{ii}; M. Kronecker montre que l'on peut toujours mettre ces mineurs sous la forme

$$V_k^{(l)} \equiv (W_k^{(l)})^2 \quad (\operatorname{modd} v_{ii},\ v_{ik},\ v_{ik}+v_{ki}), \qquad (k=1, 2, 3, \ldots),$$

où, lorsque $n-l$ est pair, les $W_k^{(l)}$ sont des grandeurs entières du domaine formé par les éléments v_{ik}, tandis que, pour $n-l$ impair, on a $W_k^{(l)}=0$.

Soit $(M_v^{(m)})$ le système de modules dont les éléments sont $W^{(m-2)}$, $W^{(m-4)}$, ... et les $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités v_{ii}, $v_{ik}+v_{ki}$ $\left(\begin{matrix} i, k = 1, 2, \ldots, n \\ i<k \end{matrix}\right)$. Si v est une indéterminée, si δ_{ik} désigne comme toujours le nombre 1 ou le nombre 0 suivant que $i=k$ ou que $i \gtrless k$, enfin si $V(v)$ représente le déterminant

$$|v_{ik}+v\delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut démontrer que *suivant le système de modules* $(M_v^{(n-2\mu)})$ *le développement, par rapport aux puissances croissantes de* v, *du déterminant* $V(v)$ *commence par* $v^{n-2\mu}$, *tandis que celui de chacun des mineurs* $\frac{\partial V(v)}{\partial v_{gh}}$ *commence par* $v^{n-2\mu-1}$ *ou par une puissance supérieure de* v.

La forme bilinéaire

$$\frac{v}{V(v)} \sum_{i,k} \frac{\partial V(v)}{\partial v_{ik}} x'_i y'_k$$

est la *réciproque* de la formule bilinéaire $f = \sum_{i,k} \left(\frac{v_{ik}}{v} + \delta_{ik}\right) x_i y_k$; nous la désignerons par $\operatorname{rec}(f)$. Dès lors il résulte du théorème précédent que l'on a, suivant le système de modules $(M_v^{(n-2\mu)}, v)$ la congruence

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & [(W_1^{(m)})^2 + (W_2^{(m)})^2 + \ldots] \operatorname{rec}\left[\sum_{i,k} \left(\frac{v_{ik}}{v} + \delta_{ik}\right) x_i y_k\right] \\ & \equiv \sum_{i,k} \left[\frac{\partial V_1^{(m-1)}}{\partial v_{ik}} + \frac{\partial V_2^{(m-1)}}{\partial v_{ik}} + \ldots\right] x'_i y'_k \\ & \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (m = n - 2\mu). \end{aligned} \right.$$

Ceci posé, remplaçons les indéterminées v_{ik} par des grandeurs entières d'un domaine de rationalité et prenons dans ce domaine un système de modules $(N', N'', \ldots)$ qui soit contenu dans chacun des éléments du système de modules $(M_v^{(m)})$, et suivant lequel la somme

$$(W_1^{(m)})^2 + (W_2^{(m)})^2 + \ldots$$

ne soit pas congrue à zéro. La congruence (5) subsiste alors suivant le système de modules $(v, N', N'', \ldots)$ et l'on reconnaît que la forme bilinéaire du second membre de cette congruence est une forme bilinéaire *symétrique*.

Si nous remplaçons les indéterminées v_{ik} par des quantités *réelles* déterminées τ_{ik}, pour lesquelles on ait

$$\tau_{ii} = 0, \qquad \tau_{ik} + \tau_{ki} = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i < k),$$

et pour lesquelles, en outre, le développement, suivant les puissances croissantes de v, du déterminant $|\tau_{ik} + v\,\delta_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, commence effectivement par v^m, on voit immédiatement que tous les éléments du système de modules $(M_v^{(m)})$ sont nuls. Donc, d'après le théorème général démontré plus haut, le développement de chacun des mineurs du premier ordre du déterminant $|\tau_{ik} + v\,\delta_{ik}|$ $(i, k = 2, 2, \ldots, n)$, commence par v^{m-1} ou par une puissance supérieure de v.

Prenons enfin pour les éléments du système de modules $(N', N'', \ldots)$ les quantités

$$W^{(m-2)}, \quad W^{(m-4)}, \quad \ldots; \quad v_{ii}, \quad v_{ik} + v_{ki} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n, i < k),$$

elles-mêmes, qui toutes s'annulent pour $v_{ik} = \tau_{ik}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, et faisons enfin tendre v vers zéro. Alors la congruence (5) prise suivant le système de modules $(v, N', N'', \ldots)$ se réduit à l'égalité

$$(6)\quad \begin{cases} \lim\limits_{v=0} \operatorname{rec}\left[\sum\limits_{i,k}\left(\frac{\tau_{ik}}{v} + \delta_{ik}\right) x_i y_k\right] \\ \quad = \frac{1}{(W_1^{(m)})^2 + (W_2^{(m)})^2 + \ldots} \sum\limits_{i,k}\left[\frac{\partial V_1^{(m-1)}}{\partial v_{ik}} + \frac{\partial V_2^{m-1}}{\partial v_{ik}} + \ldots\right] x'_i y'_k \end{cases}$$

$$(i, k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (m = n - 2\mu),$$

où, dans le second membre, on suppose les n^2 indéterminées v_{ik} remplacées par les n^2 nombres réels τ_{ik}. Ce second membre étant une fonction bilinéaire symétrique, on voit que *la réciproque de la forme bilinéaire*

$$\frac{1}{v}\sum_{i,k} \tau_{ik} x_i y_k + \sum_k x_k y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

c'est-à-dire du faisceau formé par une forme bilinéaire alternée à coefficients réels et la forme symétrique $\sum\limits_k x_k y_k$, *tend, lorsque v tend vers zéro, vers une forme symétrique bilinéaire à coefficients réels et finis.*

On peut généraliser ce théorème et démontrer que, *si*

$$f = \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k, \qquad f' = \sum_{i,k} a_{ik} y_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont deux formes bilinéaires conjuguées à coefficients réels et telles que le déterminant de la forme symétrique $f + f'$ soit différent de zéro, la réciproque de la forme bilinéaire

$$\frac{wf + f'}{w + 1}$$

tend, lorsque w tend vers -1, vers une forme symétrique à coefficients réels et finis.

Ces théorèmes n'ont un sens que si les déterminants des formes alternées bilinéaires

$$\sum_{i,k} \tau_{ik} x_i y_k, \quad \frac{1}{2}(f - f') \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont nuls. Si ces déterminants n'étaient pas nuls, tous les coefficients des réciproques des formes bilinéaires

$$\frac{1}{v}\sum_{i,k}\tau_{ik}x_iy_k+\sum_k x_ky_k,\quad \frac{wf+f'}{w+1}$$

s'annuleraient en effet, lorsque v tend vers zéro et w vers -1.

Nous avons vu dans une Note précédente que les systèmes *symétriques* orthogonaux ne sont pas compris parmi les systèmes orthogonaux représentés par M. Cayley. Il est d'autant plus intéressant de se rendre compte que, en suivant le mode de représentation des systèmes orthogonaux de M. Cayley, on peut cependant *tendre* vers des systèmes orthogonaux *symétriques*. Voici comment :

Dans le mode de représentation de M. Cayley, le système formé par les éléments

$$\frac{1}{2}c_{ik}+\frac{1}{2}\delta_{ik}\qquad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

est le réciproque d'un système d'éléments

$$2t_{ik}$$

qui vérifient les relations

$$t_{ik}+t_{ki}=\delta_{ik}\qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

donc aussi le réciproque d'un système d'éléments

$$\frac{\tau_{ik}}{v}+\delta_{ik}\qquad (i, k=1, 2, \ldots, n)$$

qui vérifient les relations

$$\tau_{ii}=0,\qquad \tau_{ik}+\tau_{ki}=0\qquad (i, k=1, 2, \ldots, n).$$

Or les éléments d'un système réciproque à un système considéré pouvant être envisagés comme les dérivées logarithmiques du déterminant du système considéré, prises par rapport aux éléments de ce déterminant, ne restent certainement pas tous finis lorsque ce déterminant devient nul. Lorsqu'on tend vers des systèmes $\left(\frac{1}{2}c_{ik}+\frac{1}{2}\delta_{ik}\right)$ à déterminant nul, il faut donc qu'une au moins des n^2 grandeurs $\frac{\tau_{ik}}{v}$ croisse au delà de toute limite.

Ceci posé, convenons de passer à la limite des systèmes $\left(\frac{\tau_{ik}}{v}+\delta_{ik}\right)$ qui vérifient les relations

$$\tau_{ii}=0,\qquad \tau_{ik}=\tau_{ki}=0\qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

en donnant aux n^2 grandeurs τ_{ik} des valeurs finies pour lesquelles le déterminant $|\tau_{ik}|$ soit nul, et en faisant diminuer v jusqu'à zéro. Alors, d'après l'avant-dernier théorème démontré dans la Note actuelle, le système réciproque tendra vers un système *symétrique* $\left(\frac{1}{2}c_{ik}+\frac{1}{2}\delta_{ik}\right)$ à éléments finis, à déterminant nul, et le système des n^2 éléments c_{ik} obtenu par ce procédé sera à la fois *orthogonal et symétrique*.

Kronecker (*L.*). — Sur les systèmes orthogonaux (suite). (873-885).

Soient z_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ un système de n^2 variables réelles et ζ_{ik} des valeurs de ces variables vérifiant les $\frac{n(n+1)}{2}$ équations de condition

$$\sum_{i=1}^{i=n} \zeta_{gi}\zeta_{hi} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n; g < h).$$

Dans la variété d'ordre n^2 des systèmes (z_{ik}), les systèmes (ζ_{ik}) forment alors une variété d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ qui représente les systèmes orthogonaux constitués par n^2 éléments réels.

Cette variété d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ se compose de deux parties séparées pour l'une desquelles le déterminant des systèmes orthogonaux est égal à $+1$, tandis que pour l'autre ce déterminant est égal à -1. Nous représenterons la première par (ζ_{ik}^+), la seconde par (ζ_{ik}^-). Ces deux parties séparées se correspondent d'ailleurs univoquement puisque par la substitution $\zeta_{1k}^- = -\zeta_{1k}^+$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ on obtient tous les systèmes (ζ_{ik}^-) à l'aide des systèmes (ζ_{ik}^+).

Il est facile de s'assurer que, pour chaque système (ζ_{ik}^-), le déterminant $|\zeta_{ik}^- + \delta_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ est nul; il en résulte que la variété d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ que l'on a désignée par (ζ_{ik}^-), ne comprend que des systèmes orthogonaux ne pouvant être représentés par les formules de M. Cayley.

Il y a, au contraire, des systèmes (ζ_{ik}^+) pour lesquels le déterminant $|\zeta_{ik}^+ + \delta_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ n'est pas nul, et les systèmes (ζ_{ik}^+) pour lesquels ce déterminant est nul forment une variété d'ordre inférieur à $\frac{n(n-1)}{2}$. Les systèmes (ζ_{ik}^+) peuvent donc, en général, être représentés par les formules de M. Cayley. En effectuant cette représentation, M. Kronecker démontre que la variété d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ que l'on a désignée par (ζ_{ik}^+) est *irréductible;* il en est donc de même de la variété (ζ_{ik}^-) qui lui correspond univoquement.

Désignons par τ_{ik} $(1 \leq i < k \leq n)$, $\frac{n(n-1)}{2}$ variables réelles indépendantes, et posons $\tau_{11} = \tau_{22} = \ldots = \tau_{nn} = 0$; $\tau_{ki} = -\tau_{ik}$. Si l'on fait correspondre les deux variétés (ζ_{ik}^+) et (τ_{ik}) lorsque les systèmes $(\zeta_{ik}^+ + \delta_{ik})$ et $\left(\frac{1}{2}\tau_{ik} + \frac{1}{2}\delta_{ik}\right)$ sont réciproques, ces deux variétés (ζ_{ik}^+) et (τ_{ik}), dont la seconde est plane, se correspondent univoquement d'après une Note précédente. Il en résulte que l'irréductibilité de la variété (ζ_{ik}^+) est une conséquence de l'irréductibilité de la variété plane (τ_{ik}).

Au point *zéro* de la variété plane (τ_{ik}) correspond le point *unité* de la variété (ζ_{ik}^+). Aux points de la variété (ζ_{ik}^+) pour lesquels le déterminant $|\zeta_{ik}^+ + \delta_{ik}|$ est nul, ne correspondent pas de points de la variété plane (τ_{ik})

situés à distance finie du point *zéro* de cette variété plane. Si l'on pose

$$\sum_{i,k} \tau_{ik}^2 = \rho^2, \qquad \tau_{ik} = \rho\bar{\tau}_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \rho > 0),$$

et si l'on désigne par *variété sphérique* la variété formé par les systèmes (τ_{ik}) pour lesquels ρ a la même valeur, on peut énoncer de la manière suivante le dernier résultat obtenu dans la Note précédente sur les systèmes orthogonaux :

Pour n impair, la variété (ζ_{ik}^{+}) qui correspond à la variété sphérique d'ordre

$$\left[\frac{n(n-1)}{2} - 1\right],$$

$$(\rho\bar{\tau}_{ik}),$$

tend, lorsque ρ croît indéfiniment, vers la variété (ζ_{ik}^{+}) formée par les systèmes *symétriques* orthogonaux (ζ_{ik}^{+}). Pour n pair, ce même fait n'a lieu que pour la variété (ζ_{ik}^{+}) qui correspond à la variété d'ordre $\frac{n(n-1)}{2} - 2$,

$$(\rho\bar{\tau}_{ik}),$$

qui est caractérisée par la condition que le déterminant $|\bar{\tau}_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ soit égal à zéro.

La variété des systèmes symétriques orthogonaux étant, comme nous l'avons vu dans une Communication précédente, d'ordre inférieur à celui des variétés correspondantes (τ_{ik}), on retrouve plus d'une fois les mêmes systèmes *symétriques* orthogonaux (ζ_{ik}^{+}) en parcourant une fois seulement la variété limite correspondante (τ_{ik}).

Envisageons maintenant le système de modules M dont les éléments sont les $\frac{n(n+1)}{2}$ quantités

$$-\delta_{gh} + \sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n;\ g \leq h).$$

Ce système est de rang $\frac{n(n+1)}{2}$; il ne contient aucun système premier de modules de rang inférieur. Suivant le système de modules M, le système des n^2 indéterminées w_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ est un système orthogonal. Si M' est le système de modules dont les éléments sont

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_{ig} w_{ih} - \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n;\ g \leq h),$$

les deux systèmes M et M' sont entièrement équivalents, c'est-à-dire que chaque élément du système M est congru à zéro modulis M', et que chaque élément du système M' est congru à zéro modulis M. Le système M, et par suite aussi le système M', ne contient pas d'autre système *premier* de modules de rang

$\frac{n(n+1)}{2}$ que les deux systèmes

$$(7)\qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi}w_{hi} - \delta_{gh},\quad W-1\right),$$

$$(8)\qquad \left(\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi}w_{hi} - \delta_{gh},\quad W+1\right),$$

où W désigne le déterminant $|w_{ik}|$ du système des n^2 indéterminées w_{ik}. En composant les deux systèmes (7) et (8), on obtient un système de modules qui est contenu dans le système

$$\left(2\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi}w_{hi} - 2\delta_{gh}\right) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces diverses propriétés des systèmes M donnent une vue plus complète de la question qui nous occupe que nous ne l'obtiendrions en étudiant directement les systèmes (ζ_{ik}) vérifiant les équations caractéristiques de l'orthogonalité des systèmes

$$\delta_{gh} - \sum_{i=1}^{i=n} \zeta_{gi}\zeta_{hi} = 0 \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n;\ g \leqq h);$$

cette dernière étude est d'ailleurs contenue dans l'étude générale des systèmes M.

Plus généralement encore, on peut démontrer que les deux systèmes qui comprennent les systèmes précédents M et M',

$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}v_{ih} - \delta_{gh}\right)$$
$$\left(\sum_{i=1}^{i=n} v_{gi}u_{ih} - \delta_{gh}\right) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n),$$

où les quantités u et v sont $2n^2$ indéterminées quelconques, sont eux aussi équivalents.

M. Kronecker établit ici deux équivalences qui sont l'extension des formules de M. Cayley permettant de représenter les systèmes orthogonaux, à des systèmes qui ne sont orthogonaux que suivant un système de modules donnés. En désignant par U et V les deux déterminants des n^2 indéterminées u_{ik} et des n^2 indéterminées v_{ik}, par (U_{ik}) le système adjoint au système (u_{ik}), et enfin par (V_{ik}) le système adjoint au système (v_{ik}), de sorte que l'on a

$$\sum_{i=1}^{i=n} u_{gi}U_{ih} = \delta_{gh}U, \qquad \sum_{i=1}^{i=n} v_{hi}V_{ik} = \delta_{hk}V,$$

les deux équivalences dont nous parlons sont les suivantes :

$$(9)\quad \left(\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih}u_{kh}-u_{ik}-u_{ki},\ v_{ik}-\mathrm{VU}_{ik}\right) \backsim (\delta_{ik}-v_{ik}-v_{ki},\ v_{ik}-\mathrm{VU}_{ik},\ \mathrm{UV}-1),$$

$$(10)\quad \left(\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih}u_{kh}-u_{ik}-u_{ki},\ u_{ik}-\mathrm{UV}_{ik}\right) \backsim (\delta_{ik}-v_{ik}-v_{ki},\ u_{ik}-\mathrm{UV}_{ik},\ \mathrm{UV}-1).$$

Et voici comment l'on montre qu'elles donnent effectivement la généralisation à des systèmes orthogonaux suivant un module donné, du mode de représentation de M. Cayley pour les systèmes orthogonaux. Soient : a_{ik} $(i, k=1, 2 \ldots, n)$ des grandeurs entières d'un domaine naturel de rationalité telles que le système

$$(a_{ik}-\delta_{ik}) \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

soit *orthogonal, modulis* $(\mu', \mu'', \ldots)$; les éléments du système de modules $(\mu', \mu'', \ldots)$ font, par hypothèse, partie du domaine naturel de rationalité considéré. Les congruences caractéristiques pour qu'il en soit ainsi sont

$$\sum_{h=1}^{h=n} a_{ih}a_{kh}-a_{ik}-a_{ki} \equiv 0 \quad (\mathrm{modd}\,\mu', \mu'', \ldots) \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

ou, si l'on veut

$$\sum_{h=1}^{h=n} a_{hi}a_{hk}-a_{ik}-a_{ki} \equiv 0 \quad (\mathrm{modd}\,\mu', \mu'', \ldots) \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n).$$

Si le déterminant $\mathrm{A}=|a_{ik}|$ du système (a_{ik}) est en outre, modulis $(\mu', \mu'', \ldots)$, un diviseur de l'unité, c'est-à-dire s'il existe une grandeur entière B du domaine naturel de rationalité considéré tel que l'on ait $\mathrm{AB}\equiv 1$ $(\mathrm{modd}\,\mu', \mu'', \ldots)$, on déduit de l'équivalence (9), en y posant

$$v_{ik}=\mathrm{VU}_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

la congruence

$$(11)\qquad \delta_{ik}-\mathrm{BA}_{ik}-\mathrm{BA}_{ki} \equiv 0 \quad (\mathrm{modd}\,\mu', \mu'', \ldots),$$

dans laquelle (A_{ik}) est le système adjoint au système (a_{ik}). Si, d'autre part, les éléments b_{ik} d'un système (b_{ik}) appartiennent au domaine naturel de rationalité considéré, et vérifient les congruences

$$\delta_{ik}-b_{ik}-b_{ki} \equiv 0 \quad (\mathrm{modd}\,\mu', \mu'', \ldots) \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

et, s'il existe une quantité A de ce domaine naturel de rationalité telle que l'on ait

$$\mathrm{AB}\equiv 1 \quad (\mathrm{modd}\,\mu', \mu'', \ldots),$$

on déduit de l'équivalence (10), en y posant

$$u_{ik}=\mathrm{UV}_{ik} \qquad (i, k=1, 2, \ldots, n),$$

la congruence

$$(12)\qquad \sum_{h=1}^{h=n} AB_{ih}AB_{kh} - AB_{ik} - AB_{ki} \equiv 0 \quad (\text{modd}\, \mu', \mu'', \ldots),$$

dans laquelle (B_{ik}) est le système adjoint au système (b_{ik}).

On obtient donc tous les systèmes orthogonaux, suivant le système quelconque de modules considérés $(\mu', \mu'', \ldots)$

$$(a_{ik} - \delta_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

pour lesquels le déterminant $|a_{ik}|$ est un diviseur de l'unité, modulis μ', μ'', ..., en envisageant successivement tous les systèmes (b_{ik}) dont les éléments vérifient les congruences

$$\delta_{ik} - b_{ik} - b_{ki} \equiv 0 \quad (\text{modd}\, \mu', \mu'', \ldots),$$

et dont le déterminant B est un diviseur de l'unité, modulis μ', μ'', ..., auquel correspond donc un nombre A, tel que l'on ait

$$AB \equiv 1 \quad (\text{modd}\, \mu', \mu'', \ldots);$$

puis en formant les systèmes (B_{ik}) adjoints à ces systèmes (b_{ik}); et, en posant enfin

$$a_{ik} = AB_{ik}.$$

En effet, la congruence (12) montre que les systèmes ainsi formés sont orthogonaux, modulis μ', μ'', ..., et la congruence (11), montre qu'il n'existe pas d'autres systèmes orthogonaux, modulis μ', μ'', ..., que les systèmes ainsi formés.

Kronecker (*L.*). — Sur les systèmes orthogonaux (fin). (1063-1080).

Les recherches générales contenues dans les Communications précédentes de M. Kronecker sur les systèmes *orthogonaux,* nous amènent à reconnaître la nécessité d'une généralisation du mode de représentation de ces systèmes donné par M. Cayley. Si, en effet, nous appliquons le dernier résultat obtenu par M. Kronecker, au cas particulier où le système de modules $(\mu', \mu'', \ldots)$ se réduit à un nombre entier μ, nous voyons qu'il est possible, ou non, de trouver par la méthode de M. Cayley les systèmes d'entiers (w_{ik}) tels que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{i=n} w_{gi} w_{hi} \equiv \delta_{gh} \quad (\text{mod}\, \mu) \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n),$$

suivant que le déterminant $|w_{ik} + \delta_{ik}|$ est ou n'est pas premier relatif à μ.

Ainsi, le nombre de systèmes orthogonaux modulo μ, qui ne peuvent pas être représentés par la méthode de M. Cayley est à ceux qui peuvent être représentés par cette méthode dans un rapport fini.

En étudiant la composition des systèmes orthogonaux, on voit d'ailleurs directement qu'il n'y a pas lieu de distinguer le cas où le déterminant $|w_{ik} + \delta_{ik}|$ est

nul du cas où il ne l'est pas. Pour le faire voir, observons d'abord que, si l'on désigne par $\operatorname{rec} u_{ik}$ l'élément du système réciproque au système (u_{ik}) qui correspond à l'élément u_{ik}, si l'on pose donc

$$\operatorname{rec} u_{ik} = \frac{\partial \log |u_{gh}|}{\partial u_{ik}} \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

tous les systèmes orthogonaux $(\zeta_{ik}^{(+)})$ pour lesquels le déterminant $|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}|$ est différent de zéro peuvent être mis sous la forme

$$(13) \qquad -\delta_{ik} + 2 \operatorname{rec}(\tau_{ik} + \delta_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

tandis que les systèmes orthogonaux pour lesquels ce déterminant est nul ne peuvent pas être mis sous cette forme. Ceci posé, soit $(\sigma_{ik}^{(+)})$ un système orthogonal particulier choisi parmi les systèmes $(\zeta_{ik}^{(+)})$; l'ensemble des systèmes orthogonaux à déterminant positif peut être représenté par la formule de composition $(\zeta_{ik}^{(+)})(\sigma_{ik}^{(+)})$; or, si l'on compose seulement avec $(\sigma_{ik}^{(+)})$ ceux des systèmes $(\zeta_{ik}^{(+)})$ qui peuvent être mis sous la forme (13), on peut fort bien obtenir des systèmes composés ne pouvant pas être mis sous cette forme (13); tout dépend du choix du système particulier (σ_{ik}^{+}). Dès lors, on voit bien nettement qu'il n'est pas naturel de séparer essentiellement les recherches concernant les systèmes orthogonaux à déterminant positif, pour lesquels le déterminant $|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}|$ est nul, de celles concernant les systèmes orthogonaux à déterminant positif pour lesquels le déterminant $|\zeta_{ik}^{(+)} + \delta_{ik}|$ n'est pas nul.

Il faut donc généraliser le mode de représentation des systèmes orthogonaux de M. Cayley. Les remarques que nous venons de faire au sujet de la composition des systèmes vont nous servir de guide dans cette généralisation.

Composons les deux systèmes

$$[-\delta_{ik} + 2 \operatorname{rec}(-\tau_{ik} + \delta_{ik})], \qquad (c_{ik}),$$

où (c_{ik}) est un système orthogonal quelconque à déterminant $+1$; nous obtiendrons un système orthogonal (F_{ik}) à déterminant $+1$, dépendant de $\frac{n(n-1)}{2}$ variables τ_{ik}. Comme il résulte d'une Communication précédente de M. Kronecker sur les systèmes orthogonaux, qu'il ne peut y avoir de variété d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ de quantités F_{ik} pour lesquelles on ait à la fois

$$\sum_{i=1}^{i=n} F_{gi} F_{hi} = \delta_{gh}, \qquad |F_{ik}| = 1, \qquad |F_{ik} + \delta_{ik}| = 0, \qquad (g, h, i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on voit que, tant que les $\frac{n(n-1)}{2}$ quantités τ_{ik} $(i < k)$ restent *variables*, le déterminant $|F_{ik} + \delta_{ik}|$ est nécessairement différent de zéro. On peut donc, en envisageant les $\tau_{ik} (i < k)$ comme des variables, appliquer au système orthogonal (F_{ik}) le mode de représentation de M. Cayley, et l'on a ainsi

$$F_{ik} = -\delta_{ik} + 2 \operatorname{rec}(f_{ik} + \delta_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n):$$

les quantités f_{ik} sont des fonctions rationnelles des n^2 quantités F_{ik} et vérifient les équations

$$f_{ik}+f_{ki}=0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Mais les quantités F_{ik} sont elles-mêmes des fonctions rationnelles des quantités c_{ik} et des $\frac{n(n-1)}{2}$ variables τ_{ik} $(i<k)$ puisque l'on a

$$(14) \qquad [-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(-\tau_{ik}+\delta_{ik})](c_{ik}) = (F_{ik}) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc les f_{ik} sont fonctions rationnelles des c_{ik} et τ_{ik}.

En observant que, pour $i, k = 1, 2, \ldots, n$, le système

$$-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(\tau_{ik}+\delta_{ik})$$

est le réciproque du système

$$-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(-\tau_{ik}+\delta_{ik}),$$

on déduit immédiatement des équations (14)

$$(15) \quad \begin{cases} (c_{ik}) = [-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(\tau_{ik}+\delta_{ik})](F_{ik}) \\ \qquad = [-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(\tau_{ik}+\delta_{ik})][-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(f_{ik}+\delta_{ik})] \end{cases} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ainsi tout système orthogonal (c_{ik}) à déterminant $+1$ peut être envisagé comme le composé d'un système $[-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(\tau_{ik}+\delta_{ik})]$ formé à l'aide des $\frac{n(n-1)}{2}$ variables indéterminées $\tau_{ik}\,(i<k)$ et d'un système

$$[-\delta_{ik}+2\operatorname{rec}(f_{ik}+\delta_{ik})]$$

formé à l'aide de fonctions rationnelles f_{ik} des mêmes variables indéterminées τ_{ik} et des éléments du système (c_{ik}) lui-même. On a d'ailleurs $\tau_{ik}+\tau_{ki}=0$, $f_{ik}+f_{ki}=0$. Il résulte de ces équations (15) que, tandis que les f_{ik} appartiennent au domaine de rationalité (c_{ik}, τ_{ik}), les c_{ik} appartiennent au domaine de rationalité (f_{ik}, τ_{ik}) $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$.

En adjoignant les $\frac{n(n-1)}{2}$ variables τ_{ik} $(i<k)$ aux quantités données, on peut donc représenter sans exception tous les systèmes orthogonaux. Ce fait est une confirmation nouvelle des théories fondamentales exposées par M. Kronecker dans sa célèbre *Festschrift*.

Ceci posé, observons que les équations (15) ont encore lieu lorsqu'on remplace les indéterminées τ_{ik} par des quantités *déterminées* quelconques, telles toutefois que les dénominateurs qui paraissent dans les équations précédentes ne soient pas nuls. Il faut et il suffit pour cela que l'on choisisse ces quantités déterminées de manière que les deux déterminants

$$|\tau_{ik}+\delta_{ik}|, \qquad |F_{ik}+\delta_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ne soient pas nuls, ce qui est toujours possible pour un système quelconque (c_{ik}) donné.

On voit ainsi que l'on obtient *tous* les systèmes orthogonaux, à déterminant $+1$, faisant partie d'un domaine de rationalité donné, et ces systèmes seulement.

en composant de toutes les manières possibles *deux à deux* les systèmes

$$[-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec}(\alpha_{ik} + \delta_{ik})] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les quantités α_{ik} sont des grandeurs quelconques du domaine de rationalité donné, telles que $\alpha_{ik} + \alpha_{ki} = 0$.

Ce mode de génération des systèmes orthogonaux est également applicable aux systèmes orthogonaux suivant un module ou suivant un système de modules donné. Il nous fournit la généralisation cherchée du mode de représentation des systèmes orthogonaux de M. Cayley. On retombe sur les systèmes orthogonaux de M. Cayley, en prenant tous les α_{ik} de l'un des deux systèmes que l'on compose

$$[-\delta_{ik} + 2\,\mathrm{rec}(\alpha_{ik} + \delta_{ik})] \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

chaque fois égaux à zéro. Mais alors, comme nous l'avons vu, la généralité du mode de représentation des systèmes orthogonaux se perd; les systèmes orthogonaux symétriques, par exemple, ne peuvent plus être représentés.

M. Kronecker fait suivre ces considérations générales de l'exposé d'une méthode qui diffère essentiellement de celle de M. Cayley et qui, pour des éléments *réels*, permet de représenter, sans exception, les systèmes orthogonaux à l'aide de $\frac{n(n-1)}{2}$ paramètres. Cette méthode repose sur des considérations déjà indiquées dans les *Monatsberichte de l'Académie de Berlin*, en 1873.

Il établit ensuite $(n-1)$ équations aux dérivées partielles qui caractérisent complètement les invariants des transformations *orthogonales*, à déterminant $+1$, d'un système quelconque donné de N formes de dimensions $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$,

$$\sum_{p_1, p_2, \ldots, p_n} C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \qquad (q = 1, 2, \ldots, N).$$

Désignons par

$$\mathfrak{z}(\ldots, C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots p_n}, \ldots)$$

un quelconque de ces invariants. On peut écrire ces $(n-1)$ équations aux dérivées partielles

$$\sum (p_1 + 1) C^{(q)}_{p_1+1, \ldots, p_r-1, \ldots, p_n} \frac{\partial \mathfrak{z}(\ldots, C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}, \ldots)}{\partial C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}}$$
$$= \sum (p_r + 1) C_{p_1-1, \ldots, p_r+1, \ldots, p_n} \frac{\partial \mathfrak{z}(\ldots, C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}, \ldots)}{\partial C^{(q)}_{p_1, p_2, \ldots, p_n}},$$

où r prend successivement les valeurs $r = 2, 3, \ldots, n$. Les sommations indiquées sont à effectuer par rapport aux indices $q, p_1, p_2, \ldots, p_n$: 1° dans les deux membres par rapport à q, de $q = 1, 2, \ldots$ jusqu'à $q = N$; 2° dans le premier membre de la $r^{\text{ième}}$ équation $(r = 2, 3, \ldots, n)$, de manière que, pour chaque valeur de q, p_r prenne toutes les valeurs entières positives et que $p_1, \ldots, p_{r-1}, p_{r+1}, \ldots, p_n$ prennent toutes les valeurs entières positives y compris zéro, telles que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \nu_q ;$$

3° dans les seconds membres des mêmes $(n-1)$ équations, de manière que p_1 prenne toutes les valeurs entières positives et que $p_2, p_3, \ldots, p_n$ prennent toutes les valeurs entières positives y compris zéro, telles que

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \nu_q.$$

On observera que le second membre de la $r^{\text{ième}}$ équation $(r = 2, 3, \ldots, n)$ se déduit du premier membre en y permutant les indices 1 et r.

Pour caractériser les invariants des transformations linéaires *générales*, à déterminant $+1$, il suffit d'ajouter à ces $(n-1)$ équations aux dérivées partielles la condition que dans chacune de ces $(n-1)$ équations les deux membres aient une valeur égale à zéro.

Dans le cas particulier où $N = 1$, on retombe sur les théorèmes déjà démontrés par M. Lipschitz et qui ont servi de point de départ aux recherches plus générales de M. Kronecker. Ainsi les invariants $\mathfrak{J}$ des transformations orthogonales de la forme quadratique

$$\sum_{i,k} u_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont entièrement caractérisés par les $(n-1)$ équations aux dérivées partielles

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left(u_{1h} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_{rh}} - u_{rh} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_{1h}} \right) = u_{1r} \left(\frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_{11}} - \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_{rr}} \right)$$
$$(r = 2, 3, \ldots, n).$$

Il est un autre cas particulier qui est très intéressant; c'est celui où les formes du système considéré sont *linéaires* et où $N = n$. Soient alors

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ces n formes. Les $(n-1)$ équations aux dérivées partielles qui caractérisent les invariants $\mathfrak{J}$ des transformations orthogonales de ce système de formes sont

$$\sum_{k=1}^{k=n} u_{kr} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_{k1}} = \sum_{k=1}^{k=n} u_{k1} \frac{\partial \mathfrak{J}}{\partial u_{kr}} \qquad (r = 2, 3, \ldots, n).$$

Ces invariants $\mathfrak{J}$ forment une variété d'ordre $n^2 - \frac{n(n-1)}{2}$; et ils peuvent être exprimés en fonction des $\frac{n(n+1)}{2}$ invariants particuliers

$$\sum_{h=1}^{h=n} u_{ih} u_{kh} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n;\ i \leqq k).$$

Ces $\frac{n(n+1)}{2}$ invariants particuliers sont aussi des invariants des transformations orthogonales à déterminant -1. Il existe toutefois des invariants qui ne sont invariants que pour les transformations orthogonales à déterminant $+1$, par exemple le déterminant $|u_{ik}|$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ du système de fonctions.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques. (1025-1029).

Dans une Communication précédente (¹), Kronecker a démontré que la série à double entrée

$$\operatorname{ser}(\sigma_0 v + \tau_0 w, \sigma v + \tau w, v, w) = \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w},$$

où les notations sont celles des formules (51) à (60) de cette Communication, peut être représentée à l'aide de la fonction impaire ϑ_1 de Jacobi par l'expression

$$\frac{1}{v} e^{\frac{2\tau_0 w\pi i}{v}} \vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right) \frac{\vartheta_1\left(\frac{(\sigma_0 + \sigma)v + (\tau_0 + \tau)w}{v}, \frac{w}{\tau}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\sigma_0 v + \tau_0 w}{v}, \frac{w}{\tau}\right)\vartheta_1\left(\frac{\sigma v + \tau w}{v}, \frac{w}{\tau}\right)},$$

qu'il désigne par fonction Atropos des quatre quantités $\sigma_0 v + \tau_0 w$, $\sigma v + \tau w$, v, w.

La série à double entrée, plus générale que la précédente

$$\sum_{m,n} \frac{(\sigma + m)v - (\tau + n)w}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w} \, \frac{e^{[(\tau+n)\sigma_0' - (\sigma+m)\tau_0']2\pi i} - e^{[(\tau+n)\sigma_0'' - (\sigma+m)\tau_0'']2\pi i}}{2(\sigma + m)(\tau + n)},$$

où (σ_0', τ_0'), (σ_0'', τ_0'') sont deux systèmes (σ_0, τ_0), peut être représentée par la somme

$$2\varepsilon v\pi i \int_{\sigma_0''}^{\sigma_0'} \operatorname{ser}(\sigma v + \tau w, \sigma_0 v + \tau_0' w, v, w)\, d\sigma_0$$
$$+ 2\varepsilon w\pi i \int_{\tau_0''}^{\tau_0'} \operatorname{ser}(\sigma v + \tau w, \sigma_0 v + \tau_0 w, v, w)\, d\tau_0$$

de deux intégrales de la série qui représente la fonction Atropos; dans l'une de ces intégrales c'est σ_0, dans l'autre c'est τ_0 qui est la variable d'intégration.

Cette même série à double entrée peut d'ailleurs aussi être mise sous la forme

$$2\varepsilon\pi i \sum_{m,n} e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i} \log \frac{(\sigma_0' + m)v + (\tau_0' + n)w}{(\sigma_0'' + m)v + (\tau_0'' + n)w},$$

où $\varepsilon = +1$ ou -1, suivant les conventions faites sur la variable w, de sorte que l'on peut envisager cette dernière série comme une généralisation de la fonction Atropos et, par suite, de la fonction ϑ_1 de Jacobi.

La démontration de cette belle proposition repose sur la convergence des séries ser_0 et ser_1 envisagées dans une Communication précédente, et sur la convergence de la série

$$\sum_{\rho=2}^{\rho=\infty} \sum_{m,n} \frac{[v(\sigma_0'' - \sigma_0')]^{1+\rho}}{1+\rho} \, \frac{e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i}}{[(\sigma_0' + m)v + (\tau_0'' + n)w]^{1+\rho}},$$

(¹) *Bulletin*, t. XVII₂, p. 55, formule (60), 1893.

qui résulte elle-même de la convergence de la série

$$\sum_{\rho=2}^{\rho=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{[(\sigma_0+m)v+(\tau_0+n)w]^{1+\rho}},$$

qui a été établie par Eisenstein dans le Tome 35 du *Journal de Crelle* (p. 166).

Kronecker (L.). — Sur la composition d'un système de n^2 quantités avec lui-même. (1081-1088).

Soient $z_{i,k}^{(1)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ n^2 variables indéterminées et $z_{i,k}^{(r)}$ les n^2 éléments du système obtenu en composant r fois avec lui-même le système des n^2 variables indéterminées $z_{i,k}^{(1)}$, de sorte que l'on ait, pour $g = 1, 2, \ldots, r$ et pour chacun des n^2 systèmes d'indices (i, k)

$$z_{i,k}^{(g)} = \sum_{h=1}^{h=n} z_{i,h}^{(1)} z_{h,k}^{(g-1)}.$$

En désignant par $z_{i,k}^{(0)}$ le nombre $\delta_{i,k}$, où $\delta_{i,i}=1$, $\delta_{i,k}=0$ pour $i \gtrless k$, on a, plus généralement, pour chacun des n^2 systèmes d'indices (i, k) et en désignant par l et par m l'un quelconque des nombres 0, 1, 2, ...

$$z_{i,k}^{(l+m)} = \sum_{h=1}^{h=m} z_{i,h}^{(l)} z_{h,k}^{(m)}.$$

Si $\operatorname{rec}(a_{i,k})$ représente l'élément qui correspond à l'élément $a_{i,k}$ dans le système réciproque du système formé par les n^2 éléments $a_{i,k}$, on a, en donnant à chacun des indices h et k une quelconque des valeurs 1, 2, ..., n,

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_{i,h} \operatorname{rec}(a_{i,k}) = \delta_{h,k};$$

on a aussi, en désignant par $\operatorname{adj}(a_{i,k})$ l'élément adjoint à l'élément $a_{i,k}$ dans le système formé par les n^2 éléments $a_{i,k}$ et par $|a_{ik}|$ le déterminant de ces n^2 éléments,

$$\operatorname{adj}(a_{i,k}) = |a_{i,k}| \operatorname{rec}(a_{i,k}).$$

Dans son beau Mémoire sur les diverses séries de Sturm inséré dans les *Monatsberichte* de l'Académie de Berlin pour février 1863, Kronecker a montré que pour chacun des n^2 systèmes d'indices $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, l'élément

$$\operatorname{rec}(z\,\delta_{i,k} - z_{i,k}^{(1)})$$

pouvait être représenté par la série entière en z^{-1},

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} z_{k,i}^{(r)} [z^{-1}]^{r+1}.$$

dont les coefficients sont précisément les éléments des systèmes résultant de la composition, répétée 1, 2, ..., r, ... fois, du système $(z_{k,i}^{(1)})$, $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, avec lui-même.

Cela revient à dire que la série

$$\sum_{r=0}^{r=\infty} \left[\sum_{i,k} (z_{i,k}^{(r)} x_i' y_i') \frac{1}{z^{r+1}} \right],$$

dont les coefficients $\sum_{i,k} z_{i,k}^{(r)} x_i' y_i'$ sont des formes bilinéaires des deux systèmes de n variables $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ et $y_1', y_2', \ldots, y_n'$, est la forme réciproque de la forme bilinéaire

$$z \sum_{k=1}^{k=n} x_k y_k - \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{k=1}^{k=n} z_{ik}^{(1)} x_i y_k.$$

De ce théorème on peut déduire la condition nécessaire et suffisante pour que, en composant un certain nombre de fois avec lui-même un système $(\zeta_{i,k}^{(1)})$ dont les n^2 éléments $\zeta_{i,k}^{(1)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ font partie d'un domaine naturel de rationalité et dont le déterminant n'est pas nul, on obtienne à nouveau le système d'où l'on est parti.

Il faut et il suffit que la forme réciproque de la forme bilinéaire

$$\sum_{i,k} [z\delta_{i,k} - \zeta_{i,k}^{(1)}] x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

soit le quotient d'une fonction entière de z par un binome de la forme $z^\nu - 1$, où ν est un entier quelconque.

A l'aide de cette proposition on peut former tous les systèmes

$$(\zeta_{ik}^{(1)}), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

qui, combinés ν fois avec eux-mêmes, donnent le système-unité

$$(\delta_{ik}), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On s'appuie, à cet effet, sur une propriété des formes bilinéaires de laquelle il résulte que $z^\nu - 1$ n'ayant pas de racine double, tous les éléments $\zeta_{ik}^{(1)}$ peuvent être mis sous la forme

$$\sum_{h=1}^{h=n} c_{ih} Z_h c_{hk}',$$

où les deux systèmes $(c_{i,k})$, $(c_{i,k}')$ sont des systèmes réciproques. Le nombre de fois ν qu'il faut combiner un système $(\zeta_{i,k}^{(1)})$ avec lui-même pour obtenir le système-unité $(\delta_{i,k})$ est le plus petit entier ν tel que l'on ait à la fois

$$Z_1^\nu = 1, \quad Z_2^\nu = 1, \quad \ldots, \quad Z_n^\nu = 1,$$

$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ étant les n quantités qui paraissent dans les n^2 relations

$$\zeta_{i,k}^{(1)} = \sum_{h=1}^{h=n} c_{i,h} Z_h c'_{h,k},$$

correspondant aux n^2 éléments du système $(\zeta_{i,k}^{(1)})$ considéré.

Kronecker établit plus généralement la condition nécessaire et suffisante pour qu'en composant avec lui-même, un certain nombre de fois, un système $(\zeta_{i,k}^{(1)})$ dont le déterminant n'est pas congru à zéro suivant un système premier de modules donnés, on obtienne un système congru, suivant ce système premier de modules, au système d'où l'on est parti.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que l'on puisse déterminer un entier ν tel que le produit du binome $z^\nu - 1$ par la forme réciproque de la forme bilinéaire

$$z \sum_{k=0}^{k=n} x_k y_k - \sum_{i,k} \zeta_{i,k}^{(1)} x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

soit une fonction de z congrue à une fonction entière de z, suivant le système premier de modules donnés.

Envisageons, par exemple, le système

$$(c_{h+1,k}) \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, m-1),$$

formé par les m^2 coefficients entiers $c_{h+1,k}$ de la partie indépendante de z dans la forme bilinéaire

$$z \sum_{k=0}^{k=m-1} x_k y_k - \sum_{k=1}^{k=m-1} x_{k-1} y_k - x_{m-1} \sum_{k=0}^{k=m-1} c_{m,k} y_k,$$

dont le déterminant est

$$F(z) = z^m - c_{m,m-1} z^{m-1} - c_{m,m-2} z^{m-2} - \ldots - c_{m,1} z - c_{m,0},$$

de sorte que, pour $r < m$, on ait

$$c_{r,k} = \delta_{r,k} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1).$$

En désignant par ν le plus petit entier pour lequel $z^\nu - 1$ est divisible par $F(z)$, il résulte du théorème démontré, que le système de nombres entiers

$$(c_{k+1,k}) \qquad (h, k = 0, 1, \ldots, m-1)$$

composé ν fois avec lui-même engendre le système-unité

$$(\delta_{i,k}), \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m).$$

Kronecker désigne ce système d'entiers $(c_{h+1,k})$ sous le nom de *système-unité impropre, appartenant à l'exposant* ν.

Kronecker (*L.*). — Réduction algébrique des faisceaux de formes bilinéaires. (1225-1237).

Soient deux fonctions bilinéaires

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_r; \; y_1, y_2, \ldots, y_s),$$
$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_r; \; y_1, y_2, \ldots, y_s)$$

des deux systèmes de variables $x_1, \ldots, x_r; y_1, y_2, \ldots, y_s$. Envisageons le faisceau de formes bilinéaires

$$u\varphi + v\psi,$$

où u et v sont deux indéterminées.

Si τ est le plus grand nombre entier tel que l'un au moins des déterminants d'ordre τ formés par les coefficients de la forme $u\varphi + v\psi$ soit différent de zéro, on aura, entre les r dérivées partielles de la fonction $u\varphi + v\psi$, prises par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, $r - \tau$ relations linéaires indépendantes dont les coefficients sont des fonctions homogènes entières des indéterminées u, v; et de même entre les s dérivées partielles de cette fonction $u\psi + v\psi$, prises par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_s$, on aura $s - \tau$ relations linéaires indépendantes dont les coefficients sont aussi des fonctions homogènes entières des indéterminées u, v.

Si l'on choisit ces relations linéaires indépendantes de manière que les dimensions de chacune d'entre elles par rapport aux indéterminées u, v, soient aussi petites que possible, les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_{r-\tau}, \overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots, \overline{m}_{s-\tau}$ qui mesurent ces dimensions ne changent pas lorsque l'on effectue une transformation linéaire quelconque simultanée des deux formes φ et ψ; ce sont donc des *invariants* du système de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$.

Soient $\frac{u'}{v'}, \frac{u''}{v''}, \cdots$ les valeurs du rapport $\frac{u}{v}$ pour lesquelles tous les déterminants d'ordre τ formés à l'aide des coefficients de la forme $u\varphi + v\psi$ s'annulent; ce sont aussi des invariants du système de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$.

Enfin, pour $\mu = 1, 2, \ldots, \tau$, désignons par $l_\mu^{(i)}$ le nombre qui indique combien de fois le facteur $uv^{(i)} - vu^{(i)}$ est contenu dans tous les déterminants d'ordre μ; ces nombres $l_\mu^{(i)}$ sont également des invariants du système de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$.

En posant, pour $k = 1, 2, \ldots, r - \tau$; $\lambda = 1, 2, \ldots, s - \tau$; $\mu = 1, 2, \ldots, \tau$,

$$2m_k + 1 = n_{k+\tau}^0,$$
$$2\overline{m}_\lambda + 1 = \overline{n}_{\lambda+\tau}^0,$$
$$l_\mu^{(\nu)} = n_1^{(\nu)} + n_2^{(\nu)} + \ldots + n_\mu^{(\nu)},$$

on a donc une suite d'invariants du système de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$, c'est-à-dire de nombres qui ne changent pas lorsqu'on transforme simultanément les deux formes φ et ψ de ce système par une substitution linéaire quelconque; ces invariants sont

$$\frac{u'}{v'}, \frac{u''}{v''}, \cdots; \quad n_{1+\tau}^0, n_{2+\tau}^0, \ldots, n_r^0; \quad \overline{n}_{1+\tau}^0, \overline{n}_{2+\tau}^0, \ldots, \overline{n}_s^0;$$
$$n_1', n_1'', \ldots; \quad n_2', n_2'', \ldots; \quad \ldots; \quad n_\tau', n_\tau'', \ldots.$$

Kronecker démontre que ces invariants forment le système complet des invariants du système de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$. A cet effet, il s'appuie sur

les propriétés de la forme réduite à laquelle on peut ramener tout système de formes bilinéaires.

M. Weierstrass avait déjà montré (¹) qu'un faisceau de formes bilinéaires

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik}) x_i y_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

dont le déterminant est différent de zéro, peut être ramené par une transformation linéaire, à la forme

$$\sum_{\mu,\nu} \left[(U + w^{(\nu)} V) \Phi_\mu^{(\nu)} + V \Psi_\mu^{(\nu)} \right] \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots),$$

où U et V sont des indéterminées et où $\Phi_\mu^{(\nu)}$, $\Psi_\mu^{(\nu)}$ sont les formes bilinéaires déterminées des nouvelles variables X, Y, savoir

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{k,\lambda} X_{k,\mu}^{(\nu)} Y_{\lambda,\mu}^{(\nu)}, \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, e_\mu^{(\nu)} - 1;\ k + \lambda = e_\mu^{(\nu)} - 1],$$

$$\Psi_\mu^{(\nu)} = \sum_{k,\lambda} X_{k,\mu}^{(\nu)} Y_{\lambda,\mu}^{(\nu)}, \qquad [k = 0, 1, 2, \ldots, e_\mu^{(\nu)} - 2;\ k + \lambda = e_\mu^{(\nu)} - 2],$$

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = 0, \qquad \text{pour} \qquad e_\mu^{(\nu)} = 1.$$

Kronecker étend ce théorème au cas où le déterminant du faisceau

$$\Sigma (ua_{ik} + vb_{ik}) x_i y_k$$

est nul; il suffit alors de remplacer par zéro, dans les formules de M. Weierstrass, pour chaque indice ν déterminé, tous les X et tous les Y dont le premier indice est $e_\mu^{(\nu)} - 1$, ainsi que la quantité $w^{(\nu)}$ correspondante.

Soit t un paramètre quelconque satisfaisant à l'unique condition que, si l'on envisage tous ceux des déterminants mineurs différents de zéro que l'on peut former à l'aide du système dont les éléments sont

$$\frac{d^2 (u\varphi + v\psi)}{dx_i\, dy_k} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, s);$$

ils soient encore différents de zéro pour $tu + v = 0$. Substituons aux deux systèmes de variables x, y deux nouveaux systèmes de variables X, Y liés linéairement aux premiers. Les deux formes bilinéaires φ et ψ se transformeront en deux formes

$$\sum_{\mu,\nu} \left[v^{(\nu)} \Phi_\mu^{(\nu)} + \Psi_\mu^{(\nu)} \right] \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots),$$

$$\sum_{\mu,\nu} \left[-u^{(\nu)} \Phi_\mu^{(\nu)} + \Psi_\mu^{(\nu)} \right] \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots),$$

(¹) *Monatsberichte*, mai 1868; mars 1874.

où

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{k,\lambda} X_{k,\mu}^{(\nu)} Y_{\lambda,\mu}^{(\nu)} \qquad [k+\lambda = e_\mu^{(\nu)} - 1;\quad k = 0, 1, \ldots, e_\mu^{(\nu)} - 1],$$

$$\Psi_\mu'^{(\nu)} = \sum_{k,\lambda} X_{k,\mu}^{(\nu)} Y_{\lambda,\mu}^{(\nu)} \qquad [k+\lambda = e_\mu^{(\nu)} - 2;\quad k = 0, 1, \ldots, e_\mu^{(\nu)} - 2],$$

de sorte que le système $[\varphi, \psi)$ est transformé en un système réduit $[\Phi, \Psi]$ que l'on peut envisager comme composé de systèmes *élémentaires* de formes

$$\left[v^{(\nu)}\Phi_\mu^{(\nu)} + t\Psi_\mu'^{(\nu)},\quad -u^{(\nu)}\Phi_\mu'^{(\nu)} + \Psi_\mu'^{(\nu)}\right].$$

En distinguant les systèmes élémentaires de formes où le nombre des variables de chacun des deux systèmes X et Y est le même de ceux où il n'est pas le même et, dans ce dernier cas, en distinguant à nouveau les systèmes élémentaires de formes où le nombre des variables du système X est supérieur d'une unité à celui du nombre des variables du système Y, des systèmes élémentaires de formes où le nombre des variables du système X est inférieur d'une unité à celui du nombre des variables du système Y, Kronecker prouve que le système réduit $[\Phi, \Psi]$ est entièrement caractérisé par le nombre de variables qui paraissent dans chacun des systèmes élémentaires de formes, par la valeur de t que l'on a choisie arbitrairement, avec la restriction dont il a été parlé plus haut, et par les valeurs des rapports $\frac{u'}{v'}, \frac{u''}{v''}, \ldots$.

Revenant ensuite aux systèmes quelconques de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$, Kronecker montre que deux systèmes de formes $[\varphi, \psi]$, $[\varphi', \psi']$ qui ont les mêmes invariants

$$\frac{u'}{v'}, \frac{u''}{v''}, \ldots;\quad n_{1+\tau}^0, n_{2+\tau}^0, \ldots, n_r^0;\quad \bar{n}_{1+\tau}^0, \bar{n}_{2+\tau}^0, \ldots, \bar{n}_s^0;$$
$$n_1', n_1'', \ldots;\quad n_2', n_2'', \ldots;\quad \ldots;\quad n_\tau', n_\tau'', \ldots,$$

se transforment en une seule et même forme réduite $[\Phi, \Psi]$, pourvu que l'on prenne pour t la même valeur dans les deux réductions. Le théorème annoncé est ainsi démontré : ces invariants forment le système complet des invariants du système de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$.

La méthode suivie par Kronecker lui permet de démontrer facilement plusieurs théorèmes concernant les invariants des formes bilinéaires. Ainsi l'on voit immédiatement que le nombre n des invariants d'un système quelconque de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$ est égal au nombre total $r+s$ des variables x et y. La différence entre le nombre des invariants n^0 et des invariants $\bar{n}^0$ est égale à la différence entre le nombre r des variables x et le nombre s des variables y. Si l'on range les invariants $l_\mu^{(\nu)}$ suivant les valeurs croissantes de μ, aucun de ces invariants n'est plus grand que la moyenne arithmétique des deux invariants entre lesquels il est situé.

L'étude des invariants d'un faisceau bilinéaire $u\varphi + v\psi$ est comprise dans celle qui précède. Il suffit de remarquer que deux systèmes de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$, $[a\varphi + b\psi, c\varphi + d\psi]$, où a, b, c, d sont des nombres quelconques dont le déterminant est différent de zéro, correspondent à un seul élément du faisceau bilinéaire, pour s'assurer que les invariants caractéris-

tiques du faisceau bilinéaire $u\varphi + v\psi$ sont, d'une part, les invariants n du système de formes bilinéaires $[\varphi, \psi]$ et, d'autre part, les expressions

$$\Omega^{(\nu)} = \frac{(u'v'' - u''v')(u'''v^{(\nu)} - u^{(\nu)}v''')}{(u'v''' - u'''v')(u''v^{(\nu)} - u^{(\nu)}v'')}, \qquad (\nu = 4, 5, \ldots).$$

Dans le cas particulier où le nombre des rapports $\frac{u'}{v'}, \frac{u''}{v''}, \cdots$ est plus petit que quatre, il n'y a pas de nombres $\Omega^{(\nu)}$; les seuls invariants du système de formes bilinéaires sont alors les nombres n.

Dans le cas général, les invariants Ω et n déterminent entièrement les formes binaires

$$(U - V)^{l'_\mu} V^{l''_\mu} U^{l'''_\mu} \prod_{(\nu = 4, 5, \ldots)} (U - V\Omega^{(\nu)})^{l^{(\nu)}_\mu} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots).$$
$$(p = 1, 2, \ldots).$$

Kronecker (*L.*). — Réduction algébrique des faisceaux de formes quadratiques. (1375-1388).

Dans les *Monatsberichte* de mai 1868, Kronecker a démontré que tout faisceau de formes quadratiques de n variables

$$u\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + v\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dont le déterminant est nul, peut être transformé par des substitutions linéaires en un faisceau de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{h=1}^{h=m} (uX_{h-1} + vX_h)X_{m+h} + \sum_{i,k} (u\alpha_{ik} + v\beta_{ik})X_{m+i}X_{m+k} \\ \qquad\qquad (i \leq k; \quad i, k = 1, 2, \ldots), \end{array} \right.$$

où $X_0, X_1, \ldots$ sont des fonctions linéaires et homogènes, indépendantes les unes des autres, des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dont les coefficients font partie du même domaine de rationalité que les coefficients de la forme quadratique, et où les coefficients $\alpha_{i,k}, \beta_{i,k}$ font aussi partie du même domaine de rationalité. Le déterminant de *tout* faisceau de la forme (1) est d'ailleurs égal à zéro.

Kronecker complète maintenant ce théorème, en démontrant qu'à tout faisceau de formes quadratiques dont le déterminant est nul,

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on peut faire correspondre un ou plusieurs faisceaux (F) de la forme

$$\sum_{p=1}^{p=M_q} (uX^{(q)}_{p-1} + vX^{(q)}_p)X_{p+M_q} \qquad (q = 1, 2, \ldots, L),$$

c'est-à-dire de la forme même du premier terme du faisceau (1), tels que si

l'on soustrait leur somme du faisceau considéré, on obtienne un faisceau

$$\sum_{g,h} (uA_{g,h} + vB_{g,h})X_g X_h \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, M),$$

à déterminant

$$|uA_{g,h} + vB_{g,h}| \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, M)$$

différent de zéro.

Les coefficients des fonctions linéaires homogènes X des n variables x_1, x_2, ..., x_n et les coefficients $A_{g,h}$, $B_{g,h}$ font partie du même domaine de rationalité que les éléments $a_{i,k}$, $b_{i,k}$. Les nombres L et M_1, M_2, ..., M_L sont entièrement déterminés dans chaque cas particulier.

On déduit facilement de ce théorème plusieurs conséquences importantes concernant les faisceaux de formes quadratiques de n variables.

Les dérivées partielles prises par rapport à x_1, x_2, ..., x_n de la fonction

$$\sum_{i,k} (ua_{ik} + vb_{ik})x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

sont liées par L relations indépendantes, où L est précisément le nombre de formes (F) du type considéré qu'il faut soustraire de la forme donnée

$$\sum_{i,k} (ua_{i,k} + vb_{i,k})x_i x_k,$$

pour obtenir une forme à déterminant différent de zéro. Les coefficients de ces L relations linéaires indépendantes contiennent les indéterminées u et v: les dimensions de ces coefficients sont respectivement les nombres M_1, M_2, ..., M_L qui indiquent de combien de termes est formée chacune des L formes bilinéaires précédentes (F).

Si r est le *rang* du système de coefficients $ua_{ik} + vb_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \ldots, n$), les nombres r, L, M, M_1, ..., M_L sont liés par la relation

$$r + L = M + M_1 + \ldots + M_L.$$

J. M.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ (1). — 3e série.

Tome XII, 1893.

Saint-Germain (*A. de*). — [R7g] (2) Extrait d'une lettre à M. Rouché : Note sur le problème de Mécanique donné à l'agrégation en 1892. (5-19).

---

(1) Voir *Bulletin*, XVII, p. 204.

(2) Les indications entre crochets sont celles de l'*Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques*.

Mouvement d'un point qui se meut sur une surface polie sous l'action d'une force tangente à cette surface et dérivant d'un potentiel. Propriétés géométriques.

Correspondance. — [L¹10*b*] M. Servais : Construction d'une parabole, connaissant un point, le diamètre passant par ce point et le centre de courbure correspondant. (19-20).

Lemoine (*E.*). — [K1*b*] Une règle d'analogies dans le triangle et la spécification de certaines analogies à une transformation dite *transformation continue*. (20-36).

Cette transformation résulte de la substitution de — A, π — B, π — C à A, B, C dans une formule F(A, B, C) = o entre les éléments d'un triangle. C'est ce que l'auteur appelle la *transformation continue en* A. L'article contient une étude approfondie de ces transformations, et de nombreux exemples. Ces transformations peuvent donner des formules nouvelles ou des éléments nouveaux, ou bien reproduire les résultats déjà acquis; c'est ce que montre une discussion très complète. En terminant, l'auteur fait ressortir que la transformation continue peut aussi s'appliquer au tétraèdre.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1893). — Énoncés des compositions. (36-37).

Humbert (*G.*). — [M¹3*c*] Sur l'orientation des systèmes de droites. (37-64, 123-136).

Laguerre et M. Humbert lui-même ont déjà fait connaître des propositions relatives aux directions des systèmes de droites dans un plan, dont on déduit de nombreuses conséquences. Dans ce Mémoire, M. Humbert se propose de démontrer un principe très général auquel peuvent se rattacher toutes ces propriétés; l'énoncé de ce principe ne saurait être reproduit dans cette analyse, sous peine de le rendre obscur en essayant de le condenser. Nous nous bornons à indiquer les divisions principales de l'étude de M. Humbert. I. Théorèmes fondamentaux. — II. Orientation de certains systèmes de tangentes. — III. Application à l'hypocycloïde à trois rebroussements. — IV. Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de courbes planes. — V. Lieu des foyers d'un faisceau tangentiel de coniques. — VI. Propriétés des foyers des courbes appartenant à un faisceau tangentiel. — VII. Extension à l'espace.

Carvallo (*E.*). — [R4*a*] Théorèmes de Mécanique. (65-72).

Applications fort intéressantes de la géométrie des vecteurs, et de la méthode de Grassmann. Toutes les propositions dont il s'agit peuvent être représentées symboliquement par la règle de multiplication des polynomes algébriques, bien qu'elles semblent, *a priori*, de nature très différente.

Dewulf (*Général E.*). — [L¹10*b*] Note de Géométrie. (72-74).

Construction d'une parabole, fondée sur un théorème qui a des conséquences et des applications nombreuses.

Gérard. — [Q1*b*] Sur la Géométrie non euclidienne. (74-84).

L'auteur prend pour base de son étude l'hypothèse que dans tous les triangles la somme des angles est inférieure à deux angles droits. Il arrive ainsi à établir un ensemble de formules dans lesquelles les fonctions hyperboliques jouent un rôle important.

Godefroy (*R.*). — [M[1]8*f*] Construction des centres de courbure de certaines courbes. (85-88).

Généralisation d'une construction connue du centre de courbure des coniques.

Amigues (*E.*). — [D3*b*α] Le reste de la série de Taylor. (88-92).

Démonstration d'une proposition de M. Darboux, relative à une fonction de variable imaginaire, déduite de l'intégrale curviligne qui exprime le reste, dans la méthode de Cauchy.

Weill (*M.*). — [M[1]8*e*] Propriétés d'une classe de courbes. (93-95).

Sur les tangentes à la courbe $y^m = x^p$ aux points où elle est coupée par une droite.

Concours d'admission a l'École Centrale en 1892 (Deuxième session). — Énoncés des compositions (96-99).

Genty (*E.*). — [L[2]4*b*] Solution, par la Géométrie vectorielle, du problème de Mathématiques spéciales donné au Concours d'agrégation des Sciences mathématiques en 1892. (99-106).

Problème relatif à l'ellipsoïde, et auquel les méthodes de la Géométrie vectorielle s'appliquent de la façon la plus heureuse.

Godefroy (*R.*). — [L[1]1*d*] Théorèmes sur les coniques (applications de la méthode des polaires réciproques). (106-116).

Étude de la transformation d'une conique par polaires réciproques, en prenant un cercle pour conique auxiliaire. Les résultats obtenus conduisent à d'élégants théorèmes sur les sections coniques.

Worontzoff. — [A3*b*] Sur les fonctions symétriques. (116-122).

Nombreuses formules concernant les fonctions symétriques des racines de deux équations.

Godefroy (*R.*). — [L^1 14*a*] Démonstration d'un théorème de Steiner et d'un théorème de Newton. (137-141).

Ces deux théorèmes sont les suivants : « 1° Le point de concours des hauteurs de tout triangle circonscrit à la parabole est sur la directrice; 2° Le centre de toute conique inscrite à un quadrilatère est sur la droite qui joint les milieux des diagonales.

Amigues (*E.*). — [D3*b*] Application du calcul des résidus. (142-148).

L'auteur s'est proposé d'étendre aux variables imaginaires une formule donnée par M. Weierstrass pour les variables réelles, et de montrer qu'au moyen de cette généralisation on peut trouver les coordonnées de certains centres de gravité par le calcul des résidus.

Correspondance. — M. Soudée; M. Marchand : Sur un article de M. Lemoine, relatif à la simplicité des constructions. (148-151).

Bertrand (*J.*). — [V9] Au sujet d'un livre récent sur Auguste Comte. (164-179).

Ce très intéressant article est extrait du *Journal des savants*. L'ouvrage dont il s'agit a pour titre : *Auguste Comte, fondateur du positivisme; sa vie, sa doctrine*, par le R. P. Gruber, S. J. (traduit de l'allemand). M. Bertrand s'est proposé, dit-il, de signaler quelques appréciations contestables, acceptées par l'auteur. On comprendra que par sa nature même cet article se refuse à une analyse sommaire.

Fouché (*Maurice*). — [A1*a*] Sur l'introduction des nombres négatifs. (164-179).

Dans le programme d'Agrégation pour 1893, figure pour la première fois une leçon intitulée : *Première leçon d'Algèbre; Introduction des nombres négatifs*. C'est ce qui a déterminé M. Fouché à publier la leçon par laquelle, à Sainte-Barbe, il ouvre depuis plusieurs année son Cours d'Algèbre. Il adopte la méthode qui consiste à considérer d'emblée les nombres négatifs comme généralisation de l'idée de quantité, sans rien emprunter à la Géométrie ni aux vérités d'ordre expérimental. Cette manière de voir, nous le savons, est très en faveur aujourd'hui, mais nous serions bien étonné s'il ne se produisait pas un jour une réaction à ce sujet, principalement en ce qui concerne le point de vue pédagogique. Ne pouvant examiner ici une question sur laquelle on discutera longtemps encore, nous nous bornerons à constater l'ordre et l'enchaînement de l'exposition présentée par M. Fouché. Ceux-là même qui ne sont pas d'accord avec lui sur le point de départ liront avec grand intérêt cette remarquable leçon, et trouveront à y gagner.

CORRESPONDANCE. — [$L^1 10b$] M. E.-N. Barisien : Sur la construction d'une parabole. (179-180).

Réveille (*J.*). — [$M^1 8g$] Sur un mode de génération des courbes anallagmatiques. (180-182).

Généralisation d'un résultat de M. Moutard sur les courbes anallagmatiques considérées comme enveloppes de cercles.

Réveille (*J.*). — [P1*e*] Des figures homothétiques qui ont une droite homologue commune et dont une courbe passe par un point fixe. (183-185).

Détermination d'une courbe sur laquelle se trouvent les points homologues du point fixe. Indication d'applications.

Mangeot (*S.*). — [$M^2 1a$, O5*g*] Sur les plans tangents à certaines surfaces algébriques. (185-188).

L'équation de la surface étant mise sous la forme $\sigma + \sigma' = 0$, M. Mangeot ramène la détermination du plan tangent en un point M à celle des plans polaires de ce point par rapport aux deux surfaces σ, σ'.

N.-I. LOBATCHEFFSKY. — [V9] Article sur la célébration du centenaire de sa naissance. (188-191).

Michel (*P.*). — [$L^2 13b$] Transformation omaloïdale des quadriques. (192-224).

L'auteur rappelle la définition des surfaces *omaloïdes*, étudiées notamment par MM. Sylvester, Cremona et Picart (ce dernier les a aussi appelées *unicursales*) et qui jouissent de la propriété de pouvoir être représentées point par point sur un plan. M. de Longchamps a montré que les quadriques à centre sont des surfaces omaloïdes. C'est de ces surfaces que s'occupe M. Michel dans le présent Mémoire, qui se divise en trois Parties : Transformation de l'ellipsoïde, transformation de l'hyperboloïde à une nappe; transformation de l'hyperboloïde à deux nappes.

Lévy (*Lucien*). — [A1*a*] Quelques observations sur une *Première leçon d'Algèbre*. (225-228).

Discussion de quelques points d'un article de M. Fouché, publié précédemment (*voir* plus haut).

Carvallo (*E.*). — [R7*b*] Sur les forces centrales. (228-231).

Application très simple de la méthode vectorielle à la détermination de la vitesse et de l'accélération.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1893. — Énoncés des compositions. (231-233).

Bossut (Louis). — [T2a] Étude de Statique physique. Calcul des actions mutuelles des solides en contact. (239-256).

Ce Mémoire semble contenir des vues nouvelles concernant la théorie de l'élasticité et la Mécanique des solides naturels. Nous donnons ici les titres de quelques-unes des subdivisions les plus importantes : Hypothèses; étude d'un faisceau de barres élastiques dans un même plan; transmission des pressions dans les solides isotropes; décomposition d'une force suivant les barres d'une gerbe; pression sur les surfaces d'appui; vues nouvelles à propos du solide invariable.

Balitrand. — [K6b] Sur un système de coordonnées tangentielles. (256-286).

L'auteur s'est proposé d'établir un ensemble de formules permettant d'étudier directement sur l'équation tangentielle les propriétés d'une courbe. Il commence par considérer les coordonnées tangentielles polaires d'une droite, en montrant comment on passe aux coordonnées ordinaires, et réciproquement. Les formules fondamentales sont ensuite établies dans les deux systèmes : puis il en fait application aux courbes algébriques, et retrouve ainsi un certain nombre de théorèmes importants connus, et quelques autres propositions qui semblent nouvelles. On remarquera particulièrement la notion des courbes *anallagmatiques tangentielles*. Enfin, l'article se termine par l'étude de quelques courbes célèbres, représentées au moyen des équations simples $p = a\varphi$, $p = \frac{a}{\varphi}$, $p = ae^{\varphi}$, $p^m = a^m \sin m\varphi$ dans son système tangentiel polaire; et par quelques applications aux développées et à l'hypocycloïde à trois rebroussements.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1893). — Énoncés des compositions. (286-289).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1893. — Énoncés des compositions. (290-291).

Saint-Germain (A. de). — [O5a] Sur une formule générale de la mesure des volumes. (291-293).

Étude fort intéressante concernant la formule dite *des trois niveaux*.

Bioche (Ch.). — [M¹5a] Sur les cubiques à point de rebroussement. (294-296).

Généralisation d'une propriété indiquée par Clebsch dans ses *Leçons de Geometrie*, et qui donne le point de rebroussement comme limite des points de contact de tangentes successives.

Réveille (*J.*). — [P1*e*] Des figures semblablement variables ayant un centre permanent de similitude, et dont une courbe passe par un point fixe. (297-300).

Les considérations présentées par M. Réveille permettent de résoudre immédiatement un assez grand nombre de questions, parmi lesquelles nous reproduisons la suivante, à titre d'exemple : L'enveloppe de l'asymptote d'une cissoïde qui est tangente à un cercle fixe passant par son point de rebroussement est une parabole.

Jablonski (*E.*). — [A3*a*α] Démonstration du théorème de d'Alembert. (301-304).

Cette nouvelle démonstration s'appuie sur un lemme que l'auteur démontre en s'appuyant sur un théorème de Liouville relatif aux fonctions holomorphes. Il déclare lui-même qu'il serait désirable qu'on pût établir ce lemme d'une manière plus élémentaire.

Laurent (*H.*). — [B3*d*] Démonstration d'une formule qui donne, sous forme explicite, la résultante de plusieurs équations algébriques. (305-315).

La recherche de la résultante, dit l'auteur, a jusqu'ici été subordonnée à la théorie des fonctions symétriques. Dans son article, il fait au contraire dépendre la théorie des fonctions symétriques de celle de l'élimination. Mais, même dans l'ancienne théorie, on n'était pas parvenu à mettre la résultante sous forme explicite, ce à quoi il parvient; résultat fort important au point de vue théorique, mais non pas dans la pratique, comme il le reconnaît lui-même d'avance.

Laurent (*H.*). — [A3*c*] Reconnaître si un polynome à plusieurs variables peut être décomposé en facteurs entiers. (315-321).

Le titre indique le but que s'est proposé l'auteur, et qu'il atteint par un calcul d'une extrême condensation, ne se prêtant pas à une analyse.

Concours d'admission a l'École centrale en 1893 (Première session). — Énoncés des compositions. (321-325).

Saint-Germain (*A. de*). — [R8*c*γ] Solution du problème de Mécanique proposé au Concours d'agrégation de 1893. (325-330).

Mouvement d'une plaque pesante assujettie à des conditions déterminées.

Barisien (*E.-N.*). — [L[1]18*c*] École navale (Concours de 1893); Solution de la question de Géométrie analytique. (330-336).

Sur un système de paraboles circonscrites à un triangle.

D'Ocagne (*Maurice*). — [P4*b*] Sur une classe de transformation dans le triangle et notamment sur certaine transformation quadratique birationnelle. (337-352).

Cet article se rattache à une précédente étude de l'auteur sur les coordonnées générales, publiée dans le même recueil (*voir* XI₁, p. 72). Il se divise de la manière suivante : I. Généralités. — II. Étude d'une transformation quadratique birationnelle particulière. En terminant, M. d'Ocagne indique une construction nouvelle, et très intéressante au point de vue pratique, d'une ellipse dont on donne deux diamètres conjugués.

Concours d'admission a l'École centrale en 1893 (Deuxième session). — Énoncés des compositions. (352-355).

Laurent (*H.*). — [B3*d*] Sur l'élimination. (355-359).

Complément d'un précédent article publié dans le même volume, p. 305-315 (*voir* plus haut); réponse à quelques objections au devant desquelles va l'auteur, et correction d'une faute d'impression.

Sondat (*P.*). — [K6*a*] sur un système de coordonnées triangulaires. (360-387, 503-519).

Développement d'un système de coordonnées indiqué par Chasles dans sa *Géométrie supérieure* (3ᵉ Section, Chap. XXIII, XXIV). Nous donnons les principales divisions du Mémoire, qui sont les suivantes : Coordonnées du point; coordonnées de la droite; équations de la droite; équations du point: équations du cercle circonscrit au triangle de référence; équation de la conique; cercle des neuf points; conique inscrite dans le triangle de référence; cas de la parabole; conique circonscrite; construction de coniques par points et tangentes. L'article se termine par un certain nombre de théorèmes et de problèmes, élégamment traités par l'emploi des coordonnées dont il s'agit.

Cazamian (*André*). — [M¹5*cα*] Sur un lieu géométrique et ses applications. (387-403).

L'auteur s'est proposé de rattacher les uns aux autres un certain nombre de problèmes, qui paraissent au premier abord bien différents, et où l'on trouve comme lieu une strophoïde droite ou oblique. Il part de la proposition générale suivante : A, B, C étant trois points fixes dans un plan, le lieu des points M tels que la bissectrice (intérieure ou extérieure) en M du triangle AMB passe par C est une strophoïde ayant en C son point double. De là un grand nombre d'applications immédiates et d'intéressantes applications, notamment aux coniques homofocales.

J. S. — [L¹18*c*] Concours d'admission à l'École centrale en 1892 (deuxième session); solution du problème de Géométrie analytique. (403-407).

Famille de coniques satisfaisant à certaines conditions données.

Delens (*P.*). — [M¹3*e*] Sur une généralisation d'un théorème de Newton. (407-411).

Ce théorème concerne le centre des moyennes distances des intersections d'une droite avec une courbe algébrique. M. Delens l'étend au cas où l'on remplace la droite par une ligne d'ordre supérieur.

Bioche (*Ch.*). — [O 4*d*] Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe. (412-419).

Généralisation de diverses propriétés des développables qui passent par une courbe. Cette question a fait l'objet d'une communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. CX, p. 515) et de plusieurs Notes présentées à la Société mathématique de France.

Jamet (*V.*). — [H5*jα*] Sur une série fonctionnelle. (419-421).

Formation d'une fonction qui est une intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = F(x)y$, $F(x)$ étant une fonction finie et continue dans une certaine région. L'auteur cite le Mémoire de M. Picard sur les équations aux dérivées partielles (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. VI) comme l'ayant conduit à cette étude.

Mangeot (*S.*). — [B8*a*] Sur le discriminant des formes cubiques ternaires. (421-424).

L'auteur arrive à la formation du discriminant par la considération des cubiques à point double.

Genty. — [L¹17*a*] Solution géométrique de la composition de Mathématiques donnée au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1892. (425-426).

Sur une hyperbole équilatère et un cercle; solution très simple, fondée sur une propriété des droites qui coupent harmoniquement deux coniques.

CORRESPONDANCE. — MM. Audibert, Farjon : Rectification d'une solution du problème donné à l'École Normale supérieure en 1892. — M. Réveille : Au sujet de la solution de la question 1534, par M. Barisien. (426-428).

Maillard (*S.*). — [L¹10*b*] Note sur la parabole. (428-430).

Construction d'une parabole, connaissant un point A, le diamètre AX et le centre de courbure O en A.

Balitrand. — [M¹5*cα*, 3] Sur la strophoïde et la cissoïde. (430-431).

L'article débute par une étude très complète, à la fois analytique et géométrique, de la strophoïde, dont l'auteur donne de nombreuses propriétés. En suivant une marche analogue, il en fait de même pour la cissoïde; à noter cette proposition par laquelle il termine : il n'existe pas de quadrilatère complet véritable inscrit dans la cissoïde.

Balitrand. — [L[1]6*a*] Construction du cercle osculateur en un point d'une hyperbole. (451-453).

Par des considérations analytiques, M. Balitrand arrive à une construction géométrique assez simple, et étend sa méthode au cas de la parabole.

Carvallo (*E.*). — [R4*a*] Nouveau théorème de Mécanique. (454-456).

L'auteur appelle *image d'une force sur un plan* le point où elle perce ce plan, ce point ayant une masse égale à la projection de la force sur la normale au plan; et *image d'un système de forces sur un plan*, le centre de gravité des images des forces du système. Son théorème est le suivant : « Pour que deux systèmes de forces soient équivalents, il faut et il suffit que, sur tout plan, ils aient même image ».

Audibert. — [L[1]18*d*β] Concours d'admission à l'École Centrale en 1893 (Première session); solution de la question de Géométrie analytique. (456-459).

Sur un faisceau d'hyperboles équilatères.

Concours général de 1891 (suite et fin). — Énoncés des compositions. (459-461).

Concours pour les bourses de licence en 1891. — Énoncé. (461).

Concours pour les bourses de licence en 1892. — Énoncé. (461-462).

Concours pour les bourses de licence en 1893. — Énoncé. (462-463).

Concours d'admission à l'École spéciale militaire en 1893. — Énoncés des compositions. (463-464).

Audibert. — [M[3]5*h*] Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1893; solution. (464-468).

Questions diverses relatives à une courbe gauche.

D'Ocagne (*Maurice*). — [A 1 *b*, X 3] Problème d'Algèbre relatif à la Nomographie. (469-476).

Considérations algébriques relatives à la *méthode des points isoplèthes*, développée par l'auteur dans sa Nomographie. Il s'est ici proposé d'examiner surtout certains cas simples.

Concours d'admission a l'École navale en 1891. — Énoncés des compositions. (476-479).

Concours d'admission a l'École navale en 1892. — Énoncés des compositions. (479-482).

Concours d'admission a l'École navale en 1893. — Énoncés des compositions. (482-484).

Ader (*H.*). — [N²1 *a*] Sur les congruences de droites et la courbure des surfaces. (484-489).

Démonstration directe d'une propriété des congruences de droites. Examen des cas où toutes les droites sont normales à une surface.

Concours général de 1892. — Énoncés des compositions. (490-497).

Concours d'admission a l'École spéciale militaire en 1892. — Énoncés des compositions. (497-499).

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1894). — Programme des questions d'Analyse et de Mécanique d'où sera tiré le sujet d'une des compositions écrites; sujets de leçons. (499-503).

Audibert. — [L¹ 18 *d* β] Concours d'admission à l'École centrale en 1893 (Deuxième session); solution de la question de Géométrie analytique. (520-522).

Questions relatives à un système de coniques.

Exercices.

Questions proposées : 1649 à 1654. (1*-2*).

Lez. — Solution de la question 1385. (2*-4*).

Questions de maximum ou minimum relative à l'ellipse.

Soudée. — Solution de la question 1626. (4*-6*).

Théorème relatif à une série.

Genty (*E.*). — Solution de la question 399. (6*-9*).

Propriété du tétraèdre, et de plans parallèles aux faces, menés par un poi donné.

Genty (*E.*). — Solution de la question 482. (9*-10*).

Propriété de trois points remarquables du tétraèdre.

Juel. — Solution de la question 793. (10*-11*).

Recherche dans un plan de deux systèmes de neuf points conjugués.

Genty (*E.*). — Solution de la question 946. (11*-14*).

Sur deux surfaces transformées l'une de l'autre par rapport à un pôle.

Genty (*E.*). — Solution de la question 1478. (15*-17*).

Lieu relatif à une quadrique et à trois de ses plans diamétraux conjugués.

Juel. — Solution de la question 1484. (17*-18*).

Sur la théorie des cycles et des divisions homographiques.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question 1534. (18*-25*).

Lieu des foyers des coniques doublement tangentes à deux cercles.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question 1541. (25*-27*).

Lieu des points tels que les quatre normales menées à une ellipse forme un faisceau harmonique.

*X****. — Solution de la question 1547. (27*-29*).

Propriété d'une ellipse et de deux diamètres conjugués.

Genty (*E.*). — Solution de la question 1586. (29*-30*).

Propriétés de la trajectoire oblique des génératrices d'un cône.

Cesàro (*E.*) — Solution de la question 1626. (30*-32*).

Théorème relatif à une série (*voir* plus haut).

Lemaire (*J.*). — Solution de la question 1637. (33*-34*).

Propriétés d'une droite rencontrant un limaçon de Pascal.

Lemaire (*J.*). — Solution de la question **1638**. (34^*-35^*).

Sur un cercle et un faisceau de cardioïdes.

Lemaire (*J.*). — Solution de la question **1639**. (35^*-36^*).

Sur une cardioïde et un cercle.

Lemaire (*J.*). — Solution de la question **1640**. (36^*-40^*).

Lieu des foyers des coniques qui touchent deux droites fixes, chacune en un point fixe.

Sondat (*R.*). — Solution de la question **1642**. (40^*).

Sur une conique inscrite à un triangle.

Sondat (*R.*). — Solution de la question **1646**. (40^*-42^*).

Sur trois triangles homologiques par rapport à un axe.

Michel (*P.*). — Solution de la question **1653**. (43^*).

Propriété du cercle osculateur en un point d'une parabole.

*X****. — Solution de la question **1649**. (43^*).

Lieux géométriques, dans l'espace, relatifs à l'ellipse.

QUESTIONS PROPOSÉES : **1655** à **1657**. (52^*-53^*).

Brocard (*H.*). — Solution de la question **1569**. (53^*).

Note complémentaire concernant la *Kreuzcurve*.

Brocard (*H.*). — Solution de la question **954**. (54^*-55^*).

Lieu relatif à une parabole et une circonférence.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question **1419**. (55^*-58^*).

Questions relatives à un triangle et aux parallèles aux côtés, menées par un point P.

Borletti (*François*). — Solution des questions **1411**, **1431**. (58^*-59^*).

Limite de $\frac{1}{n}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^p+\left(\frac{n}{n+2}\right)^p+\ldots\right]$ pour $n=\infty$.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question **1517**. (60^*-62^*).

Propriété d'une parabole et d'une autre conique.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la question 1525. (62-

Propriété d'une ellipse et de deux diamètres conjugués.

A. L.

SOCIETA REALE DI NAPOLI. RENDICONTO DELL' ACCADEMIA DELLE SCIE SICHE E MATEMATICHE; Napoli, in-4°.

Année I, 1862.

Trudi (*N.*). — Sur l'enveloppe des cordes de grandeur co dans les courbes du 2e ordre. (7-11).

Battaglini (*G.*). — Sur quelques propriétés des lignes du gré. (24-32).

Relations entre une conique et un triangle.

Fergola (*E.*). — Sur la résolution par séries des équa trois termes de degré quelconque. (39-54).

Battaglini (*G.*). — Sur les surfaces du 2e degré. (79-88).

Relation entre une quadrique et un tétraèdre.

Battaglini (*G.*). — Note sur les déterminants. (101-112).

La somme des mineurs d'un ordre donné peut être exprimée par u déterminant de même ordre.

Trudi (*N.*). — Sur une transformation des formes quadrat (113-118).

Réduction à la forme canonique.

De Gasparis (*A.*). — Règle pour la résolution du problè Kepler. (131-134).

Trudi (*N.*). — Sur quelques formules de développement. 143).

Développement en série des fonctions rationnelles fractionnaires.

Trudi (*N.*). — Sur le procédé du plus grand diviseur co entre deux fonctions entières d'une variable. (153-160).

Battaglini (*G.*). — Note sur quelques questions de Géométrie. (168-178).

Lieu des centres des coniques circonscrites ou inscrites à un quadrilatère.

Battaglini (*G.*). — Note de Géométrie. (189-196).

Lieu des centres des coniques circonscrites à un triangle et dont les longueurs des axes satisfont à une certaine condition.

Trudi (*N.*). — Étude sur une élimination singulière, avec application à la recherche de la relation entre les éléments de deux coniques, l'une inscrite, l'autre circonscrite à un polygone, et aux théorèmes correspondants de Poncelet. (198-212).

De Gasparis (*A.*). — Sur la détermination des orbites planétaires. (215-219).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes géométriques. (220-230).

Relations métriques dans les formes fondamentales de première espèce.

Année II, 1863.

De Gasparis (*A.*). — Sur une nouvelle équation à employer dans la première approximation du calcul de l'orbite d'une planète. (36-44).

De Gasparis (*A.*). — Sur un jugement de M. le professeur Bellavitis. (45-47).

L'auteur soutient ici sa règle pour résoudre le problème de Kepler.

Battaglini (*G.*). — Sur une question de maxima et de minima. (56-63).

Quadriques par huit points et dont le produit des carrés des axes est un maximum ou un minimum.

Capocci (*E.*). — Observations originelles de Mars près de l'opposition d'octobre 1862. (64-65).

Battaglini (*G.*). — Sur la dépendance équianharmonique. (88-97).

C'est la projectivité.

Battaglini (*G.*). — Sur la dépendance du 1er ordre. (122-129).

C'est encore la projectivité, envisagée comme correspondance, dans laquelle à tout point de l'une des formes correspond un élément et un seul de l'autre, et qui ne diffère naturellement de la dépendance équianharmonique. Ici l'auteur examine plus particulièrement le cas des formes superposées.

Battaglini (*G.*). — Sur les séries de courbes d'indice quelconque. (149-153).

Battaglini (*G.*). — Sur les involutions des divers ordres. (158-161).

Trudi (*N.*). — Sur le critère des équimultiples employé par les anciens géomètres dans la théorie des proportions. (235-239).

Battaglini (*G.*). — Sur la dépendance duplo-harmonique. (240-249).

C'est une transformation quadratique birationnelle.

Fergola (*E.*). — Sur certaines propriétés des solutions entières et positives de l'équation

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n.$$

(262-268).

De Gasparis (*A.*). — Sur une équation qui a lieu dans la théorie du mouvement parabolique des comètes. (293-299).

De Gasparis (*A.*). — Observations de la 5e comète de 1863. (300-301).

Fergola (*E.*). — Éléments de l'orbite de la 5e comète de 1863. (302-303).

Année III, 1864.

Battaglini (*G.*). — Sur les divisions homographiques imaginaires. (37-47).

La méthode employée par l'auteur est celle de déduire de certaines propriétés sur la droite ponctuelle autant de propriétés sur le plan, par la substitution de $\mu + i\nu$ au paramètre du point.

Brioschi (*F.*). — Sur une nouvelle formule dans le Calcul intégral. (63-68).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires du 1er et du 2e degré. (76-85).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires du 3e degré. (109-118).

Trudi (*N.*). — Sur un déterminant plus général que celui que l'on appelle *déterminant des racines d'une équation,* et sur les fonctions symétriques complètes de ces racines. (121-134).

Trudi (*N.*). — Sur le déterminant des constantes arbitraires qui complètent les intégrales des équations linéaires, autant différentielles qu'aux différences finies. (147-154 et note : 175-177).

Battaglini (*G.*) — Sur les formes binaires cubiques. (163-174).

Système de deux de ces formes.

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires du 4e degré. (201-213).

Fergola (*E.*). — Observations de la planète *Psychès* et de la comète découverte le 5 juillet par M. Tempel à Marseille. (218-219).

De Gasparis (*A.*). — Sur la détermination des orbites des étoiles doubles. (210-223).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires biquadratiques. (234-241).

Covariants associés à une forme biquadratique.

De Gasparis (*A.*). — Observations de la 3e comète de 1864 et de la planète *Isis*. (242-243).

De Gasparis (*A.*). — Sur la détermination des orbites des étoiles doubles par quatre observations. (247-252).

Fergola (*E.*). — Sur une proposition élémentaire de Calcul intégral. (256-259).

Il est impossible de satisfaire à une même équation différentielle d'ordre n par deux intégrales distinctes.

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires biquadratiques en involution. (263-272).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires mixtes du 3ᵉ et du 4ᵉ degré. (282-292).

Année IV, 1865.

De Gasparis (*A.*). — Sur la 4ᵉ et le 5ᵉ comète de 1864. (23-24).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes géométriques de deuxième espèce. (44-57).

Relations métriques.

De Gasparis (*A.*). — Observations de la planète *Massalia*. (78).

De Gasparis (*A.*). — Rotation d'un système variable de trois masses qui vérifient la loi des aires. (107-118, 151-162, 176-180 et 223-225).

Fergola (*E.*). — Détermination des erreurs constantes de l'équatorial de Merz à l'observatoire royal de Naples. (119-124).

De Gasparis (*A.*). — Observations d'une nouvelle planète. (148-150).

De Gasparis (*A.*). — Notices et observations de la nouvelle planète *Béatrix*. (196-197).

De Gasparis (*A.*). — Sur une fonction qui présente le cas d'un minimum dans le problème des trois corps. (297-301).

C'est la fonction

$$2c\frac{d}{dt}\frac{dt}{d\varphi} - 2ft + g;$$

f et g sont des constantes, c est la constante des aires, φ l'angle que forme au temps t l'intersection du plan des masses et du plan invariable du système avec une droite fixe située dans ce dernier plan.

Fergola (*E.*). — Observations et éléments de l'orbite de la planète *Clios*. (315-316).

De Gasparis (*A.*). — Sur la détermination de l'orbite des deux nouvelles planètes *Clios* et *Béatrix*. (326-336).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires des quatre premiers degrés, appartenant à une forme ternaire quadratique. (351-357).

L'auteur envisage le rapport des deux variables d'une binaire, comme paramètre de l'élément d'une forme ternaire quadratique.

De Gasparis (*A.*). — Autres recherches sur la rotation d'un système de trois masses qui vérifient la loi des aires. (361-368).

Battaglini (*G.*). — Sur une courbe de la 3e classe et du 4e ordre. (399-407).

Courbe dont l'hypocycloïde tricuspidale est un cas particulier.

Fergola (*E.*). — Recherche des éléments les plus probables de l'orbite de *Clios*. (414-420).

Année V, 1866.

De Gasparis (*A.*). — Observations de la comète de Tempel. (18).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires des quatre premiers degrés, appartenant à une forme ternaire quadratique. Note IIe. (35-41).

Rubini (*R.*). — Sur certaines formules relatives à des déterminants. (109-115).

De Gasparis (*A.*). — Sur la rotation d'un système de trois masses qui vérifient la loi des aires. Continuation des Notes précédentes. (116-121).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes binaires des quatre premiers ordres appartenant à une forme ternaire quadratique. Note IIIe. (141-149).

De Gasparis (*A.*). — Mouvement d'un système de points matériels situés dans un plan, autour du centre gravité. (153-159).

Battaglini (*G.*). — Sur les systèmes de droites du 1er ordre. (194-208).

Battaglini (*G.*). — Observation sur une formule relative à l'électromètre bifilaire. (265-267).

Palmieri (*L.*). — Sur la récurrence des étoiles filantes, en août 1866. (293-294).

Battaglini (*G.*). — Sur les moments géométriques du 1er degré. (341-352).

Établissement de la théorie des moments sans aucune considération de force.

De Gasparis (*A.*). — Essai de quelques formules pour le calcul de l'orbite de la planète *Sylvia*. (403-407 et 433-437).

Trudi (*N.*). — Sur un théorème pour le développement en série des fonctions rationnelles fractionnaires. (446-454).

Année VI, 1867.

De Gasparis (*A.*). — Éléments elliptiques de l'orbite de la planète *Sylvia*. (43-51).

De Gasparis (*A.*). — Seconde détermination de l'orbite de la planète *Sylvia*. (73-83).

Palmieri (*L.*). — Sur l'éclipse annulaire du 6 mars de cette année. (85).

Battaglini (*G.*). — Sur les formes ternaires quadratiques. (103-106 et 365-367).

De Gasparis (*A.*). — Orbites de *Sylvia* et de la première comète de 1867, observations de la deuxième comète de 1867. (132-136).

Battaglini (*G.*). — Sur la Géométrie imaginaire de Lobatchewsky. (157-187).

De Gasparis (*A.*). — Sur le calcul de la valeur de la fonction $\sum \frac{1}{\Gamma(x)}$. (276-283).

Année VII, 1868.

De Gasparis (*A.*) — Sur deux théorèmes relatifs aux déterminants à trois indices, et sur une autre manière de former les éléments d'un déterminant à m indices. (118-121).

Les indices des termes peuvent être formés par les séries des indices des termes d'une forme $(x_1 x_2 \ldots x_n)^m$.

Année VIII, 1869.

Battaglini (*G.*). — Sur la composition des forces. (22-32).

Battaglini (*G.*). — Sur la théorie des moments. (87-94).

Battaglini (*G.*). — Sur les séries de systèmes de forces (130-138).

Dans ces trois Mémoires, l'auteur traite ces questions relatives à l'équilibre des systèmes invariables, au point de vue de la Géométrie de Plücker.

Année IX, 1870.

De Gasparis (*A.*). — Sur la planète *Dice*. (34-42).

Battaglini (*G.*). — Sur le mouvement géométrique infinitésimal d'un système rigide. (89-100).

Battaglini (*G.*). — Sur le mouvement géométrique fini d'un système rigide. (142-150).

En suivant toujours la Géométrie de Plücker l'auteür étudie, dans ces deux Mémoires, la Cinématique des systèmes invariables. Il donne aussi l'expression des variations infinitésimales et des variations finies des coordonnées homogènes d'un point.

Année X, 1871.

Nobile (*A.*). — Relation abrégée des observations faites pendant l'éclipse totale de Soleil du 22 décembre 1870. (31-33).

Battaglini (*G.*). — Sur la théorie des moments d'inertie. (52-62).

Battaglini (*G.*). — Sur le mouvement d'un système de forme invariable. (104-113).

L'auteur étudie dans ces deux Mémoires la Dynamique des systèmes invariables par la même méthode appliquée dans les Mémoires précédents, à la Statique et à la Cinématique, c'est-à-dire suivant les vues de Plücker.

De Gasparis (*A.*). — Orbite du planétoïde 107 *Camilla*. (62-63).

Fergola (*E.*). — Sur certaines oscillations diurnes des instruments astronomiques et sur une cause probable de leur apparence. (166-176).

De Gasparis (*A.*). — Sur le calcul des orbites des étoiles doubles. (231-233).

Année XI, 1872.

De Gasparis (*A.*). — Sur quelques phénomènes spectraux vus pendant l'éclipse du 22 décembre 1870, et observés de nouveau dans l'éclipse du 12 décembre 1871. (18-20).

Année XII, 1873.

Fergola (*E.*). — Sur quelques valeurs de la latitude de Rome. (58).

De Gasparis (*A.*) et *Nobile* (*A.*). — Comète de Tempel. Observations. (94-95).

Année XIII, 1874.

De Gasparis (*A.*) — Observations de la comète de Winnecke faites à l'observatoire royal de Naples. (48).

De Gasparis (*A.*). — Observations spectroscopiques sur la comète de Coggia. (101-102).

Année XIV, 1875.

Salvatore-Dino (*N.*). — Quelques applications analytiques de la méthode des caractéristiques. (95-102).

Traitement analytique de la méthode de Chasles.

Salvatore-Dino (*N.*). — Rectification au Mémoire précédent. (120).

D'Ovidio (*E.*). — Sur quelques lieux et enveloppes du 1[er] et du 2[e] degré en Géométrie projective. (103-114).

Lieux et enveloppes où entre la considération de distances (ou d'angles). L'auteur les traite en employant la définition projective de distance (ou d'angle).

Salvatore-Dino (*N.*). — Sur les coniques circonscrites et sur les coniques conjuguées à un triangle. (134-141).

Enveloppe d'un système de coniques semblables et ayant l'une ou l'autre des propriétés mentionnées dans le titre.

Nobile (*A.*). — Essai d'une nouvelle méthode pour l'observation des distances des étoiles multiples. (171-207).

Année XV, 1876.

Nobile (*A.*). — Sur les deux étoiles multiples 1263Σ et σ Couronne. (21-31).

Battaglini (*G.*). — Sur l'affinité circulaire non euclidienne. (219-224).

L'affinité circulaire n'est autre chose que la *Kreisverwandschaft* de Möbius, et, par conséquent, ne diffère pas de la transformation par rayons vecteurs réciproques. La propriété qui est envisagée ici comme caractéristique est celle qu'aux cercles de l'un des plans correspondent des cercles dans l'autre. L'auteur établit les formules pour le cas où l'absolu est une conique quelconque et donne la construction des points correspondants.

Année XVI, 1877.

De Gasparis (*A.*). — Autre solution numérique du problème dit *de Kepler*. (17-21).

Nobile (*A.*). — Observations du système 748Σ (Trapèze d'Orion). (75-88).

Amanzio (*D.*). — Sur le développement en série des racines d'une équation algébrique quelconque. (122-138 et 143-158).

Nobile (*A.*). — Observations et réflexions sur les systèmes suivants d'étoiles multiples : binaires 1263Σ, 634Σ, 54 Lion; triples 1998Σ, 2278Σ, 2323Σ, 2637Σ, 2703Σ. (207-226).

Année XVII, 1878.

Janni (*V.*). — Sur une formule de Waring. (27-31).

Démonstration de la formule qui donne l'expression de la somme des puissances semblables des racines.

Bonolis (*A.*). — Détermination graphique des moments d'inflexion sur les appuis placés à différents niveaux d'une poutre continue composée. (92-105).

Mollame (*V.*) — Sur les coordonnées de la plus courte distance entre deux droites, par rapport à trois axes obliques. (106-110).

Janni (*V.*). — Sur la résolution des équations numériques. (138-141).

RENDICONTI DEL CIRCOLO MATEMATICO DI PALERMO, in-8°.

T. III; 1889.

Bertini (*E.*). — Sur les courbes fondamentales des systèmes linéaires de courbes planes algébriques. (5-21).

Soit S un système linéaire ∞^x de courbes de genre p et d'ordre n, dans lequel les points fondamentaux soient tout à fait indépendants, et soient r_i les multiples de ces points. On trouve aisément

$$\Sigma r_i^2 = n^2 + 1 - p - x,$$
$$\Sigma r_i = 3n - 1 + p - x.$$

Une courbe est appelée *fondamentale* lorsqu'elle n'est pas rencontrée en des points variables par les courbes du système. L'auteur démontre plusieurs propriétés de ces courbes, en particulier le théorème suivant :

« Tout groupe de i (> 1) courbes fondamentales est coordonné à un groupe de i points fondamentaux. Chaque courbe du groupe a en tous les points du groupe coordonné une même multiplicité s, exception faite pour un de ces points où sa multiplicité est $s + 1$ ou $s - 1$. En tous les points d'un groupe non coordonné la courbe a une même multiplicité σ; ces nombres s et σ sont les mêmes pour toutes les courbes du groupe. »

De ce théorème, l'auteur déduit le théorème de M. Cremona :

« Si un système homaloïdique a α_1 points fondamentaux simples, α_2 doubles, ..., et si ses courbes fondamentales sont β_1 droites, β_2 coniques, ..., les nombres α sont égaux aux nombres β (pouvant aussi être pris dans un ordre différent). »

Gerbaldi (*F.*). — Un théorème sur la hessienne d'une forme binaire. (22-26).

Si tous les points d'une forme sont réels et distincts, sa hessienne a tous ses points imaginaires et ne prend que des valeurs négatives; si, tous les points de la forme étant encore réels, il y en a de multiples, tout point $r^{-\text{uple}}$ de la forme est $2(r-1)^{-\text{uple}}$ pour la hessienne, qui n'a pas d'autres points réels et ne prend que des valeurs négatives. Si la hessienne a tous ses points imaginaires et si elle est toujours positive, la forme a aussi tous ses points imaginaires.

Castelnuovo (*G.*). — Une application de la Géométrie énumérative aux courbes algébriques. (27-37).

Le nombre des espaces S_r (de r dimensions) rencontrant en $r+2$ points une courbe C_p^n de genre p et d'ordre n appartenant à un espace $S_{2(r+1)}$ est

$$\binom{n-r-1}{r+2} - p\binom{n-r-3}{r} + \binom{p}{2}\binom{n-r-5}{r-2} - \dots$$

La méthode suivie par l'auteur pour établir ce théorème et les autres de cette Note est fondée sur la considération successive des dégénérations d'une courbe C_p^{n+1} en une C_p^n et en une droite qui la rencontre en un, deux, ... points.

Voici un des autres théorèmes :

« Le nombre des espaces S_{s-1} ayant s contacts simples avec une C_p^n de S_s est

$$2^s\left[\binom{n-s}{s} + \binom{n-s-1}{s-1}p + \binom{n-s-2}{s-2}\binom{p}{2} + \dots\right].$$

Par une méthode semblable, l'auteur démontre aussi que :

Le nombre des espaces S_{s-1} renfermant s rayons d'une surface réglée Γ_p^n de S_s est

$$\binom{n-s+1}{s} - p\binom{n-s-1}{s-2} + \binom{p}{2}\binom{n-s-3}{s-4} - \dots$$

La Note se termine par la recherche du nombre des groupes communs à deux involutions rationnelles sur une courbe de genre p.

Vivanti (*G.*). — Sur les fonctions analytiques. (38-41).

L'auteur indique un moyen par lequel on pourrait étudier une fonction analytique quelconque (pouvant aussi avoir un nombre infini de valeurs) à l'aide de surfaces de Riemann ayant un nombre fini de feuillets et de points de diramation.

Fouret (*G.*). — Sur quelques propriétés involutives des courbes algébriques. (42-48) [en français].

Étant données, dans un plan, deux droites et deux courbes algébriques de degrés quelconques, le produit des distances des points d'intersection des deux courbes à l'une des droites reste dans un rapport constant avec le produit des distances des mêmes points à l'autre, lorsque les deux courbes varient sans cesser de couper ces deux droites aux mêmes points.

Après avoir démontré ce théorème, l'auteur en déduit, en spécialisant les deux courbes ou la position des droites (et, dans un seul cas, en appliquant la transformation par rayons vecteurs réciproques), sept autres théorèmes dus à différents auteurs.

Casorati (*J.*). — Sur les asymptotes des courbes planes algébriques. (49-52).

Manière de déduire les équations des asymptotes de celles des tangentes au fini, pour des points de contact simples ou multiples.

Maisano (*G.*). — La hessienne de la sextique binaire et le discriminant de la forme du huitième ordre. (53-59).

Calcul des invariants de la hessienne en fonction des invariants de la sextique. Calcul du discriminant de la forme du huitième ordre. Relations entre les invariants de la hessienne.

Gerbaldi (*F.*). — Sur la hessienne du produit de deux formes ternaires. (60-66).

Étant

les deux formes et

$$f_1 = a_x^m, \qquad f_2 = b_x^n$$

$$U = U_x^p = f_1 f_2,$$

l'auteur démontre la formule

$$\begin{aligned} p^3(p-1)^2(UU'U'')^2 U_x^{p-2} U_x'^{p-2} U_x''^{p-2} \\ = (m-1)(p-1)m^3 A_1 f_2^3 - 3(m-1)m^2 n \Theta_1 f_2^2 f_1 - 3(n-1)mn^2 \Theta_2 f_2 f_1^2 \\ + (n-1)(p-1)n^3 A_2 f_1^3 + \frac{3}{2} m^2 n^2 (p-2) \Phi_{12} f_1 f_2, \end{aligned}$$

donnée par Salmon sans démonstration. Dans cette formule il est

$$A_1 = (aa'a'')^2 a_x^{m-2} a_x'^{m-2} a_x''^{m-2}, \qquad A_2 = (bb'b'')^2 b_x^{n-2} b_x'^{n-2} b_x''^{n-2},$$

$$\Theta_1 = (aa'b)^2 a_x^{m-2} a_x'^{m-2} b_x^{n-2}, \qquad \Theta_2 = (abb')^2 a_x^{m-2} b_n^{n-2} b_x'^{n-2},$$

$$\Phi_{12} = (\alpha\beta x)^2 A_x^{2m-4} B_x^{2n-4},$$

où α, β, A, B sont définis par

$$F_{11} = u_\alpha^2 A_x^{2m-4} = (aa'u)^2 a_x^{m-2} a_x'^{m-2},$$

$$F_{22} = u_\beta^2 B_x^{2n-4} = (bb'u)^2 b_x^{n-2} b_x'^{n-2}.$$

Beltrami (*E.*). — Notes physico-mathématiques. (67-79).

L'expression complète du potentiel d'un corps magnétique sur soi-même est

$$P = \int \frac{\Delta_1 V}{8\pi} dS_\infty + \int \psi \, dS,$$

où la seconde intégration est étendue à l'espace occupé par le corps, V est la fonction potentielle du corps et

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{\varkappa_x} + \frac{\beta^2}{\varkappa_y} + \frac{\gamma^2}{\varkappa_z}\right),$$

α, β, γ étant les composantes du moment magnétique pour l'unité de volume et $\varkappa_x$, $\varkappa_y$, $\varkappa_z$ les coefficients d'induction suivant les axes correspondant au point (x, y, z). L'auteur résout une difficulté relative au signe de P, qui est incertain pour les corps diamagnétiques, la forme quadratique ψ étant alors négative. Par la considération de la force que Maxwell appelle *induction magnétique* et dont les composantes sont

$$X = 4\pi\alpha - \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = 4\pi\beta - \frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = 4\pi\gamma - \frac{\partial V}{\partial z},$$

il arrive à la conclusion que *dans les corps diamagnétiques* P *est toujours négatif*. Après en avoir déduit que l'équilibre d'induction diamagnétique serait instable, il observe que ces résultats peu vraisemblables rendent plus probable l'hypothèse de Faraday d'une polarisation de tout l'espace avec un coefficient positif, hypothèse qui réduit l'induction diamagnétique à une simple apparence.

Ensuite il ajoute deux observations relatives à la théorie de l'élasticité. La première se rapporte au potentiel unitaire d'élasticité pour les milieux à isotropie incomplète, ayant en tout point un axe distinct de direction donnée, tandis que toute direction normale à celle-ci appartient à un autre axe indistinct ou indifférent. Soient a, b, c, f, g, h les six composantes de déformation, c'est-à-dire

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad b = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad c = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$2f = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2g = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2h = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}.$$

L'auteur, en employant les propriétés invariantives des expressions

$$\begin{gathered} a + b + c, \\ bc - f^2 + ca - g^2 + ab - h^2, \\ abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2, \end{gathered}$$

et en supposant que l'axe distinct soit parallèle à l'axe z, trouve l'expression suivante du potentiel unitaire

$$\Pi = \frac{1}{2}A(a + b)^2 + B(a + b)c + \frac{1}{2}Cc^2 + D(h^2 - ab) + E(f^2 + g^2),$$

A, B, C, D, E étant des constantes. Si l'on indique par X_x, X_y, ... les six

composantes de pression, on a aussi

$$\Pi = \frac{1}{2}A'(X_x + Y_y)^2 + B'(X_x + Y_y) + \frac{1}{2}C'Z_z^2 + D'(X_y^2 - X_x Y_y) + E'(Y_z^2 + Z_x^2),$$

où

$$A' = \frac{AC - B^2}{DK}, \quad B' = -\frac{B}{K}, \quad C' = \frac{2A - D}{K},$$

$$D' = \frac{1}{D}, \quad E' = \frac{1}{E}, \quad K = 2(AC - B^2) - CD.$$

L'autre observation se rapporte à la suffisance des équations

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right), \quad \frac{\partial^2 g}{\partial z\, \partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}\right), \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial y\, \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 b}{\partial z\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial z}\right),$$

entre les six composantes d'une déformation possible. Ici cette suffisance est établie par l'intégration directe.

Albeggiani (*M.-L.*). — Sur les lignes géodésiques tracées sur certaines surfaces. (80-119).

L'auteur commence par l'exposition d'une méthode due à M. Darboux et qui se résume dans le théorème suivant :

« Prenons l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{E\left(\frac{\partial \theta}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \theta}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \theta}{\partial u}\right)^2}{EG - F^2} = 1.$$

Toute solution de cette équation, posée égale à une constante, détermine une famille de courbes parallèles. Si l'on a une solution contenant une constante arbitraire a, l'équation de la ligne géodésique la plus générale est

$$\frac{\partial \theta}{\partial a} = a',$$

et l'arc compris entre deux points de cette géodésique est égal à la différence des valeurs de θ en ces deux points.

L'auteur applique cette méthode aux surfaces qui admettent un glissement infiniment petit sur elles-mêmes, de manière qu'une géodésique vienne coïncider avec une géodésique infiniment voisine.

Lebon (*E.*). — Solution du problème de Malfatti (120-130, 1 pl.). [en français].

Mannheim (*A.*). — Étude d'un déplacement particulier d'une figure de forme invariable par des procédés élémentaires et purement géométriques. (131-144) [en français].

Le cas étudié par l'auteur est celui d'une droite dont quatre points restent sur quatre plans donnés (un point quelconque de cette droite décrit une ellipse). Il y ajoute l'étude du déplacement d'une figure dont les points décrivent des ellipses.

Berzolari (*L.*). — Un nouveau théorème sur les involutions planes. (145-159).

Le théorème se rapporte aux involutions planes ayant un point fondamental r-uple, par lequel la courbe correspondante passe avec $r-3$ branches.

Schoute (*P.-H.*). — Sur un théorème relatif à la hessienne d'une forme binaire. (160-164) [en français].

Autre démonstration du théorème donné par M. Gerbaldi dans ce même Tome III; *voir* ci-dessus.

Visalli (*P.*). — La transformation quadratique (2, 2). (165-170).

Zeuthen (*H.-G.*). — Extrait d'une lettre adressée à M. Guccia. (171-178).

Sur le genre d'une courbe composée.

Castelnuovo (*G.*). — Sur certains groupes associés de points. (179-192).

Deux groupes, dont chacun est formé par $2n$ éléments d'une forme fondamentale d'espèce $n-1$ sont appelés *associés* lorsqu'il y a dans un espace S_{n-1} deux n-gones tels que le premier groupe soit projectif au groupe des $2n$ sommets, et le second soit projectif au groupe des $2n$ faces. Deux éléments dont l'un correspond à un sommet et l'autre à la face opposée sont appelés *homologues*.

Beltrami (*E.*). — Sur la fonction potentielle de la circonférence. (193-209).

Cette fonction (la fonction potentielle newtonienne) est

$$u = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\xi}{r},$$

et la fonction appelée *directe* par Lamé est

$$v = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\,d\xi,$$

où

$$r^2 = x^2 + z^2 + a^2 + 2ax\cos\xi,$$

a étant le rayon de la circonférence, et ξ l'angle que le rayon passant par le point variable sur la circonférence fait avec l'axe des x négatives. Le point soumis à l'action de la circonférence est supposé dans le plan xz.

L'auteur remarque que l'on a

$$\Delta_2 v = 2u$$

et

$$u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\rho^2\sin^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta}},$$

$$v = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta\sqrt{\rho^2\sin^2\theta + \rho'^2\cos^2\theta},$$

étant $2\theta = \xi$ et ρ, ρ' la moindre et la plus grande distance du point à la circonférence. La première de ces deux relations montre que l'on a

$$u = \frac{1}{R},$$

R étant la moyenne arithmético-géométrique de ρ, ρ'. De cette même relation on déduit, à cause de l'homogénéité,

$$u + \rho\frac{\partial u}{\partial\rho} + \rho'\frac{\partial u}{\partial\rho'} = 0.$$

Les deux composantes F_ρ, $F_{\rho'}$ de la force newtonienne suivant ρ et ρ' sont donc liées par la relation

$$\rho F_\rho + \rho' F_{\rho'} = 0.$$

Ayant posé

$$k'^2 = \frac{\rho}{\rho'}, \qquad k^2 = 1 - k'^2,$$

et K, E étant les intégrales elliptiques connues, on a

$$u = \frac{2K}{\pi\rho'}, \qquad v = \frac{2\rho' E}{\pi}$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial\rho} = \frac{2}{\pi k^2\rho\rho'}(k'^2 K - E),$$

$$\frac{\partial u}{\partial\rho'} = \frac{2}{\pi k^2\rho'^2}(E - K),$$

expressions que l'auteur applique à l'étude de la force dans le voisinage de la circonférence, en faisant remarquer des particularités que présente la distribution étudiée, et par lesquelles elle se distingue remarquablement des distributions superficielles. Ensuite il démontre que les fonctions u et v satisfont aux

équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\rho'\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\rho\rho'\frac{\partial u}{\partial\rho'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\frac{\partial v}{\partial\rho'}\right),$$

dont la première peut être réduite à l'équation de Borchardt pour l'inverse de la moyenne arithmético-géométrique; et il établit directement cette première équation, en montrant qu'elle est une transformée de l'équation de Laplace $\Delta_2=0$.

La fonction potentielle d'une couche magnétique circulaire dont a est le rayon, et dont le moment est constant et $=1$, est

$$U=-2\pi\int_0^a\frac{\partial u}{\partial z}a\,da.$$

La fonction V *associée* à la U, c'est-à-dire telle que l'on ait

$$\frac{\partial V}{\partial x}=x\frac{\partial U}{\partial z},\qquad\frac{\partial V}{\partial z}=-x\frac{\partial U}{\partial x},$$

est

$$V=2\pi x\int_0^a\frac{\partial u}{\partial x}a\,da;$$

l'auteur effectue sur cette expression de V une réduction par laquelle il arrive à la forme connue

$$V=\rho'[2E+(k^2-2)K].$$

Puis il reprend l'équation

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)=\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\frac{1}{\rho\rho'}\frac{\partial v}{\partial\rho'}\right),$$

et montre que l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(\rho'^2-\rho^2)\frac{\partial w}{\partial\rho'}\right]+\frac{\partial}{\partial\rho'}\left[(\rho'^2-\rho^2)\frac{\partial w}{\partial\rho}\right]=0$$

est satisfaite autant par $w=u$ que par $w=v$. Elle est satisfaite aussi par l'inverse de la moyenne arithmético-géométrique des deux quantités $\rho'-\rho$ et $\rho'+\rho$.

Enfin l'auteur montre que le théorème de Green, dans le cas des fonctions potentielles symétriques autour d'un axe, prend la forme

$$\varphi(x_0,z_0)=\frac{1}{2}\int\left(\varphi\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)x\,ds.$$

Guccia (*G.-B.*). — Liste des travaux mathématiques de Georges-Henri Halphen (210-222) [en français].

Vivanti (*G.*). — Observations sur les points singuliers essentiels. (223-229).

L'auteur considère une fonction uniforme $f(z)$ ayant les propriétés suivantes :

a. Elle a une singularité essentielle à l'origine;
b. Dans le voisinage de l'origine elle n'a pas de pôle ni de point singulier à droite de l'axe imaginaire;
c. Elle est réelle pour les valeurs réelles positives de z, et tend vers zéro quand z tend vers l'origine suivant la partie positive de l'axe réel.

Cela posé, il démontre que $f(z)$ tend vers zéro quand z tend vers l'origine suivant un rayon quelconque situé à droite de l'axe imaginaire. Puis il démontre aussi que la valeur limite ne dépend pas seulement de la direction, mais aussi de la courbure de la ligne que la variable suit en se rendant au point singulier, et applique ces considérations à la fonction

$$f(z) = e^{\frac{k}{z}}.$$

Guccia (*G.-B.*). — Sur un récent travail au sujet de la réduction des systèmes linéaires de courbes algébriques planes. (233-235). [Cette Note fait partie des *Extraits des Procès-Verbaux*].

A l'occasion d'une remarque de M. Jung (*Annali di Matematica*, série II^a, t. XVI, p. 313), M. Guccia démontre que les systèmes de courbes des genres $p = 0$ et $p = 1$ donnés par lui-même comme étant d'ordre minimum sont irréductibles non seulement par une transformation quadratique, mais même par une transformation quelconque.

Del Pezzo (*P.*). — Sur les systèmes de courbes et de surfaces. (236-240).

L'auteur, en s'appuyant sur des notions élémentaires de la théorie des singularités, démontre les propositions suivantes :

1. Une surface F^n douée de singularités quelconques appartient toujours à des systèmes linéaires de surfaces F^m ($m > n$) ayant mêmes singularités.
2. Les surfaces d'un ordre déterminé m, ayant les mêmes singularités de F^n, forment un système linéaire.
3. Si m est suffisamment grand ces singularités n'ont pas de relations entre elles, et il n'y a pas de groupes de points, tels que les surfaces du système passant par l'un des points du groupe doivent passer par les autres.

Guccia (*G.-B.*). — Sur les singularités composées des courbes algébriques planes. (241-259).

Ce travail se rattache à ceux que l'auteur a publiés dans les *Comptes rendus*, t. CVII, et dans les *Rendiconti della R. Accademia dei Lincei* (1889).
Soient

$$[\varphi_1] = 0, \quad [\varphi_2] = 0, \quad \dots, \quad [\varphi_s] = 0$$

les équations irréductibles de s courbes algébriques, contenant linéairement des paramètres arbitraires. On suppose qu'à un point quelconque P du plan la

courbe φ_i ait une singularité *quelconque*, bien déterminée, $[\sigma_i]$, et que dans le voisinage du point P il y ait des relations quelconques de contact entre les branches de deux courbes φ_i, φ_k, ayant respectivement les singularités $[\sigma_i]$, $[\sigma_k]$. On appelle *singularité composée* $[\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s]$ celle que la courbe

$$\sum_i a_i \varphi_1^{(i)} \varphi_2^{(i)} \ldots \varphi_s^{(i)} = 0$$

a au point P (les a_i sont des constantes arbitraires, et les $\varphi_i^{(l)}$ sont h polynomes φ_i choisis arbitrairement, et linéairement indépendants).

Après avoir rappelé quelques proportions démontrées par lui-même en d'autres travaux, l'auteur démontre trois théorèmes concernant les systèmes linéaires dont nous citerons le suivant :

« Étant donnés s systèmes linéaires

$$[f_1] = 0, \quad [f_2] = 0, \quad \ldots, \quad [f_s] = 0$$

des ordres $n_1, n_2, \ldots, n_s$ respectivement et déterminés par leurs bases si pour le système $[f_i]$ on a

$$D_{ii} > 2p_i - 2$$

(D_{ii} étant le nombre des intersections mobiles de deux courbes du système), la courbe irréductible

$$f'_1 f'_2 \ldots f'_s + \mu f''_1 f''_2 \ldots f''_s = 0,$$

où μ est une constante arbitraire et f'_i, f''_i sont deux courbes quelconques du système $[f_i]$, appartient à un système linéaire d'ordre $n_1 + n_2 + \ldots + n_s$ contenant

$$\sum_{i,j} D_{i,j} - \sum_i p_i + s$$

paramètres variables. $D_{i,j}$ est le nombre des intersections mobiles d'une courbe de $[f_i]$ avec une courbe de $[f_k]$ et p_i le genre de la courbe f_i.

Il déduit de ces théorèmes quelques propriétés relatives aux singularités données en un point du plan. Par exemple il démontre le théorème suivant :

« Étant données s singularités algébriques $[\sigma_1]$, $[\sigma_2]$, $\ldots$, $[\sigma_s]$ en un point, le nombre de conditions linéaires auquel équivaut, pour une courbe algébrique, la condition d'avoir en ce point la singularité composée bien déterminée $[\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_s]$ est égal à la somme des intersections des singularités composantes $[\sigma_i]$ prises deux à deux, et de chacune avec elle-même, moins la somme des abaissements du genre dus aux mêmes singularités. »

L'auteur appelle *intersection* de deux singularités $[\sigma_i]$ et $[\sigma_k]$ que deux courbes sont supposées avoir respectivement au point P le nombre des intersections de ces deux courbes absorbées par le point P.

Volterra (*V.*). — Sur l'intégration d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie des fonctions conjuguées. (260-272).

Le système est le suivant

$$\sum_{1}^{r+1}{}_{s}(-1)^{s}\frac{\partial p_{i_1\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}}=0.$$

$$\sum_{1}^{n}{}_{t}\frac{\partial p_{i_1\ldots i_{r-1}i_t}}{\partial x_{i_t}}=0;$$

l'auteur en donne l'intégration avec des conditions données aux limites, en supposant que le champ soit un espace sphérique. Ce problème, comme l'auteur le montre, se rattache à la théorie des fonctions d'hyperespaces et en particulier à la théorie des fonctions conjuguées, car il est équivalent au problème de déterminer deux fonctions conjuguées F et Φ dans un espace sphérique, étant donnée au contour (dont ν soit la normale intérieure) la dérivée

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}\ldots x_{i_{r-1}}\nu)}$$

ou bien la

$$\frac{dF}{dS_{i_1\ldots i_{r+1}}}.$$

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tomo CXVI, 1893 (¹).

Jablonski. — Sur une méthode nouvelle d'approximation. (19-21).

Cette méthode repose sur le théorème suivant :

Si une fonction $f(z)$ admet un zéro ou un pôle a de module moindre que tous les autres, et reste holomorphe à l'intérieur d'un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon le module de a, la dérivée logarithmique $\frac{f'(z)}{f(z)}$ est développable en série convergente $\Sigma A_n z^n$ à l'intérieur de ce cercle, et l'on a toujours

$$\lim\frac{A_n}{A_{n+1}}=a,$$

lorsque n croît indéfiniment, quel que soit l'ordre du zéro ou du pôle a, pourvu qu'il soit fini.

On conçoit, dès lors, comment par une substitution $z=z_1+z'$, en choisissant convenablement z_1, on peut placer l'origine dans le plan plus près d'un pôle ou d'un zéro de $f(z)$ que de tout autre et les calculer ainsi successivement avec une approximation indéfinie.

(¹) Voir *Bulletin*, XVIII₂, p. 131.

L'auteur indique quelques applications : d'abord le calcul approché des racines réelles ou imaginaires d'une équation algébrique ou transcendante, puis le calcul approché de nombres qui sont racines d'équations à coefficients commensurables.

Painlevé. — Sur les mouvements des systèmes dont les trajectoires admettent une transformation infinitésimale. (21-22).

Étant donnés les deux systèmes d'équations de Lagrange

$$(1)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i(q_1, \ldots, q_k) \qquad \frac{dq_i}{dt} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

$$(2)\quad \frac{d}{dt_1}\frac{\partial T'}{\partial q'_i} - \frac{\partial T'}{\partial q_i} = Q'_i(q_1, \ldots, q_k) \qquad \frac{dq_i}{dt_1} = q'_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

où T et T' sont des formes quadratiques des q' indépendantes de t, ces deux systèmes sont *correspondants* si les relations entre les q_i définies par (1) et (2) coïncident; ils sont homologues si l'on peut passer de (1) à (2) en changeant q_i en $\varphi_i(q_1, \ldots, q_k)$ et en faisant $t = t_1$.

Ces définitions permettent à M. Painlevé d'exprimer la condition nécessaire et suffisante pour que les trajectoires de (1) puissent être transformées en elles-mêmes par un changement convenable des variables q_i : c'est qu'il existe un système (2) à la fois homologue et correspondant de (1).

Les seules transformations conformes $q_i = \varphi_i$ des trajectoires sont celles qui changent T en CT et φ_i en $\alpha\varphi_i$ ou bien T en $(\alpha U + \beta)T$ et U en $\frac{CU + D}{\alpha U + \beta}$. Ces transformations sont aussi les seules qui transforment un faisceau quelconque $h = h_0$ de trajectoires en un faisceau analogue $h = h'_0$ (h et h' sont les constantes des forces vives).

Si les trajectoires de (1) admettent un groupe *continu* de transformations $q_i = \varphi_i$ à R paramètres, ce groupe renferme un sous-groupe de transformations *conformes* à r paramètres : à la recherche de ces dernières s'appliquent immédiatement les méthodes de M. Lie. L'étude des autres transformations n'amène qu'à des équations différentielles linéaires. Cette étude conduit M. Painlevé à une classification des équations (1) et à la réduction des difficultés que soulève leur intégration.

Les indications données par l'auteur permettent de former très aisément les systèmes (1) à deux paramètres dont les trajectoires admettent une transformation continue.

Quand on connaît *a priori* des équations (1) dont les trajectoires admettent une transformation infinitésimale non conforme, on est certain que le système (1) admet une infinité de correspondants.

Kluyver. — Sur la réduction des intégrales elliptiques. (48-52).

Avant l'introduction de la fonction p de Weierstrass, la réduction de l'intégrale

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx,$$

où φ est une fonction rationnelle et f un polynôme du quatrième degré en x, exigeait la résolution préalable de l'équation $f(x) = 0$.

Mais les formules d'inversion données dans le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen (t. I, p. 118) expriment les racines de f au moyen des fonctions elliptiques. M. Kluyver indique, pour obtenir ces formules, une méthode plus simple que celle d'Halphen et fondée sur la substitution due à M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. LII, p. 1).

Cahen. — Sur la somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x. (85-90).

Démonstration de cette proposition énoncée, mais non démontrée, par Halphen :

« La somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x est asymptotique à x. »

M. Cahen s'appuie sur le résultat énoncé par Riemann relativement à la décomposition de la fonction $\zeta(s)$ en facteurs primaires, résultat rigoureusement établi par M. Hadamard.

Painlevé. — Sur les équations différentielles d'ordre supérieur dont l'intégrale n'admet qu'un nombre fini de déterminations. (88-91).

L'auteur complète et précise les résultats qu'il avait obtenus antérieurement. Soit

$$F(\bar{x}, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

une équation du second ordre, la surface F étant algébrique et du genre p en y, y', y''. Si l'intégrale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles, cette intégrale est une fonction à n déterminations, algébrique ou transcendante, des valeurs y_0, y'_0 de y, y' pour $x = x_0$. M. Painlevé étudie exclusivement le cas où y est une fonction algébrique des constantes y_0, y'_0.

L'intégrale peut alors s'écrire

$$y^n + R_{n-1}(\alpha, \beta, \gamma, \bar{x})y^{n-1} + \ldots + R_0(\alpha, \beta, \gamma, \bar{x}) = 0,$$

les R_i sont des fonctions rationnelles de trois constantes α, β, γ liées par une relation algébrique

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Soit ϖ le genre de la surface $\varphi = 0$, et soit P un des p polynômes adjoints à $F = 0$. M. Painlevé démontre que l'équation au dernier multiplicateur de (1) doit admettre ϖ solutions, linéairement distinctes, de la forme $\frac{P}{F'_{y''}}$. Il avait déjà établi une proposition analogue pour les équations du premier ordre.

Réciproquement, quand il existe q multiplicateurs ($q > 1$) tels que $\frac{P}{F'_{y''}}$, $\frac{P'}{F'_{y''}}$, ..., deux cas peuvent se présenter :

1° Si les intégrales premières $\frac{P}{P'} = h$ ne se confondent pas toutes entre elles, l'équation du second ordre s'intègre algébriquement;

2° Si ces intégrales se réduisent à une seule, l'intégration se ramène à celle d'une équation linéaire d'ordre q et à des quadratures. On peut même pousser la réduction plus loin.

En définitive, M. Painlevé parvient aux résultats que voici :

On cherche à reconnaître si l'intégrale de (1) est une fonction algébrique des constantes telle que la relation $\varphi = 0$ soit du genre $\varpi > 1$. On reconnaît s'il est ainsi algébriquement, et alors l'intégrale s'obtient elle-même algébriquement, ou bien l'équation s'intègre par deux quadratures.

Dans tous les cas, on sait reconnaître si l'intégrale de (1) ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles; l'équation se ramène alors, dans l'hypothèse la plus défavorable, aux équations linéaires.

Koch (*H. von*). — Sur les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels. (91-93).

L'auteur fait connaître deux théorèmes dont l'objet est de répondre dans une certaine mesure à ces deux questions :

1° Quelles sont les conditions pour qu'une équation linéaire et homogène à coefficients rationnels admette des intégrales uniformes dans le voisinage d'un point singulier donné?

2° Quelles sont les conditions pour qu'elle admette des intégrales régulières dans le voisinage d'un point singulier donné?

Painlevé. — Sur les équations différentielles d'ordre supérieur dont l'intégrale n'admet qu'un nombre donné de déterminations. (173-175).

Étant donnée une équation du second ordre

$$F(\bar{x}, y, y', y'') = 0, \tag{1}$$

algébrique en y, y', y'', M. Painlevé se propose de reconnaître si l'intégrale générale $y(x)$ de cette équation ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques (en admettant que cette intégrale dépende algébriquement des constantes y_0, y'_0). Il montre que ce problème peut toujours être résolu par les calculs purement algébriques.

Mais quelles opérations exige alors la détermination de cette intégrale? Pour le voir, on commencera par ramener l'équation (1) à une équation dont les points critiques sont fixes, en substituant à y une fonction rationnelle de y, y', y'', soit $r(\bar{x}, y\, y', y'')$. Soit S la surface définie par la nouvelle équation

$$f(\bar{x}, r, r', r'') = 0$$

entre r, r', r'' quand x est constant. Voici les cas qui peuvent se présenter :

1° La surface S n'admet qu'un nombre fini de transformations birationnelles en elle-même. *L'équation s'intègre algébriquement;*

2° S admet un faisceau continu de telles transformations, mais le genre ϖ de S est plus grand que 1. *L'équation s'intègre par une quadrature;*

3° Les coordonnées de S sont des fonctions uniformes à quatre périodes de deux paramètres ($\varpi = 1$). *L'équation s'intègre par quadratures* (Picard);

4° Les coordonnées de S s'expriment rationnellement en fonction de λ, $\sqrt{R(\lambda)}$, μ, $\sqrt{R'(\mu)}$, R et R' désignant deux polynômes du quatrième degré en λ et μ ($\varpi = 1$). *L'équation s'intègre à l'aide de deux quadratures;*

5° Les coordonnées de S s'expriment en fonction uniforme de λ, $\sqrt{R(\lambda)}$ et μ(ϖ=0). *L'équation se ramène par une quadrature à une équation de Riccati;*

6° La surface est unicursale. Une transformation algébrique ramène (1') à *une équation linéaire homogène du troisième ordre.*

Ces conclusions s'étendent à une équation différentielle d'ordre quelconque : on sait reconnaître si l'intégrale ne prend qu'un nombre connu n de valeurs autour des points critiques mobiles (et dépend algébriquement des constantes) : l'équation s'intègre alors algébriquement, ou par quadratures, ou se ramène aux équations linéaires du troisième ordre.

Cels. — Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. (176-178).

M. Cels détermine les éléments d'une équation linéaire

$$a_0\frac{d^n z}{dx^n}+a_1\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}\frac{dz}{dx}+a_n z=0,$$

qui ne varient pas quand on passe de cette équation à son adjointe de Lagrange. Les expressions

$$n\frac{da_0}{dx}-2a_1,$$

$$\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{d^2a_0}{dx^2}-(n-1)\frac{da_1}{dx},$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{d^3a_0}{dx^3}-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}\frac{d^2a_1}{dx^2}+(a-2)\frac{da_2}{dx}-2a_3,\ \ldots$$

changent alors de signe sans changer de valeur.

Ces invariants égalés à zéro donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une équation soit équivalente à son adjointe de Lagrange.

L'auteur indique ensuite les invariants relatifs à l'*adjointe de la première ligne*. Ce sont

$$(n-1)\frac{da_0}{dx}-2a_1,\quad \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}-(n-2)\frac{da_1}{dx},\quad \ldots.$$

Ces expressions ne changent pas quand on passe d'une équation d'ordre pair à son adjointe de la première ligne, et changent seulement de signe quand l'équation est d'ordre impair.

Koch (H. von). — Sur les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier ordre. (179-181).

En vue d'étudier les systèmes d'équations linéaires du premier ordre à coefficients analytiques, l'auteur cherche un criterium de convergence des déterminants infinis.

Soit $A_{ik}(i, k = -\infty, \ldots, +\infty)$ une double infinité de quantités données. Supposons que le produit

$$\Pi = \Pi_i A_{ii}$$

soit absolument convergent, et formons une infinité de produits nouveaux en permutant dans Π les premiers (ou seconds) indices des facteurs A_{ii} de toutes les manières possibles; formons enfin avec tous ces produits une série infinie, en prenant chacun d'eux avec le signe + ou le signe —, suivant qu'il se déduit du produit initial par un nombre pair ou impair de transpositions. Si cette série $\Sigma(\pm \Pi_i A_{ii})$ a une valeur finie Δ indépendante de l'ordre des termes, on dira que le déterminant des éléments A_{ik} est convergent et a pour valeur Δ.

Pour que le déterminant des A_{ik} converge, il suffit que les séries

$$\Sigma_i |A_{ii} - 1|, \quad \Sigma_{i,j,k} |A_{ij} A_{jk}|, \quad \Sigma_{i,j,k,l} |A_{ij} A_{jk} A_{kl}|$$

soient convergentes. Cette proposition de M. von Koch est la généralisation d'un théorème de M. Poincaré.

En prenant cette proposition pour point de départ, on peut obtenir la représentation analytique des intégrales et des invariants d'un système d'équations linéaires.

Beltrami. — Sur la théorie des fonctions sphériques. (181-183).

De Salvert. — Sur une expression explicite de l'intégrale algébrique d'un système hyperelliptique. (243-246).

Cette question d'analyse est abordée incidemment dans les *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi, mais elle n'est pas résolue complètement. M. de Salvert en donne la solution complète pour le cas d'un polynôme de degré impair $2n+1$ auquel se ramène, par un procédé bien connu, le cas du degré pair $2n+2$.

Demoulin. — Sur une généralisation des courbes de M. Bertrand. (246-249).

Une courbe Γ étant donnée, M. Demoulin appelle *sécante de paramètres* α, β, γ toute droite s'appuyant sur la courbe en un certain point et faisant, avec la tangente, la normale principale et la binormale des angles de cosinus proportionnels à α, β, γ.

A l'aide de cette définition, il généralise de la manière suivante les courbes de M. Bertrand :

α, β, γ étant trois constantes, trouver une courbe Γ dont les sécantes de paramètres α, β, γ soient en même temps les sécantes de mêmes paramètres d'une autre courbe Γ'.

Si l'on appelle r et p la courbure et la torsion au point O de la courbe Γ, et l la distance du point O au point correspondant O' de la courbe Γ', le problème que se pose M. Demoulin est d'exprimer r, p, l en fonction de l'arc s de

la courbe Γ. Ce problème, il le résout dans le cas où les sécantes sont : 1° dans le plan normal; 2° dans le plan rectifiant; 3° dans le plan osculateur.

Blutel. — Sur les surfaces qui admettent un système de lignes de courbure sphériques et qui ont même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure. (249-250).

Si l'on suppose connue l'une de ces surfaces (S_1), toutes les surfaces correspondantes (S) peuvent s'en déduire au moyen de la propriété suivante :

Les développables normales à (S) et (S_1) le long de deux lignes de courbure sphériques correspondantes (C) et (C_1) sont homothétiques.

Si l'on appelle O et O_1 les centres des sphères qui renferment (C) et (C_1), le centre d'homothétie I est placé sur la droite OO_1 et le rapport d'homothétie est égal à $\frac{IO}{IO'}$. Les deux courbes décrites par les centres des sphères ont leurs tangentes parallèles aux points O et O_1, et la droite OO_1 engendre une développable dont l'arête de rebroussement est le lieu du point I.

Cette propriété est susceptible de nombreuses applications. M. Blutel indique la suivante :

Si une surface (S_1) admet un système de lignes de courbure sphériques dont une est algébrique, toutes sont algébriques.

Il en est de même pour les lignes de courbure sphériques de toutes les surfaces (S) qui ont avec (S_1) même représentation sphérique de leurs lignes de courbure.

Picard. — Sur un nombre invariant dans la théorie des surfaces algébriques. (286-287).

Différents nombres entiers jouissant d'un caractère d'invariance pour les surfaces d'une même classe (c'est-à-dire transformables les unes dans les autres par une substitution birationnelle) ont été introduits dans la théorie des surfaces algébriques par M. Picard et par M. Nöther.

M. Picard signale un nouvel invariant auquel il parvient par les considérations suivantes :

Prenant une surface algébrique

$$f(x, y, z) = 0,$$

il considère deux fonctions rationnelles F et Φ de x, y, z et forme les deux équations

$$F(x, y, z) = u, \qquad \Phi(x, y, z) = v.$$

Si l'on veut pouvoir choisir les fonctions F et Φ de manière que, pour un système particulier de u et v, les μ points de la surface f déterminés par ces deux équations soient *arbitrairement* donnés sur f, le nombre μ aura un certain minimum $\rho - 1$.

Le nombre ρ est l'invariant annoncé.

La condition $\rho = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface soit uniformément unicursale.

De Salvert. — Sur une forme explicite des formules d'addition des fonctions hyperelliptiques les plus générales. (304-307).

Stouff. — Sur les lois de réciprocité et les sous-groupes du groupe arithmétique. (308).

1° On peut définir un sous-groupe R du groupe arithmétique de la manière suivante :

Pour qu'une substitution à coefficients entiers réels, du déterminant 1, appartienne au groupe R, il faut et il suffit que

$$\beta \equiv 0 \pmod 9,$$

et qu'en prenant au hasard un système de deux nombres complexes

$$3(a+b\rho), \qquad c+d\rho,$$

$$\rho^3 = 1, \qquad a-2 \equiv b-1 \equiv c \equiv d-1 \pmod 3,$$

on ait

$$\left[\frac{3\alpha(a+b\rho)+\beta(c+d\rho)}{3\gamma(a+b\rho)+\delta(c+d\rho)}\right] = \left[\frac{3(a+b)\rho}{c+d\rho}\right].$$

2° On peut définir ainsi qu'il suit un sous-groupe Γ″ du groupe arithmétique :
Pour qu'une substitution s appartienne au groupe Γ″, il faut et il suffit que

$$\alpha - 1 \equiv \delta \equiv 1 \equiv \beta \equiv \gamma \pmod 4,$$

et de plus, qu'en choisissant arbitrairement un système de deux entiers complexes

$$2(a+bi), \qquad c+di,$$

tels que

$$a \equiv 1, \quad b \equiv 1, \quad c \equiv 0, \quad d \equiv 1 \pmod 4,$$

on ait

$$[2\alpha(a+bi)+\beta(c+di),\ 2\gamma(a+bi)+\delta(c+di)] = [2(a+bi),\ c+di],$$
$$[2\gamma(a+di)+2\alpha(a+bi),\ 2\alpha(c+di)+\beta(a+bi)] = [2(a+bi),\ c+di].$$

Ces sous-groupes sont à congruences.

Painlevé. — Sur les singularités essentielles des équations différentielles d'ordre supérieur. (362-365).

L'auteur fait une importante distinction entre les points singuliers non algébriques x_0 d'une fonction analytique $y(x)$; ces points sont *transcendants* ou *essentiels* suivant que y tend ou non vers une valeur *déterminée* quand x tend vers x_0 par un chemin quelconque, mais sans tourner autour d'un point critique de y.

L'intégrale d'une équation du second ordre

$$(1) \qquad F(x, y, y', y'') = 0,$$

algébrique en x, y, y', y'', admet en général des points transcendants mobiles,

mais *elle n'admet pas en général de points essentiels mobiles*. C'est là un résultat inattendu qui résulte du théorème suivant :

Soit $S(x, y, y') = 0$ la condition pour qu'une valeur de y'' devienne infinie ou pour que deux valeurs de y'' se permutent. Si l'intégrale de (1) a des points essentiels mobiles :

1° Le polynôme S contient un facteur de la forme $S_1(x, y)$ où y figure;

2° L'équation (1), où l'on regarde x comme la fonction, admet, quel que soit x_0, l'intégrale $x = x_0$;

3° Si le point arbitraire x_0 est un point essentiel de $y(x)$, en tout point x voisin de x_0, on a l'une au moins des inégalités

$$|S_1(x, y)| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{1}{y'}\right| < \varepsilon,$$

ε est aussi petit qu'on veut.

Mais ces conditions sont loin d'être suffisantes pour qu'il y ait des points essentiels mobiles. Pour qu'il en existe, il faut encore d'autres conditions en vertu desquelles, comme dit M. Painlevé, les conditions 2° et 3° sont vérifiées *intrinsèquement* et non pas seulement *en apparence*.

Les équations (1) se trouvent ainsi réparties en deux *classes* : une classe *générale* et une classe *singulière*.

Si l'équation est de la classe *générale*, l'intégrale $y(x)$ a ses points algébriques fixes; bien plus, elle dépend *algébriquement* des constantes y_0, y'_0. On sait reconnaître si elle ne prend qu'un nombre donné de valeurs autour des points critiques mobiles : elle s'intègre alors algébriquement ou par quadrature, ou se ramène à une équation linéaire du troisième ordre.

Si l'équation (1) est de la classe singulière, l'intégrale n'admet pas nécessairement de points essentiels, mais c'est toujours une fonction *transcendante* des constantes y_0, y'_0.

Ces conclusions s'étendent aux équations d'*ordre quelconque* : une telle équation n'admet pas en général de points essentiels mobiles.

Mais des complications nouvelles surgissent dès le troisième ordre. Par exemple, tandis que, pour une équation du second ordre, une intégrale qui est uniforme ou qui a n valeurs n'a jamais de ligne singulière, l'intégrale d'une équation du troisième ordre peut être uniforme et présenter des lignes singulières mobiles, dans le voisinage desquelles elle est nécessairement indéterminée.

Picard. — Remarque sur la communication précédente (365).

Koch (H. von). — Sur les intégrales uniformes des équations linéaires. (365-368).

Étant donnée une équation linéaire dont les coefficients sont des fonctions uniformes de x, quelles sont les conditions pour qu'elle admette des intégrales *uniformes dans tout le plan?* C'est là un problème qui, jusqu'ici, même dans l'hypothèse de coefficients rationnels, n'a été traité que dans des cas particuliers. Grâce à la théorie des déterminants infinis, dit M. Helge von Koch, on peut le résoudre dans toute sa généralité.

En effet, l'intégrale uniforme sera nécessairement de la forme

$$\varphi = G(x) + \sum_{\mu=1}^{\mu=q} G_\mu\left(\frac{1}{x-a_\mu}\right),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_q$ désignant les points singuliers, et les G des fonctions entières. En substituant cette expression dans le premier membre de l'équation différentielle, on obtient, pour la détermination des coefficients inconnus, un système, généralement infini, d'équations linéaires et homogènes. On peut s'arranger de façon que le déterminant Δ de ce système soit convergent. Dès lors l'existence de l'intégrale φ s'exprime par la seule condition $\Delta = 0$.

Pour qu'il y ait un nombre donné $\beta (< n)$ d'intégrales uniformes dans tout le plan, il faut et il suffit que Δ et tous ses mineurs d'ordre $1, 2, \ldots, \beta - 1$ soient nuls, ce qui s'exprime par un nombre fini de relations entre les paramètres. L'auteur enseigne à former ces relations dans le cas où les coefficients de l'équation sont rationnels, et ensuite à reconnaître si les a, qui sont les seuls points singuliers possibles des φ, sont des pôles ou des points essentiels. La représentation analytique des intégrales s'obtient alors immédiatement.

La méthode indiquée dans cette Communication s'applique d'ailleurs à des problèmes plus généraux.

Amigues. — Généralisation de la série de Lagrange. (368-370).

Riquier. — Sur le problème général de l'intégration. (426-427).

Étant donné un système différentiel dont les seconds membres sont nuls et les premiers holotropes dans quelque système de cercles, on peut, en général, le remplacer par un second système admettant les mêmes intégrales, et formé de deux groupes d'équations G_1, G_2 qui jouissent des deux propriétés suivantes :

1° L'une des fonctions inconnues, u, du système ne se trouve plus compliquée dans le groupe G_2;

2° En substituant aux fonctions restantes des intégrales quelconques du groupe G_2, on transforme le groupe G_1, soit en une formule unique exprimant directement la fonction u à l'aide des variables $x, y, \ldots$, soit en un système harmonique complètement intégrable à la seule fonction inconnue u.

En raisonnant de la même manière avec le système ζ_2 et continuant ainsi jusqu'à épuisement des fonctions inconnues, on pourra donc ramener l'intégration du système proposé à celle de systèmes harmoniques complètement intégrables, d'ordres égaux ou supérieurs à 1, et n'impliquant chacun qu'une seule fonction inconnue.

Vessiot. — Sur certaines équations différentielles du premier ordre. (427-429).

Lorsque l'intégrale générale d'une équation différentielle du premier ordre

s'exprime par une formule connue

$$x = f(x_1, \ldots, x_n, t, a),$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont n intégrales particulières *quelconques* et a une constante, l'intégration de cette équation se ramène à celle d'une équation de Riccati ou à deux quadratures.

Amigues. — Remarque à propos d'une précédente Note sur une généralisation de la série de Lagrange. (429).

Picard. — Sur une équation aux dérivées partielles. (454-456).

M. Picard a montré comment les problèmes classiques relatifs aux fonctions harmoniques peuvent être également résolus pour les intégrales de l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

non seulement lorsque le point (x, y) est supposé se mouvoir sur un plan simple, mais encore lorsqu'il se déplace sur une surface de Riemann. Il s'était toutefois borné au cas d'une surface *ouverte;* il montre aujourd'hui comment on peut lever les difficultés qui subsistaient pour une surface *fermée.*

Le problème à résoudre est le suivant : « Démontrer l'existence d'une solution de l'équation (1), fonction bien déterminée de x et y et, en général, continue, sauf aux points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et au point à l'infini. » On suppose que, dans le voisinage de O_i, l'intégrale puisse se mettre sous la forme

$$\beta_i \log r_i + v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

β_i étant une constante, r_i la distance du point (x, y) au point O_i, et la fonction v_i étant continue en O_i. Même hypothèse par le point à l'infini, où la fonction doit prendre la forme

$$-\alpha \log r + V.$$

On suppose, en outre,

$$\beta_1 - > -2, \qquad \alpha > 2, \qquad \alpha + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

La démonstration repose sur un emploi convenable du procédé alterné.

Stæckel. — Sur une classe de problèmes de Dynamique. (485-487).

Soient $q_1, q_2, \ldots, q_n$ les variables indépendantes dont dépend la position d'un système mobile dont les points ne sont soumis qu'aux forces résultant des liaisons; soient $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ leurs dérivées par rapport au temps, et $2T$ la force vive définie par la formule

$$2T = \sum_{k,\lambda} a_{k\lambda} q'_k q'_\lambda \qquad (k, \lambda = 1, 2, \ldots, n).$$

L'auteur suppose que la forme quadratique de différentielles

$$\sum_{k,\lambda} a_{k,\lambda}\, dq_k\, dq_\lambda$$

soit réductible à la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi}{\Phi_{k,1}} dq_k^2,$$

où Φ est le déterminant

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_{k,\lambda}\Phi_{k,\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

de n^2 fonctions $\varphi_{k,\lambda}(q_k)$ dont chacune ne dépend que de l'argument mis en évidence.

Dans ces conditions, les équations différentielles du mouvement admettent, outre l'intégrale des forces vives, $n-1$ *autres intégrales homogènes et du second degré par rapport aux vitesses,* savoir

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi\Phi_{k\lambda}}{\Phi_{k,1}^2} q_k'^2 = \alpha_\lambda \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots, n),$$

où $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sont des constantes arbitraires.

L'intégration de ces équations se ramène alors aux quadratures. Liouville avait déjà démontré un cas particulier de ce théorème.

Guichard. — Sur les surfaces dont les plans principaux sont équidistants d'un point fixe. (487-489).

M. Guichard établit des formules qui relient à la théorie des surfaces à courbure constante celle des surfaces S dont les plans principaux sont à égale distance d'un point fixe.

De ces formules résulte une transformation des surfaces S.

On abaisse de O la perpendiculaire OP sur une normale N à S. On prend sur OP un point P' tel que $\text{OP}' = \frac{1}{\text{OP}}$. On fait tourner P' de 90° autour de la droite N' parallèle à N menée par O, ce qui amène P' en P_1. Par P_1 on mène la parallèle N_1 à N; les droites N_1 sont normales à des surfaces Σ ayant la même propriété que S.

On peut encore transformer les surfaces S en surfaces de même nature au moyen d'une inversion par rapport au pôle O.

Ces deux transformations appliquées aux surfaces S reviennent à la transformation des surfaces à courbure constante qui est due à M. Bianchi.

Cahen. — Sur un théorème de M. Stieltjes. (490).

Le nombre des nombres premiers compris entre x et $(1+h)x$, quelque petite que soit la constante h, va en croissant indéfiniment avec x.

M. Cahen montre que ce théorème, énoncé seulement par M. Stieltjes, se déduit très facilement de ce théorème d'Halphen :

« La somme des logarithmes des nombres premiers qui ne dépassent pas x est asymptotique à x. »

Vaschy. — Intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. (491-493).

L'auteur indique pour l'intégration de ces systèmes une règle simple, analogue à la règle classique de résolution des équations du premier degré.

Weingarten. — Sur une équation aux différences partielles du second ordre. (493-496).

L'équation aux dérivées partielles dont s'occupe M. Weingarten est

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + (\rho + \rho')\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\, \partial q} - \rho\rho'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure principaux d'une surface, p et q les quantités

$$q = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2), \qquad p = xc + yc' + zc'',$$

où x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, c, c', c'' les coordonnées de sa représentation sphérique.

Cette équation se rencontre dans la théorie des surfaces applicables.

En cherchant les formes particulières de la fonction φ de p et q, pour lesquelles l'intégration soit possible par la méthode des caractéristiques, l'auteur est parvenu aux deux propositions que voici :

1° Si l'un des deux systèmes de caractéristiques admet deux combinaisons intégrables, l'autre les admet également;

2° Pour que ce cas se présente, il faut et il suffit que l'expression différentielle

$$\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2 + 2pd\frac{\partial \varphi}{\partial q}\, d\frac{\partial \varphi}{\partial q} + 2q\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2$$

soit réductible à la forme

$$[(\alpha + \beta r^2)\, dr^2 + r^2\, ds^2],$$

α et β désignant des constantes arbitraires. (On connaît d'ailleurs toutes les surfaces qui admettent cet élément linéaire.)

Painlevé. — Sur les transcendantes définies par les équations différentielles du second ordre. (566-569).

M. Painlevé rappelle la distinction en deux classes qu'il a faite précédemment des équations du second ordre

$$(1) \qquad F(x, y, y', y'') = 0,$$

une classe *générale* et une classe *singulière;* cette dernière est formée de toutes les équations qui vérifient *intrinsèquement* deux certaines conditions *nécessaires*, l'une pour que $y(x)$, l'autre pour que $y'(x)$ puissent être indéterminées en un point x mobile.

Actuellement, l'auteur approfondit le cas particulier où l'intégrale $y(x)$ ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles. Les conditions qui doivent être réalisées intrinsèquement pour que l'équation soit de la classe singulière, sont alors les suivantes :

1° Des valeurs de y'' sont infinies ou se permutent, quel que soit y', pour des valeurs x, y satisfaisant à une relation $S_1(x, y) = 0$ où figure y;

2° L'équation (1), où x est regardée comme la fonction, admet, quel que soit x_0, l'intégrale $x = x_0$.

Cela posé, si l'équation (1) est de la classe générale, l'intégrale $y(x)$ dépend *algébriquement* des constantes y_0, y'_0. Si l'équation (1) est de la classe singulière, y est une fonction transcendante de y_0, y'_0. Mais y peut être fonction transcendante d'une seule ou des deux constantes d'intégration. Dans le premier cas, l'équation (1) se ramène à une équation du premier ordre algébrique en y, y' et dont les coefficients sont des fonctions de x qui dépendent d'une équation de Riccati. Pour que l'intégrale soit une transcendante nouvelle, il faut donc qu'elle renferme les *deux* constantes d'une façon transcendante; cette condition n'est d'ailleurs pas suffisante.

M. Painlevé insiste, en terminant, sur les équations du second ordre à points critiques fixes. Quand l'équation est de classe singulière, les conditions *suffisantes* pour que les points critiques soient fixes sont, en général, des conditions *transcendantes* propres à chaque équation.

Kœnigs. — Un théorème de Géométrie infinitésimale. (569).

Si x, y, z; x', y', z' sont les coordonnées de deux points correspondants de deux surfaces applicables l'une sur l'autre, et u, v les paramètres des lignes du réseau conjugué commun aux deux surfaces, les six fonctions x, y, z; x', y', z' vérifient une même équation aux dérivées partielles de Laplace

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} + a\frac{\partial \theta}{\partial u} + b\frac{\partial \theta}{\partial v} = 0.$$

L'expression

$$x^2 + y^2 + z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2$$

est une septième solution de cette équation.

Demoulin. — Sur la correspondance par orthogonalité des éléments. (682-683).

Deux surfaces S et S_1 se correspondent par orthogonalité des éléments lorsqu'on peut établir entre les points M de la surface S et les points M_1 de la surface S_1 une relation telle qu'à un élément MM' de S il corresponde sur S_1 un élément $M_1M'_1$ perpendiculaire à MM'.

M. Darboux a fait ressortir l'importance de cette correspondance, imaginée par M. Moutard, en montrant que le problème de la déformation infiniment

petite d'une surface S revient à la détermination de toutes les surfaces S_1 qui correspondent à S par orthogonalité des éléments.

M. Demoulin fait connaître une nouvelle méthode pour traiter ce dernier problème.

Padé. — Sur la possibilité de définir une fonction par une série entière divergente. (686-687).

Quand on sait obtenir toutes les fractions rationnelles approchées d'une fonction, ces fractions forment, comme on sait, une suite à double entrée; de cette suite on peut extraire, par l'application d'une même loi, une infinité de suites à simple entrée telles que toutes les fractions d'une même suite soient les réduites successives d'une fraction continue simple; l'une de ces fractions continues simples, celle d'Euler, a pour réduite les polynômes successifs du développement en série de la fonction.

Or, de ces fractions continues simples, les unes peuvent être divergentes, les autres convergentes; en particulier, la série peut être convergente ou divergente.

Le premier exemple de cette proposition générale avait été donné par Laguerre, le second par Halphen.

Vallier. — Sur la représentation approchée des fonctions expérimentales entre des limites données. (712-714).

Pour représenter avec l'écart minimum une fonction φ entre les limites o et 1, il convient de déterminer les paramètres de l'expression analytique y qui doit lui être substituée par une série d'équations

$$\varphi_1 - y_1 = 0, \qquad \varphi_2 - y_2 = 0, \qquad \varphi_n - y_n = 0,$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les racines du polynôme $f(x)$ de degré n qui s'annule pour $x = 0$ et qui s'écarte le moins de zéro dans l'intervalle de o à 1; ces racines sont données par la formule générale

$$x = \frac{\cos\frac{\pi}{n} + \cos(2k+1)\frac{\pi}{2n}}{1 + \cos\frac{\pi}{2n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

On devra déterminer, suivant les cas, par le calcul ou par l'expérience, les valeurs de φ correspondant à ces racines.

Il peut arriver que la valeur initiale soit connue avec une approximation très supérieure à celle que comportent les autres déterminations. L'auteur montre comment on peut donner à cette valeur initiale un poids supérieur en astreignant $f(x)$ à admettre $x = 0$ comme racine double.

Cartan. — Sur la structure des groupes simples finis et continus (784-786).

M. Lie a donné une détermination complète de tous les groupes simples d'ordre r, dont les plus grands sous-groupes sont d'ordre $r-1$, $r-2$ ou $r-$.
Il a de plus indiqué *quatre* grandes classes de groupes simples : le groupe

projectif général à n variables, le groupe d'un complexe linéaire à $2n+1$ variables, et enfin le groupe projectif d'une surface du second ordre à $2n$ et $2n+1$ variables.

M. Killing a montré depuis que, à part ces *quatre* grandes classes de groupes simples, il n'y a que *cinq* groupes simples qui ont respectivement 14, 52, 78, 133, 248 paramètres.

Malheureusement, dit M. Cartan, les considérations qui conduisent M. Killing à ces résultats manquent de rigueur. Ayant repris ces recherches, M. Cartan est parvenu à établir solidement les résultats de M. Killing. Il a de plus déterminé complètement la structure des cinq groupes cités plus haut. Il a trouvé en particulier pour le groupe à quatorze paramètres deux représentants dans un espace à cinq dimensions.

Le premier est le plus grand groupe continu de transformations de contact de l'espace ordinaire qui laisse invariant le système des deux équations aux dérivées partielles du deuxième ordre

$$r = \frac{4}{3}t^3, \qquad s = t^2.$$

Le second est le plus grand groupe continu de l'espace à cinq dimensions qui laisse invariant le système des équations de Pfaff

$$dx_2 - x_4\,dx_1 = 0, \qquad dx_3 - x_2\,dx_1 = 0, \qquad dx_5 - x_4\,dx_2 = 0.$$

Engel. — Sur un groupe simple à quatorze paramètres. (786-788).

En déterminant la structure du groupe simple à quatorze paramètres, M. Killing n'avait montré auçun groupe ayant cette structure. M. Engel rappelle qu'il a comblé cette lacune il y a plusieurs années.

Il a montré que, dans l'espace à cinq dimensions, il y a deux groupes de transformations partielles à quatorze paramètres qui ont la structure en question. L'un de ces groupes, le groupe G_{14}, laisse invariante une équation de Pfaff; il peut être choisi de manière à constituer un groupe irréductible de transformations de contact de l'espace ordinaire. L'autre, le groupe G'_{14}, laisse invariants deux systèmes d'équations de Pfaff.

Par une transformation de contact qui rappelle la transformation célèbre de M. Lie, le groupe G_{14} devient semblable au groupe G'_{14}.

Quant au groupe G'_{14}, il peut être transformé en un sous-groupe du groupe des transformations conformes de l'espace à cinq dimensions.

Hurwitz. — Démonstration de la transcendance du nombre e. (788-789).

Cette démonstration présente un caractère de simplicité remarquable.

Si l'on pose

$$f(x) = \frac{1}{(p-1)}x^{p-1}(1-x)^p(2-x)^p\ldots(n-x)^p$$

et

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \ldots + f^{(n)}(x),$$

le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $e^{-x}F(x)$ entre les limites o et x montre que la différence $F(x) - e^{x}F(o)$ est infiniment petite quand p est infiniment grand.

De là il résulte que, si e était racine d'une équation à coefficients entiers,

$$C_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \ldots + C_n e^n = 0,$$

on aurait, lorsque p dépasse une certaine limite,

$$C_0 F(0) + C_1 F(1) + \ldots + C_n F(n) = 0,$$

égalité contradictoire, car tous les termes du premier membre sont divisibles par p, excepté le premier.

Riquier. — Sur la réduction d'un système différentiel quelconque à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre. (866-867).

On peut ramener, dit l'auteur, un système harmonique et complètement intégrable, d'ordre supérieur à 1, à un système harmonique et complètement intégrable du premier ordre.

D'ailleurs tout système harmonique et complètement intégrable du premier ordre est réductible à un système de même nature, possédant, en outre, la forme linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues.

De cette proposition et d'un théorème précédemment démontré par M. Riquier, il résulte que l'intégration des systèmes différentiels quelconques se ramène à celle de systèmes linéaires et complètement intégrables du premier ordre.

Gyldén. — Sur un cas général où le problème de la rotation d'un corps solide admet des intégrales uniformes. (942-945).

L'auteur intègre, dans un cas très étendu, les équations simultanées

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi} + \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) - \cos\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},$$

$$B\frac{dq}{dt} + (C - A)pr = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi} + \cos\theta\frac{\partial U}{\partial\varphi}\right) + \sin\varphi\frac{\partial U}{\partial\theta},$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = \frac{\partial U}{\partial\varphi},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = q\sin\varphi - p\cos\varphi,$$

$$\sin\theta\frac{d\psi}{dt} = q\cos\varphi - p\sin\varphi,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = r + \cos\theta\frac{d\psi}{dt},$$

intégrées dans un cas particulier par M. Tisserand, qui les a introduites dans la théorie de la précession des équinoxes.

En supposant que A est égal à B et que la fonction des forces U est une série entière en $\cos\theta$, M. Gyldén réussit à exprimer $\cos\theta$ par une série périodique

par rapport au temps. Dans le cas où U est un polynôme en $\cos\theta$, ce cosinus peut s'exprimer en fonction elliptique ou hyperelliptique du temps.

L'auteur se propose de chercher à quel problème de Mécanique correspond une telle expression de la fonction des forces.

Vessiot. — Sur une classe d'équations différentielles. (959-961).

M. Vessiot s'occupe des équations du second ordre

$$(1) \qquad x'' = F(x, x', t),$$

dont l'intégrale générale s'exprime en fonction d'intégrales particulières x_1, $x_2, \ldots, x_n$ par une formule connue ou inconnue, mais dont la forme ne dépende pas de ces intégrales particulières

$$(2) \qquad x = f(x_1, x'_1, \ldots x_n, x'_n \mid a, b).$$

On en déduit pour x', en tenant compte de (1), une formule analogue

$$(3) \qquad x' = g(x_1, x'_1, \ldots, x_n, x'_n \mid a, b).$$

En se bornant au cas où t ne figure explicitement dans aucune des formules (2) et (3), M. Vessiot montre que toute équation de la classe considérée se ramène à une équation linéaire sans second membre ou avec second membre, ou à une équation de la forme

$$x'' + 3xx' + x^3 + 3\lambda(x' + x^2) + 3\mu x + \nu = 0,$$

c'est-à-dire ayant pour intégrales les dérivées logarithmiques des intégrales d'une équation linéaire homogène du troisième ordre, ou s'abaisse au premier ordre, par une transformation

$$X = \varphi(x, x').$$

Cartan. — Sur la structure des groupes finis et continus. (962-964).

L'auteur s'occupe dans cette Note de la structure des groupes en général. M. Lie a partagé les groupes en deux grandes classes : les groupes *intégrables* et les groupes *non intégrables*. M. Killing a introduit une autre classification des groupes, fondée sur le *rang* des groupes, c'est-à-dire sur le nombre des coefficients indépendants de l'équation caractéristique de ce groupe.

Étudiant d'abord le cas où le groupe est *parfait* (c'est-à-dire est à lui-même son propre dérivé) et où toutes les racines de son équation caractéristique sont simples, M. Killing est arrivé à trois sortes de groupes : 1° les groupes *simples;* 2° les groupes *semi-simples,* formés de sous-groupes invariants simples échangeables entre eux; 3° des groupes formés d'un sous-groupe simple ou semi-simple et d'un sous-groupe invariant à transformations toutes échangeables entre elles.

Par des considérations qui manquent de rigueur, il est parvenu à ce résultat général, juste néanmoins : Tout groupe non intégrable est formé d'un sous-groupe simple ou semi-simple et d'un sous-groupe invariant intégrable.

M. Cartan a repris la démonstration de ce théorème de M. Killing. Il en énonce deux autres qui lui sont équivalents :

1° Tout groupe qui n'admet pas de sous-groupe invariant intégrable est simple ou semi-simple;

2° Si l'on considère le plus grand sous-groupe invariant intégrable g d'un groupe G, il existe un sous-groupe g' qui avec g complète G.

L'auteur a déduit la première de ces propositions de cette propriété remarquable du coefficient de ω^{r-2} dans l'équation caractéristique :

Pour qu'un groupe soit intégrable, il faut et il suffit que toutes les transformations de son groupe dérivé annulent ce coefficient de ω^{r-2}.

La considération de ce même coefficient donne immédiatement, sans résolution d'aucune équation, le plus grand sous-groupe invariant intégrable du groupe donné.

M. Cartan indique en terminant un résultat qu'il a obtenu relativement à la forme comparée des équations caractéristiques d'un groupe G et de son groupe dérivé G'.

Guldberg. — Sur les équations différentielles ordinaires qui possèdent un système fondamental d'intégrales. (964-965).

Étant donné le système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, \ldots, x_n), \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, \ldots, x_n),$$

l'auteur étudie les différents cas où l'on peut exprimer le système général de solutions $x_1, \ldots, x_n$ par ces systèmes particuliers de solutions

$$(1) \qquad x_1^{(1)}, \ \ldots, \ x_n^{(1)}; \ \ldots; \ x_1^{(m)}, \ \ldots, \ x_n^{(m)},$$

et n constantes arbitraires a par des formules connues ou inconnues

$$x_i = f_i(x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}; \ldots; x_1^{(m)}, \ldots, x_n^{(m)}; a_1, \ldots, a_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui subsistent lorsqu'on y remplace les solutions (1) par mn autres solutions particulières quelconques.

C'est la généralisation d'une question que s'est proposée antérieurement M. Vessiot.

Kœnigs. — Sur la réduction du problème des tautochrones à l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré. (965-968).

M. Kœnigs rencontre cette équation en cherchant les surfaces S sur lesquelles une famille donnée de surfaces $U(x, y, z)$ découpent une famille de courbes parallèles. L'équation différentielle de ces surfaces S est

$$(1) \quad \left(\frac{\partial H}{\partial x}p + \frac{\partial H}{\partial y}q - \frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - (p^2 + q^2 + 1)\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - 1\right] = 0,$$

H désignant une fonction arbitraire de U.

M. Lie avait déjà signalé les équations de la forme (1) comme possédant, à l'exclusion de toute autre, la propriété d'admettre des caractéristiques géodésiques.

M. Kœnigs montre qu'elles fournissent la solution générale du problème des tautochrones.

En effet, d'après la théorie générale due à Monge, toute intégrale de l'équation

$$(2) \qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 - \left(\frac{\partial H}{\partial x}dx + \frac{\partial H}{\partial y}dy + \frac{\partial H}{\partial z}dz\right)^2 = 0$$

s'obtiendra en prenant sur une surface intégrale de (1) la courbe enveloppe E des caractéristiques. Or ces courbes E sont des courbes tautochrones pour la force dérivant du potentiel

$$V = \alpha - \beta H^2,$$

où α, β sont deux constantes quelconques dont la dernière est positive.

Réciproquement, le problème des tautochrones pour la fonction de forces V se ramènera à l'équation (2) où l'on fera

$$H = \sqrt{\frac{\alpha - V}{\beta}}.$$

Dans le cas où la fonction H ne dépend pas de z, l'équation (1) n'est autre que celle dont la méthode de Jacobi ferait dépendre le problème des géodésiques sur la surface

$$z = iH(x, y).$$

On voit que, si l'on connaît les géodésiques d'une surface, on peut en déduire des solutions, avec une constante arbitraire, d'un problème de tautochrones.

Picard. — Sur l'équation $\Delta u = ke^u$. (1015-1017).

M. Picard revient sur un théorème fondamental relatif à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u \qquad (k > 0),$$

qu'il a déjà annoncé, et qu'il généralise et complète actuellement de la façon suivante :

« Il existe une intégrale de cette équation, continue sur les m feuillets d'une surface donnée de Riemann, sauf en certains points donnés O_1, O_2, ..., O_n de cette surface, et aux m points à l'infini sur chacun des feuillets. Dans le voisinage du point O_i, on suppose que l'on ait

$$u = \beta_i \log r_i + v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

β_i étant une constante, r_i désignant la distance d'un point (x, y) au point O_i et la fonction v_i étant continue en O_i.

Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang k, on imagine que l'on fasse une inversion qui le ramène à distance finie; on suppose alors que l'on ait sur

le feuillet considéré, dans le voisinage du point transformé,

$$u = \alpha_k \log r'_k + V_k \quad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

α_k désignant une constante et V_k étant continue.

Les constantes α et β sont données; on suppose seulement vérifiées les inégalités

$$\beta_i > -2, \quad \alpha_k > 2,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

Gyldén. — Sur un cas général où le problème de la rotation d'un corps solide admet des intégrales s'exprimant au moyen de fonctions uniformes. (1028-1031).

Grâce aux résultats obtenus dans sa précédente Communication, M. Gyldén parvient à résoudre le problème du mouvement d'un solide de révolution homogène suspendu par un point de son axe et attiré par un point extérieur en raison inverse du carré de la distance.

Si ρ désigne la densité, l la constante de l'attraction, a, e_0, e_1, $\ldots$, e_ν les coefficients du développement de la distance r d'un point de la surface du corps au point de suspension

$$r = a(e_0 + e_1 \cos\chi + e_2 \cos^2\chi + \ldots + e_\nu \cos^\nu\chi)$$

avec la condition

$$|e_0| + |e_1| + \ldots + |e_\nu| < 1,$$

on a pour expression de la fonction des forces

$$U = \frac{4\pi l a^2}{\rho} \sum \frac{e_n^{(n+1)} X_n(\cos\theta)}{(n+3)(2n+1)} \left(\frac{a}{\rho}\right)^n,$$

X_n étant un polynôme de Legendre, et les $e_n^{(n+1)}$ des fonctions des constantes e_0, e_1, $\ldots$, e_ν.

Adam. — Sur les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système ou dans les deux systèmes. (1036-1039).

M. Darboux a le premier résolu le problème de trouver les surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système.

En général, les plans des lignes de courbure de ce système enveloppent un cône.

En s'attachant au cas particulier où ce cône dégénère en un cylindre, M. Adam est parvenu à dégager les équations des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, et celles des surfaces à courbure moyenne constante et à lignes de courbure planes dans un système.

Les seules surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes pour lesquelles les plans des lignes de courbure de l'un des systèmes passent par une droite fixe sont les cyclides de Dupin.

Les seules surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système pour lesquelles les plans de ces lignes de courbure passent par une droite fixe

sont les surfaces qui ont pour équations

$$X = ai\cos\lambda \frac{\sin 2aiv}{\cos 2aiv - \cos 2au},$$

$$Y = ai\sin\lambda \frac{\sin 2aiv}{\cos 2aiv - \cos 2au},$$

$$Z = a \frac{\sin 2au}{\cos 2aiv - \cos 2au},$$

où λ représente une fonction quelconque de v.

En ce qui concerne les surfaces à courbure moyenne constante, l'auteur montre que les plans des lignes de courbure planes enveloppent nécessairement un cylindre.

Il n'existe pas de surfaces à courbure moyenne constante différente de zéro dont les lignes de courbure soient planes dans les deux systèmes.

Gordan. — Sur la transcendance du nombre *e* (1040-1041).

L'auteur présente une démonstration de la transcendance du nombre e dans laquelle il se sert uniquement du développement en série qui représente ce nombre. M. Gordan est en possession d'une démonstration analogue de la transcendance du nombre π.

Drach. — Sur une application de la théorie des groupes de Lie. (1041-1044).

Soit un système d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles définissant p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On suppose que la solution générale de ce système s'exprime d'une manière *déterminée, toujours la même,* à l'aide d'un nombre fini r de solutions particulières *quelconques* et d'un nombre fini k de constantes arbitraires $c_1, \ldots, c_k$ ou de fonctions arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ d'arguments déterminés.

Si l'on veut édifier une théorie *complète* de la détermination du système $(z_1, z_2, \ldots, z_p)$, il est nécessaire de substituer à la recherche de la solution générale la recherche, équivalente au point de vue de la difficulté, des r solutions particulières

$$(z_1, \ldots, z_p)_1, \quad \ldots, \quad (z_1, \ldots, z_p)_r.$$

Ce second problème dépend toujours de l'étude d'un groupe qu'on obtient de la manière suivante :

On écrit les égalités qui donnent la solution générale $(z_1, \ldots, z_p)$ en fonction des solutions particulières, et l'on y remplace successivement : au premier membre $(z_1, \ldots, z_p)$ par r nouveaux systèmes de variables

$$(Z_1, \ldots, Z_p)_1, \quad \ldots, \quad (Z_1, \ldots, Z_p)_r,$$

au second membre les constantes ou les fonctions arbitraires par r nouveaux systèmes de constantes ou de fonctions

$$(c_1, \ldots, c_k)_1, \quad \ldots, \quad (c_1, \ldots, c_k)_r,$$

ou

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)_1, \quad \ldots, \quad (\varphi_1, \ldots, \varphi_k)_r,$$

Les pr égalités ainsi obtenues définissent entre les pr variables z et les variables Z un groupe de transformations, qui est le groupe cherché.

Les invariants de ce groupe fondamental sont des fonctions d'un nombre limité d'entre eux, et qui sont, dans le cas général, les seules fonctions que l'on connaisse sans intégration ou résolution d'équations. Tout abaissement de la difficulté du problème se traduit par la connaissance d'un invariant caractéristique d'un sous-groupe du groupe fondamental, et *réciproquement*.

L'auteur indique quelques exemples où les considérations qui précèdent trouvent leur application. Un des plus importants est celui des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes complets de telles équations.

Autonne. — Sur la limitation du degré pour les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. (1045).

L'auteur établit le théorème suivant, énoncé dans la terminologie qui lui est habituelle :

« Le degré n de l'intégrante algébrique irréductible G, située sur une surface algébrique F de degré N, est limité dès qu'on limite le degré μ de multiplicité sur G d'un point singulier quelconque de F. »

Simart. — Sur un théorème relatif à la transformation des courbes algébriques. (1047-1050).

M. Nöther a démontré qu'on peut toujours, par une transformation Cremona, transformer une courbe algébrique quelconque en une autre n'ayant que des points multiples à tangentes distinctes. Halphen a cherché à établir qu'on peut ramener tous les points multiples à être des points doubles; mais sa démonstration est peu rigoureuse. M. Simart établit ce théorème d'une manière qui le met à l'abri de toute objection.

Goursat. — Sur une classe de problèmes de Dynamique. (1050-1051).

Soient $q_1, \ldots, q_n$ les variables indépendantes qui déterminent la position d'un système; $q'_1, q'_2, \ldots, q'_n$ leurs dérivées par rapport au temps; ψ un déterminant de n^2 éléments φ_{kj}, dans lequel tous les éléments $\varphi_{k1}, \ldots, \varphi_{kn}$ de la $k^{\text{ième}}$ ligne sont fonctions de la seule variable q_k. En supposant ce déterminant développé suivant les éléments de la première colonne, on a

$$\Phi = \Phi_{11}\varphi_{11} + \ldots + \Phi_{n1}\varphi_{n1}.$$

Posant

$$\Psi = \Phi_{11}\psi_1 + \ldots + \Phi_{n1}\psi_n,$$

où ψ_i est une fonction de q_i seulement, M. Goursat envisage un problème de Dynamique où la force vive 2T et la fonction des forces U ont respectivement pour expressions

$$2T = \Phi\left(\frac{q_1'^2}{\Phi_{11}} + \frac{q_2'^2}{\Phi_{21}} + \ldots + \frac{q_n'^2}{\Phi_{n1}}\right), \qquad U = \frac{\Psi}{\Phi}.$$

Alors l'équation aux dérivées partielles à laquelle conduit la méthode de Ja-

cobi admet l'intégrale complète

$$V = -\alpha_1 t + \sum_{i=1}^{n} \int \sqrt{2(\alpha_1 \varphi_{i1} + \ldots + \alpha_n \varphi_{in} + \psi_i)}\, dq_i,$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignant des constantes arbitraires. On en déduit sans difficulté les équations du mouvement.

Le problème résolu par M. Goursat est une généralisation de la question traitée récemment par M. Stæckel; ce dernier supposait $U = C$.

Vessiot. — Sur une classe de systèmes d'équations différentielles ordinaires. (1112-1114).

L'auteur donne la forme générale des systèmes d'équations différentielles à systèmes fondamentaux d'intégrales. Voici comment il y est conduit :

L'intégrale générale d'un tel système est définie par les équations d'un groupe

$$(1) \qquad x_i = f_i(c_1, \ldots, c_n;\; a_1, \ldots, a_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les équations fondamentales de la théorie des groupes donnent en effet

$$\frac{dx_i}{da_k} = \sum_{j=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r)\, \xi_{ij}(x_1, \ldots, x_n);$$

d'où, en posant

$$(2) \qquad \sum_{h=1}^{r} \psi_{jk}(a_1, \ldots, a_r) \frac{da_k}{dk} = \theta_j(t),$$

on conclut, pour les équations du système considéré

$$(3) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{r} \theta_j(c)\, \xi_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

les r transformations infinitésimales

$$X_j f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r),$$

définissant un groupe G à r paramètres. De plus, dans le cas présent, G est p fois transitif.

On peut montrer alors que les a s'expriment en fonction de np intégrales de p solutions particulières quelconques. La recherche des systèmes d'équations à systèmes fondamentaux est donc identique à la détermination d'une classe de groupes de transformation.

Dans le cas où le groupe G est quelconque, le système (3) est équivalent à l'équation unique, étudiée par S. Lie,

$$(4) \qquad \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r} \theta_j(f)\, X_i f = 0.$$

M. Vessiot explique comment le problème de l'intégration des équations telles que (4) est relié à la structure du groupe G.

Scheffers. — Sur la généralisation des fonctions analytiques. (1114-1117).

M. Scheffers cherche à généraliser la théorie des fonctions en partant d'un système de nombres complexes. Il arrive ainsi à une classe de groupes nés tous contenus d'ailleurs dans ceux qu'a trouvés M. Picard, qui s'est déjà posé la même question.

L'auteur prend comme point de départ un système général de nombres complexes, composé au moyen de n unités irréductibles $e_1, \ldots, e_n$, en sorte que tout nombre x du système ait la forme

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n,$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant des nombres complexes ordinaires.

Il admet seulement, d'abord, pour la multiplication, la loi distributive

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd,$$

sans supposer ni la loi commutative ni la loi associative.

Il suppose ensuite que le système contient le *module* ε, c'est-à-dire un nombre $\varepsilon = \varepsilon_1 e_1 + \ldots + \varepsilon_n e_n$ tel que l'on ait $x\varepsilon = \varepsilon x = x$.

Cela posé, si $f_1, \ldots, f_n$ représentent n fonctions continues de $x_1, \ldots, x_n$, il cherche si la fonction $f = f_1 e_1 + \ldots + f_n e_n$ de $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$ est *analytique*, c'est-à-dire a une dérivée $\frac{df}{dx}$ indépendante de $dx_1, \ldots, dx_n$, et il arrive à cette condition :

« Dans un système distributif avec un module, il n'existe de fonctions analytiques et d'intégrales analytiques que dans le cas où le système est aussi commutatif et associatif. Dans un tel système, il y a une infinité de fonctions analytiques. »

Elliot. — Sur les cas d'intégrabilité du mouvement d'un point dans un plan. (1117-1120).

Lorsqu'un mobile est sollicité par des forces résultant d'un potentiel, la condition pour que le problème admette une intégrale quadratique du second degré se traduit par une équation aux dérivées partielles du second ordre que doit vérifier la fonction des forces. Cette équation, rencontrée par M. Bertrand, admet pour intégrale générale les expressions trouvées par Liouville (*Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XI). C'est là un résultat que M. Elliot établit aisément au moyen de l'expression générale des éléments linéaires susceptibles d'être ramenés à la forme harmonique.

Hermite. — Notice sur les travaux de M. Kummer. (1163-1164).

Guichard. — Sur des propriétés géométriques qui ne dépendent que de la représentation sphérique. (1238-1240).

Soit un réseau conjugué d'une surface (g) qui a la même représentation sphérique que les développables d'une congruence (G); la tangente n_1 aux courbes u = const. de cette surface est parallèle à la normale N_1 à l'une des surfaces focales. La congruence (n_1) a donc même représentation sphérique que le réseau conjugué (N_1).

De la congruence (G) on déduit, par l'application répétée de la méthode de Laplace, une série de réseaux conjugués et de congruences. De même, du réseau conjugué (g) on déduit une seconde série de congruences et de réseaux conjugués. La représentation sphérique d'un élément d'une série détermine celle de tous les autres éléments. A chaque réseau d'une série correspond une congruence de l'autre et les éléments correspondants ont même représentation sphérique.

De là se conclut l'identité des deux problèmes suivants :

1° Trouver un réseau conjugué de lignes de courbure qui, après p transformations de Laplace, se transforme en un réseau analogue;

2° Trouver une congruence de normales qui, après p transformations de Laplace, se transforme en une congruence de normales.

Dans le cas de $p = 1$, on voit qu'il y a équivalence entre ces deux questions :

1° Trouver une congruence dont les développables touchent les surfaces focales suivant leurs lignes de courbure;

2° Trouver une surface qui admet un réseau conjugué formé de géodésiques.

Caronnet. — Sur les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et isothermes. (1240-1242).

A propos de la Note récente de M. P. Adam (*Comptes rendus,* 8 mai 1893), M. Caronnet rappelle qu'il a communiqué, il y a plus d'un an, à M. Darboux la solution complète du problème des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, et dresse le tableau des résultats auxquels il est parvenu.

Scheffers. — Théorèmes relatifs aux fonctions analytiques à n dimensions. (1242-1244).

En élargissant la notion de transformation conforme, M. Scheffers arrive à une généralisation des fonctions analytiques identique à celle qu'il a exposée dans une Note précédente.

Soit donnée, dans l'espace à n dimensions, une transformation quelconque

$$(1) \qquad x'_i = f(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Les éléments infinitésimaux de l'espace autour du point ($x_1, \ldots, x_n$) seront transformés en éléments infinitésimaux de l'espace autour du point ($x'_1, \ldots, x'_n$) par la transformation projective

$$(2) \qquad dx'_i = \sum_k \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

En regardant dans la transformation (2), $x_1, \ldots, x_n$ comme des paramètres,

on peut traiter le cas où toutes ces transformations (2), déduites de la même transformation (1), forment un groupe g simplement transitif de transformations échangeables. Inversement, si ce groupe g est donné, on peut montrer que l'on obtient toutes les transformations (1) en formant les fonctions analytiques $f_1 e_1 + \ldots + f_n e_n$ du système de nombres complexes à g unités $e_1, \ldots, e_n$, qui est défini par le groupe g.

La représentation conforme est un cas très particulier des transformations (1).

En développant cette théorie, M. Scheffers est conduit au résultat suivant :

Dans un espace à n dimensions, chaque groupe de transformations, pour lesquelles les éléments infinitésimaux de l'espace sont soumis à des transformations d'un groupe donné simplement transitif g de transformations échangeables, peut être réduit, par l'introduction de nouvelles variables, à un sous-groupe du groupe $z' = \dfrac{az+b}{cz+d}$, si l'on considère z', z, a, b, c, d comme des nombres complexes dans le système à n unités $e_1, \ldots, e_n$ qui est défini par le groupe g.

Vaschy. — Sur une propriété générale des champs admettant un potentiel. (1244-1247).

Qu'on imagine en chaque point de l'espace un vecteur f dont les composantes suivant trois axes rectangulaires dérivent d'un potentiel uniforme V. On suppose le vecteur f fini et continu dans un champ E limité par une surface fermée, sauf sur certaines surfaces de discontinuité où sa composante normale varie brusquement d'une face à l'autre.

Un tel champ jouit de la propriété suivante :

Il est toujours possible de trouver une distribution de masses $m_1, m_2, \ldots$, telle que la fonction

$$V' = \frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2} + \ldots$$

soit identique à V dans le champ E; $r_1, r_2, \ldots$, désignant les distances respectives des masses $m_1, m_2, \ldots$ au point (x_1, y_1, z_1).

Andrade. — Sur l'application répétée du théorème de Bernoulli. (1281-1284).

Quand on envisage deux séries parallèles d'événements

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_i,\ \ldots;\quad B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_i,\ \ldots,$$

en nombre indéfini, et dont les probabilités respectives sont

$$q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_i,\ \ldots;\quad Q_1,\ Q_2,\ \ldots,\ Q_i,\ \ldots,$$

il peut arriver qu'on ait, pour $i = \infty$,

$$\lim q_i = \lim Q_i = 0,$$

et que le rapport $\dfrac{q_i}{Q_i}$ tende vers une valeur finie et déterminée.

On suppose qu'on soumette l'apparition de deux événements correspondants

b_i, B_i à μ_i, épreuves successives et que l'entier μ_i soit pris assez grand pour que les produits $\mu_i q_i$, $\mu_i Q_i$ croissent indéfiniment avec i.

Dans μ_i premières épreuves, l'événement b_i arrive m_i fois; dans ces μ_i épreuves, l'événement B_i arrive M_i fois.

En appliquant à ces deux séries de répétitions d'épreuves la méthode employée dans la démonstration du théorème de Bernoulli, M. Andrade trouve

$$\frac{m_i}{M_i} = \frac{q_i}{Q_i}\left[1+(q_i)+\left(\frac{1}{\mu_i q_i}\right)^{\frac{1}{3}+\omega}\right] \qquad \left(\omega < \frac{1}{6}\right)$$

avec une probabilité moindre que

$$1-\left(\frac{1}{\mu_i q_i}\right).$$

Si donc le produit

$$\prod_{i=h}^{i=\infty}\left[1-\left(\frac{1}{\mu_i q_i}\right)\right]$$

est convergent, on voit que la succession des valeurs $\frac{m_h}{M_h}$, $\frac{m_{h+1}}{M_{h+1}}$, $\dots$ forme une suite d'approximations en nombres rationnels de la quantité $\lim \frac{q_i}{Q_i}$, et cela avec une probabilité qui tend vers la certitude quand h augmente indéfiniment.

Stæckel. — Sur les problèmes de Dynamique qui se réduisent à des quadratures. (1284-1286).

Dans le problème récemment posé par M. Goursat, les équations du mouvement peuvent être ramenées au système plus général

$$\sum_{k=1}^{n}\int \frac{\varphi_{k\lambda}(q_k)\,dq_k}{\sqrt{\psi_k(q_k)}} = t_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n),$$

qui donne lieu à un problème d'inversion entre les variables réelles $q_1, q_2, \dots, q_n$ et $t_1, t_2, \dots, t_n$.

M. Stæckel suppose :

1° Que les fonctions $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$ peuvent être mises sous la form

$$\psi_k = (q_k - a_k)(b_k - q_k)\,\chi_k(q_k),$$

où les constantes a_k et b_k sont réelles, et où les fonctions χ_k sont finies et positives;

2° Que les fonctions $\varphi_h(q_k)$ conservent leur signe et que le déterminant des quantités $\frac{\varphi_{k\lambda}(q_k)}{\sqrt{\psi_k}}$ est fini et différent de zéro.

Alors les variables $q_1, q_2, \dots, q_n$ sont des fonctions uniformes de $t_1, t_2, \dots, t_n$, qui ont exactement n systèmes de périodes réelles

$$2\omega_{\mu 1},\quad 2\omega_{\mu 2},\quad \dots,\quad 2\omega_{\mu n} \qquad (\mu + 1, 2, \dots, n),$$

données par la formule

$$\omega_{k\lambda} = \int_{a_k}^{b_k} \frac{\varphi_{k\lambda}(q_k)\, dq_k}{\sqrt{\psi_k(q_k)}}.$$

M. Stæckel fait l'application de ce résultat au problème de M. Goursat. Il détermine notamment la condition sous laquelle le mouvement peut être périodique.

Boussinesq. — Théorie de l'écoulement sur les déversoirs sans contraction latérale en tenant compte des variations qu'éprouve, suivant le niveau d'aval, la contraction inférieure de la nappe déversante. (1327-1333).

Cayley. — Sur la fonction modulaire $\chi\omega$. (1339-1343).

L'auteur donne de la fonction modulaire diverses expressions dont chacune met en évidence une propriété de cette fonction.

Humbert. — Sur une classe de surfaces à génératrices rationnelles. (1350-1352).

Si l'on peut tracer sur une surface algébrique une série simplement infinie de courbes unicursales du même ordre N, se coupant deux à deux en un point mobile, la surface est représentable point par point sur le plan. Elle admet une série linéaire doublement infinie de courbes unicursales d'ordre N se coupant deux à deux en un point et dont fait partie la série primitive; ces courbes ont pour images les droites du plan, et les sections planes de la surface ont pour images des courbes quelconques d'ordre N.

L'ordre de la surface est donc inférieur à N^2. Pour le cas de $N = 2$, on a le théorème suivant :

« Toute surface sur laquelle on peut tracer une série simplement infinie de coniques, de telle sorte qu'il passe plus d'une conique de la série par chaque point de la surface, est une surface de Steiner ou une dégénérescence de cette surface. »

Du théorème général on déduit que toute surface engendrée par une série de courbes unicursales de même ordre, se coupant deux à deux en k points mobiles, est *rationnelle*.

Scheffers. — Sur quelques surfaces avec plusieurs modes de génération. (1352-1354).

Un des problèmes les plus intéressants de la théorie des surfaces consiste à trouver toutes les surfaces qui peuvent être engendrées par le mouvement de translation d'une courbe c et aussi par le mouvement de translation d'une autre courbe c'.

Ce problème, résolu par Sophus Lie, a une connexion très étroite avec une question de la théorie des systèmes de nombres complexes que M. Scheffers énonce ainsi :

« Étant donné un système de nombres complexes $(e_1, \ldots, e_n)$, trouver $2n$ courbes $c_1, \ldots, c_n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ dans l'espace à n dimensions du système avec la propriété suivante : si l'on prend n points quelconques respectivement sur les n courbes $c_1, \ldots, c_n$, c'est-à-dire n nombres $a_1, \ldots, a_n$, il y a toujours n points $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sur les n courbes $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, tels que le produit $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ soit égal au produit $a_1 a_2 \ldots a_n$.

L'auteur fait remarquer que le problème est immédiatement résolu pour tout système commutatif. En effet, puisqu'on peut réduire tout groupe simplement transitif de transformations échangeables à un groupe de translations (Lie), on est ramené au problème des surfaces de translation étendu à l'hyperespace.

M. Scheffers montre ensuite comment le même problème peut être résolu pour les systèmes non commutatifs.

Vaschy. — Propriété générale d'un champ quelconque n'admettant pas de potentiel. (1355-1357).

Que l'on imagine une *masse vectorielle* placée en un point m de l'élément de volume $d\omega$, et développant en un point quelconque M situé à une distance r, dans une direction mM faisant avec le vecteur $\mu\, d\omega$ un angle θ, une force de grandeur égale à $\frac{\mu\, d\omega \sin\theta}{r^2}$, dirigée perpendiculairement au plan de ce vecteur et de la droite mM (loi électromagnétique de Laplace).

On peut alors énoncer la propriété suivante d'un champ fini quelconque, constant ou variable avec le temps.

La répartition de la force (ou du vecteur) f aux divers points du champ, à une époque t, est identique à la répartition de la résultante de deux forces f_1, f_2 définies ainsi : la force f_1 serait développée par un système de masses agissant à distance suivant la loi de la gravitation universelle; f_2 par un système de *masses vectorielles* agissant suivant la loi de Laplace. La densité ρ des premières masses et les composantes μ_x, μ_y, μ_z de la densité μ des masses vectorielles sont données par les formules

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$4\pi\mu_x = \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}, \qquad 4\pi\mu_y = \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}, \qquad 4\pi\mu_z = \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x},$$

où X, Y, Z désignent les composantes de f.

Si l'on fait l'application de ce théorème au mouvement d'un corps élastique, on voit que la force d'inertie, dont les composantes sont $\frac{d^2 u}{dt^2}, \frac{d^2 v}{dt^2}, \frac{d^2 w}{dt^2}$, est identique à celle que créeraient un système de masses ordinaires et un système de masses vectorielles dont les densités seraient données par les formules

$$4\pi\rho = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right), \qquad 4\pi\mu_x = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad \ldots.$$

Guyou. — Sur les termes d'ordre supérieur de la déviation du compas. (1357-1361).

Boussinesq. — Vérifications expérimentales de la théorie des déversoirs sans contraction latérale, à nappe libre en dessous. (1415-1418).

Boussinesq. — Sur une simplification qu'on introduit dans certaines formules de résistance vive des solides en y faisant figurer la plus grande dilatation linéaire Δ que comporte leur matière, à la place de la force élastique correspondante R_0. (1418-1421).

Wœlsch. — Sur les surfaces à élément linéaire de Liouville et les surfaces à courbure constante. (1435-1437).

Les lignes géodésiques des surfaces dont l'élément linéaire a la forme de Liouville sont données par la formule

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{V+a}} = b.$$

Les tangentes de la famille de géodésiques obtenue en supposant a constant forment une congruence de normales. Un des points focaux d'une droite de cette congruence est son point de contact m avec la surface; le second point focal m' a pour lieu, quand on fait varier a, une courbe c_m qui est une strophoïde générale. Si la surface est applicable sur une surface de révolution, la courbe c_m se réduit à un cercle passant par m.

On peut se poser une question analogue pour une surface quelconque. A tout groupement de géodésiques correspondra dans chaque plan tangent une courbe c_m. Existe-t-il des surfaces pour lesquelles on puisse grouper les géodésiques de telle manière que les courbes correspondant à ce groupement aient une propriété donnée, par exemple qu'elles soient transformables les unes dans les autres par des transformations données?

En supposant que la figure contenant le point m et la courbe c_m soit la même pour tous les points de la surface, on trouve que les surfaces à courbure constante répondent seules à la question. Les courbes correspondantes c_m dépendent de deux paramètres. Si l'on trace dans le plan tangent le cercle de centre m et de rayon a $\left(-\frac{1}{a^2}\text{ étant la courbure totale}\right)$, toute courbe c_m est l'inverse par rapport à ce cercle d'une conique ayant avec lui un contact du troisième ordre.

Appell. — Sur l'emploi des équations de Lagrange dans la théorie du choc et des percussions. (1483-1487).

On peut toujours choisir les variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ de telle façon que les liaisons nouvelles, brusquement introduites, soient exprimées par les équations

$$q_{n+1}=0, \quad q_{n+2}=0, \quad \ldots, \quad q_k=0 \qquad (n<k).$$

Alors les équations qui font connaître la variation des vitesses sont

$$(1) \qquad \left(\frac{dT}{dq'_i}\right)_1 - \left(\frac{dT}{dq'_i}\right)_0 = 0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Elles sont linéaires et homogènes par rapport aux k différences

$$(q'_1)_1-(q'_1)_0, \quad \ldots, \quad (q'_k)_1-(q'_k)_0.$$

Dans ces équations (1), $q_1, q_2, \ldots, q_k$ sont les valeurs qui correspondent à l'instant de la percussion, de sorte que $q_{n+1}, q_{n+2}, \ldots, q_k$ sont nuls. Mais les dérivées $q'_{n+1}, q'_{n+2}, \ldots, q'_k$ ne sont nécessairement nulles ni avant ni après la percussion. Elles seraient nulles après, dans le cas particulier où les liaisons introduites seraient permanentes. Alors les n équations (1) détermineraient complètement l'état du système après le choc.

Hadamard. — Sur le module maximum que puisse atteindre un déterminant. (1500-1501).

Sachant que, dans un déterminant d'ordre n, les éléments restent en valeur absolue inférieurs à l'unité, quelle est la plus grande valeur que puisse prendre ce déterminant?

M. Hadamard montre que le véritable maximum est $n^{\frac{n}{2}}$, quantité moindre que la limite supérieure évidente $1.2\ldots n$.

Ce maximum $n^{\frac{n}{2}}$ est atteint lorsque tous les éléments ont pour module 1 et sont proportionnels aux quantités conjuguées des mineurs correspondants (déterminants *inversement orthogonaux* de Sylvester).

Pour toute valeur de n, il existe au moins un pareil déterminant, savoir le déterminant de Vandermonde formé avec les racines de l'équation binôme $x^n=1$.

Pour $n=3$, tout déterminant maximum se ramène à celui-là. Mais il n'en est pas de même pour les valeurs suivantes de n, et M. Hadamard montre que la question comporte plus d'arbitraire que ne l'a indiqué Sylvester.

SITZUNGSBERICHTE DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

1er semestre 1891.

Kronecker (*L.*). — Réduction algébrique des faisceaux de formes quadratiques (suite). (9-17).

Soient

$$\sum_{i,k} a_{i,k} x_i x_k, \qquad \sum_{i,k} b_{i,k} x_i x_k$$
$$(i, k=1, 2, \ldots, n),$$

deux formes quadratiques quelconques d'ordre n. Désignons par w une variable et par t un nombre entier fixé arbitrairement de manière que le *rang* du sys-

tème de nombres

$$a_{i,k} - tb_{i,k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

ne soit pas plus petit que le rang du système de quantités

$$ua_{i,k} + vb_{i,k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où u et v sont deux quantités indéterminées. Envisageons les polynomes en w représentés par le déterminant

$$| wa_{i,k} - (wt+1) b_{i,k} | \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

et par tous les mineurs de ce déterminant; soient

$$w^{(0)}, \quad w^{(1)}, \quad w^{(2)}, \quad \ldots, \quad w^{(\alpha)}$$

les zéros de tous ces polynomes.

Désignons, d'autre part, par

$$\Phi_1^{(\nu)}, \quad \Phi_2^{(\nu)}, \quad \Phi_3^{(\nu)}, \quad \ldots; \qquad \Psi_1'^{(\nu)}, \quad \Psi_2'^{(\nu)}, \quad \Psi_3'^{(\nu)}, \quad \ldots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \alpha)$$

les formes quadratiques particulièrement simples que l'on obtient en donnant à l'indice μ les valeurs 1, 2, ... dans les expressions

$$\Phi_\mu^{(\nu)} = \sum_{k,\lambda} X_{k,\mu}^{(\nu)} X_{\lambda,\mu}^{(\nu)} - \delta_{0,\nu} [X_{\gamma,\mu}^{(\nu)}]^2$$

$$\left[\mu = 1, 2, \ldots; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad k + \lambda = n_\mu^{(\nu)} - 1; \quad 0 \leqq k < n_\mu^{(\nu)}; \quad \gamma = \frac{1}{2}(n_\mu^{(\nu)} - 1)\right],$$

$$\Psi_\mu'^{(\nu)} = \sum_{k,\lambda} X_{k,\mu}^{(\nu)} X_{\lambda,\mu}^{(\nu)}$$

$$\left(\mu = 1, 2, \ldots; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots; \quad k + \lambda = n_\mu^{(\nu)} - 2; \quad 0 \leqq k < n_\mu^{(\nu)} - 1\right);$$

les nombres entiers $n_\mu^{(\nu)}$ sont connus dès que l'on a fixé les coefficients $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ des deux formes quadratiques envisagées, et le nombre entier t; les entiers $n_\mu^{(0)}$ sont nécessairement impairs; le symbole $\delta_{0,\nu}$ représente zéro ou l'unité suivant que l'on a $\nu > 0$ ou $\nu = 0$; enfin les quantités

$$X_{0,\mu}^{(\nu)}, \quad X_{1,\mu}^{(\nu)}, \quad X_{2,\mu}^{(\nu)}, \quad \ldots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \alpha; \; \mu = 1, 2, \ldots)$$

sont des fonctions linéaires et homogènes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont les coefficients sont des fonctions rationnelles connues des quantités

$$a_{i,k}, \; b_{i,k} \; (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et des quantités $w^{(0)}, w^{(1)}, \ldots, w^{(\alpha)}$.

Kronecker nomme *faisceau de formes réduit* tout faisceau de formes du type

$$\sum_\nu \sum_\mu \left[(U + V w^{(\nu)}) \Phi_\mu^{(\nu)} + V \Psi_\mu'^{(\nu)}\right],$$

où U et V sont des variables et où la somme double est étendue à un nombre

déterminé de valeurs 1, 2, ... de l'indice μ et aux valeurs 0, 1, 2, ..., α ou bien 1, 2, ..., α de l'indice ν, suivant que le déterminant du faisceau de formes quadratiques

$$\sum_{i,k} (ua_{i,k} + vb_{i,k}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

à l'aide duquel on a formé les fonctions $\Phi_\mu^{(\nu)}$ et $\Psi_\mu^{(\nu)}$ est nul ou n'est pas nul.

Ceci posé, le théorème établi par Kronecker est le suivant :

« Tout faisceau de formes quadratiques

$$\sum_{i,k} (ua_{i,k} + vb_{i,k}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

peut être transformé par des substitutions linéaires en un faisceau de forme réduite. »

C'est en s'appuyant sur ses précédentes Communications à l'Académie et sur un théorème démontré par Weierstrass dans les *Monatsberichte* de 1868 que Kronecker établit ce théorème.

Kronecker (*L.*). — Réduction algébrique des faisceaux de formes quadratiques (fin). (33-44).

Dans les *Monatsberichte* de mai 1868, Kronecker a montré comment chaque faisceau de formes quadratiques, dont le déterminant est nul, peut être transformé par des substitutions linéaires en un faisceau de la forme

$$(\alpha) \qquad \sum_{h=1}^{h=m} (uX_{h-1} + vX_h) X_{m+h} + \sum_{i,k} (u\alpha_{ik} + v\beta_{ik}) X_{m+i} X_{m+k}$$
$$(i < k;\ i, k = 1, 2, \ldots),$$

où les notations sont celles dont nous avons fait usage dans le compte rendu d'une Communication précédente de Kronecker [1]. Il complète cette Communication en étudiant à nouveau les substitutions linéaires qui permettent de transformer un faisceau quelconque du type (α) en un faisceau du type *reduit*.

On a ainsi un second procédé permettant de transformer un faisceau quadratique quelconque à coefficients connus $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ ($i, k = 1, 2, \ldots, n$), en un faisceau du type réduit; ce second procédé est plus rapide que celui qui a été exposé dans les Communications précédentes, mais son caractère est moins arithmétique. Aussi est-ce le procédé de réduction des Communications précédentes et non le dernier procédé de réduction de la Communication actuelle qui devait servir de point de départ à une réduction *arithmétique* des faisceaux de formes quadratiques que Kronecker se proposait d'étudier.

Définition du rang d'un couple de formes quadratiques. — Si ρ est le

---

(1) Voir *Bulletin*, p. 116; 1895.

rang du système de quantités

$$ua_{i,k}+vb_{i,k} \qquad (i,\, k=1,2,\ldots,n),$$

où u et v sont des variables et $a_{i,k}$, $b_{i,k}$ $(i,\, k=1,2,\ldots,n)$ les coefficients de deux formes quadratiques, d'ordre n, données

$$\sum_{i,k} a_{i,k}x_ix_k, \quad \sum_{i,k} b_{i,k}x_ix_k \qquad (i,\, k=1,2,\ldots,n),$$

on sait qu'il y a $n-\rho$ relations linéaires et homogènes, linéairement indépendantes, entre les n dérivées partielles du faisceau de formes quadratiques

$$\sum_{i,k}(ua_{i,k}+vb_{i,k})x_ix_k \qquad (i,\, k=1,2,\ldots,n).$$

Si $n-r$ de ces $n-\rho$ relations linéaires et homogènes sont de dimension nulle en u et v, Kronecker dit que le couple de formes quadratiques d'ordre n

$$\left[\sum_{i,k} a_{i,k}x_ix_k, \quad \sum_{i,k} b_{i,k}x_ix_k\right]$$

est de *rang* r.

Théorème. — Lorsqu'un couple de deux formes quadratiques d'ordre quelconque est de rang r, on peut, par des substitutions linéaires, transformer chacune des deux formes quadratiques en une forme quadratique d'ordre r.

Après avoir démontré ce théorème fondamental, Kronecker montre comment on peut établir le système des invariants d'un couple de formes quadratiques quelconques données. A cet effet il envisage les $r-\rho$ des $n-\rho$ relations linéaires et homogènes indépendantes entre les n dérivées partielles du faisceau de formes quadratiques

$$\sum_{i,k}(ua_{i,k}+vb_{i,k})x_ix_k \qquad (i,\, k=1,2,\ldots,n),$$

qui ne sont pas de dimension nulle en u et v. Soient

$$\frac{1}{2}(N^{(0)}_{\rho+1}-1), \quad \frac{1}{2}(N^{(0)}_{\rho+2}-1), \quad \ldots, \quad \frac{1}{2}(N^{(0)}_{r}-1)$$

les dimensions en u et v de ces $r-\rho$ relations; on peut toujours supposer que l'on ait

$$1 < N^{(0)}_{\rho+1} \leq N^{(0)}_{\rho+2} \leq \ldots \leq N^{(0)}_{r}.$$

Le système

$$w, \quad N^{(0)}_{\rho+1}, \quad N^{(0)}_{\rho+2}, \quad \ldots, \quad N^{(0)}_{r},$$

où w désigne une indéterminée, est alors un invariant du couple de formes quadratiques d'ordre n envisagé

$$\left[\sum_{i,k} a_{i,k}x_ix_k, \quad \sum_{i,k} b_{i,k}x_ix_k\right].$$

Soit ensuite t un nombre entier quelconque tel que le rang du système de quantités

$$wa_{i,k} - (tw+1)b_{i,k}, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où w désigne toujours une indéterminée, soit égal à ρ comme celui des quantités

$$ua_{i,k} + vb_{i,k} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Envisageons le déterminant

$$|wa_{i,k} - (tw+1)b_{i,k}|, \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et tous ses mineurs d'ordres plus petits ou égaux à ρ. Soit pour $h = 1, 2, \ldots, \rho$

$$\prod_{(\nu)} [w - W^{(\nu)}]^{\lambda_h^{(\nu)}}$$

le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'ordre h. Posons enfin pour $\nu = 1, 2, \ldots, \alpha$

$$\begin{aligned} N_1^{(\nu)} &= \lambda_1^{(\nu)}, \\ N_2^{(\nu)} &= \lambda_2^{(\nu)} - \lambda_1^{(\nu)}, \\ N_3^{(\nu)} &= \lambda_3^{(\nu)} - \lambda_2^{(\nu)}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ N_\rho^{(\nu)} &= \lambda_\rho^{(\nu)} - \lambda_{\rho-1}^{(\nu)}. \end{aligned}$$

Les systèmes

$$\begin{array}{lllll} W^{(1)}; & N_1^{(1)}, & N_2^{(1)}, & \ldots, & N_\rho^{(1)}; \\ W^{(2)}; & N_1^{(2)}, & N_2^{(2)}, & \ldots, & N_\rho^{(2)}; \\ \ldots; & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots; \\ W^{(\lambda)}; & N_1^{(\lambda)}, & N_2^{(\lambda)}, & \ldots, & N_\rho^{(\lambda)} \end{array}$$

sont alors également des invariants du couple de formes quadratiques d'ordre n considéré

$$\left[\sum_{i,k} a_{i,k} x_i x_k, \quad \sum_{i,k} b_{i,k} x_i x_k\right].$$

Pour le démontrer, il suffit de montrer que ces nombres restent les mêmes lorsqu'on transforme par des substitutions linéaires quelconques le faisceau de formes quadratiques

$$\sum_{i,k} (ua_{i,k} + vb_{i,k}) x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

La démonstration est facile. Il est moins aisé de montrer qu'il n'y a pas d'autres invariants du couple de formes quadratiques envisagé que ceux que nous venons d'énumérer. Pour le faire voir, Kronecker montre que ces nombres *déterminent* le faisceau de type réduit dans lequel on peut, comme on l'a vu plus haut, transformer le faisceau

$$\sum_{i,k} (ua_{i,k} + vb_{i,k}) x_i x_k \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

A cet effet, il fait observer d'une part que le faisceau de type réduit est manifestement déterminé par les nombres

$$n_\mu^{(\nu)} \qquad (\mu = 1, 2, \ldots; \ \nu = 1, 2, \ldots),$$

et

$$w^{(0)}, \quad w^{(1)}, \quad \ldots, \quad w^{(\alpha)},$$

définis dans les Communications précédentes, et il démontre d'autre part que l'on a, pour chaque indice μ et pour chaque indice ν,

$$\mathrm{N}_\mu^{(\nu)} = n_\mu^{(\nu)}; \qquad \mathrm{W}^{(\nu)} = w^{(\nu)}.$$

Il n'y a donc pas d'autres invariants que ceux qui précèdent et que l'on a appris à former dans chaque cas particulier.

Les invariants $\mathrm{N}_\mu^{(\nu)}$ jouissent donc des deux propriétés que voici :

I. La somme de tous les invariants $\mathrm{N}_\mu^{(\nu)}$ d'un couple de formes quadratiques est égale au rang de ce couple.

II. Dans le Tableau précédent des invariants d'un couple de formes quadratiques, les invariants $\mathrm{N}_\mu^{(\nu)}$ de chaque ligne horizontale, y compris la ligne

$$\mathrm{N}_{\rho+1}^{(0)}, \quad \mathrm{N}_{\rho+2}^{(0)}, \quad \ldots, \quad \mathrm{N}_r^{(0)},$$

sont rangés par ordre de grandeur croissante.

Envisageons maintenant le faisceau de formes quadratiques d'ordre n

$$f = \sum_{i,k} (ua_{i,k} - vb_{i,k}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n);$$

soient ρ le rang du système des coefficients $ua_{i,k} - vb_{i,k}$ et r le rang du couple de formes quadratiques

$$\left[\sum_{i,k} a_{i,k} x_i x_k, \quad \sum_{i,k} b_{i,k} x_i x_k \right] \qquad (i, k = 1, \ldots, n).$$

On sait que les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

sont liées par $n - \rho$ relations linéaires et homogènes indépendantes dont $r - \rho$ sont de dimension plus grande que zéro en u et v. Soient

$$\sum_{h,k} c_{h,k}^{(\mu)} \frac{\partial f}{\partial x_k} u^h v^{m-h} = 0 \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, r - \rho)$$

ces $r - \rho$ relations : les indices de sommation sont étendus de $h = 0, 1, 2, \ldots$ à $h = m_\lambda$ et de $k = 0, 1, 2, \ldots$ à $k = n$.

Les variables X du faisceau réduit de f sont des fonctions linéaires et homogènes des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ du faisceau f. Kronecker démontre que les coefficients de

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{r-\rho}$$

de ces fonctions linéaires et homogènes sont immédiatement donnés par les cœfficients

$$c^{(\mu)}_{h,k}, \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, m_\mu; \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad \mu = 1, 2, \ldots, r - \rho),$$

des $r - \rho$ relations linéaires précédentes.

Ce théorème est fondamental. Il permet de se rendre compte, *a priori*, de la possibilité d'effectuer, d'une façon générale, la transformation de tous les faisceaux de formes quadratiques à déterminants nuls, en faisceaux réduits, transformation qui est l'objet principal des Communications actuelles de Kronecker.

Kronecker démontre aussi que les fonctions linéaires

$$\sum_{i,k} b_{i,k} c^{(\mu)}_{h,k} x_i \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

que l'on obtient en donnant à l'indice h les valeurs $h = 1, 2, \ldots, m_1$ pour $\mu = 1$; $h = 1, 2, \ldots, m_2$ pour $\mu = 2$; ...; $h = 1, 2, \ldots, m_{r-\rho}$ pour $\mu = r - \rho$, sont des covariants du faisceau quadratique

$$\sum_{i,k} (u a_{i,k} + v b_{i,k}) x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ces covariants sont au nombre de

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_{r-\rho}.$$

Kötter (*F.*). — Sur le mouvement d'un solide rigide dans un fluide. (35-44).

Kirchhoff a établi (¹) les équations différentielles du mouvement d'un solide rigide dans un fluide incompressible indéfini, en repos à l'infini. Dans le cas où aucune force extérieure n'agit sur le solide, ces équations sont, comme on sait,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p},$$

où u, v, w désignent les composantes, suivant les axes fixes dans le corps, de

(¹) *Journal de Crelle*, t. 71, p. 237.

la vitesse de l'origine de ces axes; p, q, r les composantes suivant ces mêmes axes de la vitesse angulaire de rotation du solide, et T la force vive du solide : c'est une fonction homogène du second degré en u, v, w, p, q, r.

Kirchhoff a aussi montré que les expressions, en fonction du temps t, des coordonnées de l'origine des axes fixes dans le corps, et celles des neuf cosinus des angles que font les axes fixes dans le corps avec les axes fixes dans l'espace, sont données par des quadratures dès que l'on a intégré les six équations différentielles précédentes qui ne contiennent que u, v, w, p, q, r, de sorte que l'on peut dire que l'étude du mouvement du solide rigide dans le fluide incompressible indéfini se ramène à l'intégration de ces six équations différentielles simultanées.

On peut se représenter l'état actuel du mouvement comme provenant d'une percussion appliquée à l'origine des axes fixes dans le corps et ayant pour composantes suivant ces axes $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$, jointe à un couple de percussions dont l'axe a pour composantes, toujours suivant les axes fixes dans le corps, $\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial T}{\partial q}$, $\frac{\partial T}{\partial r}$. Cette impulsion et ce couple d'impulsion se réduisent à une impulsion et à un couple dont l'axe a même ligne d'action que cette impulsion; cette ligne d'action est l'axe central du système des impulsions à l'instant actuel. Cet axe central, l'intensité I de l'impulsion et la grandeur I_1 de l'axe du couple réduits sur cet axe central, restent les mêmes quel que soit l'instant considéré (¹), et l'on a

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = I^2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = I.I_1.$$

On a aussi, en appliquant le théorème des forces vives,

$$2T = L,$$

où L est une constante.

Ces trois relations entre u, v, w, p, q, r sont trois des six intégrales des équations différentielles du mouvement. Il s'agit d'en trouver trois autres. Or Clebsch a démontré (²) qu'il suffit de trouver une seule quatrième intégrale ne contenant pas t explicitement pour que l'on puisse déterminer le multiplicateur d'une équation différentielle, qui, intégrée, donne une cinquième intégrale ne contenant pas non plus t explicitement, et qu'ensuite t est donnée par une quadrature. Tout revient donc finalement à trouver une quatrième intégrale, indépendante de t, des six équations différentielles de Kirchhoff que nous avons rappelées en commençant.

En se bornant au cas particulier où la fonction homogène du second degré T est de la forme

$$2T = A_1 u^2 + A_2 v^2 + A_3 w^2 + B_1 p^2 + B_2 q^2 + B_3 r^2,$$

(¹) *Sitzungsberichte der Berliner Akademie*, 1888, p. 1095.
(²) *Mathematische Annalen*, t. III, p. 238.

A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3 étant des constantes liées par la relation

$$B_1\left(\frac{1}{A_2}-\frac{1}{A_3}\right)+B_2\left(\frac{1}{A_3}-\frac{1}{A_1}\right)+B_3\left(\frac{1}{A_1}+\frac{1}{A_2}\right)=0,$$

on a facilement pour la quatrième intégrale cherchée, comme l'a montré Clebsch,

$$\frac{1}{A_2A_3}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{A_3A_1}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2$$
$$-\frac{1}{A_1B_1}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2-\frac{1}{A_2B_2}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2-\frac{1}{A_3B_3}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2=L_1,$$

où L_1 est une constante. La détermination de la cinquième intégrale se ramène ensuite à une quadrature.

M. Henri Weber (¹) a donné la solution analytique complète du problème dans le cas plus particulier encore où $I_1=0$. En prenant l'un des axes fixes dans l'espace suivant la ligne d'action de la percussion unique à laquelle se réduit ici le système des percussions considérées, il a obtenu les expressions de tous les paramètres qui déterminent la position du solide dans l'espace, sous la forme de quotients de fonctions thêta de deux variables dont les arguments sont linéaires en t. La fonction thêta du dénominateur des expressions qui représentent les trois composantes de la rotation instantanée suivant les axes fixes dans le corps, les trois composantes de cette rotation suivant les axes fixes dans l'espace et les neuf cosinus des angles que font ces deux systèmes d'axes est la même.

M. Kötter reprend le même problème lorsque la constante I_1 n'est pas nulle et donne, dans ce cas particulier de Clebsch, plus général que celui de Weber, les expressions en fonction de t de

$$\frac{\partial T}{\partial u},\quad \frac{\partial T}{\partial v},\quad \frac{\partial T}{\partial w},\quad \frac{\partial T}{\partial p},\quad \frac{\partial T}{\partial q},\quad \frac{\partial T}{\partial r},$$

ainsi que celles des coordonnées de l'origine des axes fixes dans le corps, des composantes de la vitesse de ce point, des composantes suivant les axes fixes dans le corps et suivant les axes fixes dans l'espace de la rotation instantanée, et des neuf cosinus des angles de ces deux systèmes d'axes.

Ces expressions sont encore formées à l'aide de fonctions thêta de deux variables dont les paramètres dépendent linéairement de t, mais leur forme est plus compliquée que celle des quotients de M. Weber.

Il parvient à ce résultat de deux manières différentes. La première est analogue à la marche qu'il a suivie dans son Mémoire (²), sur l'application des fonctions abéliennes à l'étude de certains cas d'équilibre des fils flexibles et inextensibles; on est amené, à la suite de calculs assez longs, aux intégrales abéliennes particulières de rang 3 qu'a étudiées Sophie Kowalevski; les quantités

$$\frac{\partial T}{\partial u},\quad \frac{\partial T}{\partial v},\quad \frac{\partial T}{\partial w},\quad \frac{\partial T}{\partial p},\quad \frac{\partial T}{\partial q},\quad \frac{\partial T}{\partial r}$$

(¹) *Mathematische Annalen*, t. XIV, p. 173.
(²) *Journal de Crelle*, t. 103, p. 44-74.

peuvent être représentées à l'aide de fonctions thêta de trois arguments, dont l'un est constant tandis que les deux autres sont fonctions linéaires de t; on observe enfin que ces fonctions thêta peuvent être elles-mêmes exprimées par des fonctions thêta de l'unique argument constant et par des fonctions thêta des deux arguments fonctions linéaires de t.

L'existence de quatre systèmes

$$(u_{11},\ u_{21},\ u_{31}),\qquad (u_{13},\ u_{23},\ u_{33}),$$
$$(u_{12},\ u_{22},\ u_{32}),\qquad (u_{14},\ u_{24},\ u_{34}),$$

de fonctions linéaires des trois couples de quantités

$$\frac{\partial T}{\partial p},\ \frac{\partial T}{\partial u};\qquad \frac{\partial T}{\partial q},\ \frac{\partial T}{\partial v};\qquad \frac{\partial T}{\partial r},\ \frac{\partial T}{\partial w};$$

dont les éléments u_{ik} sont liés par les relations

$$u_{11}^2+u_{21}^2+u_{31}^2=0,\qquad u_{13}^2+u_{23}^2+u_{33}^2=0,$$
$$u_{12}^2+u_{22}^2+u_{32}^2=0,\qquad u_{14}^2+u_{24}^2+u_{34}^2=0,$$

permet de faire, sur les quantités $\frac{\partial T}{\partial u}, \frac{\partial T}{\partial v}, \frac{\partial T}{\partial w}, \frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial r}$, une substitution linéaire telle que les simplifications qui se sont présentées à M. Weber dans le cas particulier où $I_1 = 0$, se présentent également dans le cas général où I_1 n'est pas nul. M. Kötter parvient ainsi par une seconde méthode moins compliquée que la première aux mêmes résultats.

M. Kötter ne développe pas les calculs et se contente de donner les expressions finales très élégantes auxquelles il est parvenu.

Sckottky (*F.*). — Sur la résolution analytique du problème de la rotation d'un solide rigide dans l'espace à quatre dimensions. (227-232).

Au lieu d'étudier le mouvement d'un solide rigide dans l'espace, on peut étudier le mouvement d'un trièdre trirectangle fixe dans l'espace OXYZ par rapport au trièdre $Cxyz$ formé par les trois axes principaux d'inertie du solide rigide relatifs au centre de masses C de ce solide. Si l'on suppose qu'aucune force extérieure n'agit sur le solide et que le centre de masses C a une vitesse initiale nulle; si l'on désigne par x_1, x_2, x_3 les coordonnées, à un instant quelconque t, du point O par rapport au trièdre $Cxyz$, et par

$$p = p_{23} = -p_{32},\quad q = p_{31} = -p_{13},\quad r = p_{12} = -p_{21}$$

les composantes à l'instant t de la vitesse angulaire instantanée mesurées suivant les axes Cx, Cy, Cz; si enfin A_1, A_2, A_3 représentent les moments d'inertie du solide rigide par rapport aux plans principaux des Cyz, Czx, Cxy, les équations différentielles du mouvement du trièdre OXYZ fixe dans

l'espace par rapport au trièdre $Cxyz$ fixe dans le corps sont

$$(A_1 + A_2)\frac{dp_{12}}{dt} = (A_1 - A_2)p_{13}p_{23},$$

$$(A_2 + A_3)\frac{dp_{23}}{dt} = (A_2 - A_3)p_{21}p_{31},$$

$$(A_3 + A_1)\frac{dp_{31}}{dt} = (A_3 - A_1)p_{32}p_{12}.$$

$$\frac{dx_1}{dt} = p_{12}x_2 + p_{13}x_3,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = p_{23}x_3 + p_{21}x_1,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = p_{31}x_1 + p_{32}x_2.$$

C'est sous cette forme qu'il est commode de généraliser le problème, dans l'espace à n dimensions.

Prenons pour postulatum du mouvement d'un système de k points matériels dans l'espace à n dimensions l'équation suivante qui est une généralisation évidente de celle de d'Alembert

$$\sum_{i=1}^{i=k}\left\{\left[m^{(i)}\frac{d^2x_1^{(i)}}{dt^2} - X_1^{(i)}\right]\delta x_1^{(i)} + \left[m^{(i)}\frac{d^2x_2^{(i)}}{dt^2} - X_2^{(i)}\right]\delta x_2^{(i)} + \ldots + \left[m^{(i)}\frac{d^2x_n^{(i)}}{dt^2} - X_n^{(i)}\right]\delta x_n^{(i)}\right\} = 0,$$

équation dans laquelle $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$ sont, pour chaque indice $i = 1, 2, \ldots, k$, les n coordonnées, par rapport au système d'axes $OX_1X_2\ldots X_n$, fixe dans l'espace, du point matériel de masse $m^{(i)}$ auquel est appliquée la force active résultante dont les composantes sont $X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \ldots, X_n^{(i)}$ suivant les axes OX_1, OX_2, ..., OX_n, tandis que $\delta x_1^{(i)}, \delta x_2^{(i)}, \ldots, \delta x_n^{(i)}$ sont les composantes suivant ces mêmes axes d'un déplacement virtuel quelconque du point $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$, compatible avec les liaisons du système des k points matériels.

Appelons *système rigide* de k points matériels un système tel que l'on ait pour chaque indice $h = 1, 2, \ldots, k$ et $i = 1, 2, \ldots, k$ les équations de liaison

$$[x_1^{(h)} - x_1^{(i)}]^2 + [x_2^{(h)} - x_2^{(i)}]^2 + \ldots + [x_n^{(h)} - x_n^{(i)}]^2 = \text{const}.$$

Envisageons, dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures, le mouvement du système d'axes $OX_1X_2\ldots X_n$ fixes dans l'espace à n dimensions, par rapport au système de n plans principaux passant par le centre de masses C du système de n plans principaux passant par le centre de masse C du solide rigide à n dimensions et définis dans ce corps rigide par les équations de condition

$$m^{(1)}x_h^{(1)}x_i^{(1)} + m^{(2)}x_h^{(2)}x_i^{(2)} + \ldots + m^{(k)}x_h^{(k)}x_i^{(k)} = 0$$
$$(h \gtrless i;\quad h = 1, 2, \ldots, k;\quad i = 1, 2, \ldots, k),$$

où $x_i^{(1)}, x_i^{(2)}, \ldots, x_i^{(k)}$ sont les coordonnées du point de masse $m^{(i)}$ par rap-

port à ces n plans principaux. Posons aussi

$$A_\alpha = m^{(1)}[x_\alpha^{(1)}]^2 + m^{(2)}[x_\alpha^{(2)}]^2 + \ldots + m^{(k)}[x_\alpha^{(k)}]^2$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, n);$$

désignons enfin par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées de l'origine O du système $OX_1X_2\ldots X_n$ fixe dans l'espace, par rapport aux n plans principaux et par

$$p_{\alpha\beta} = -p_{\beta\alpha}, \quad p_{\alpha\alpha} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$$

les quantités qui déterminent la vitesse angulaire instantanée de rotation du solide rigide à n dimensions autour de son centre de masses C.

Les équations différentielles du mouvement sont alors

$$(A_\alpha + A_\beta)\frac{dp_{\alpha\beta}}{dt} = (A_\alpha - A_\beta)[p_{\alpha 1}p_{\beta 1} + p_{\alpha 2}p_{\beta 2} + \ldots + p_{\alpha n}p_{\beta n}],$$
$$\frac{dx_\alpha}{dt} = p_{\alpha 1}x_1 + p_{\alpha 2}x_2 + \ldots + p_{\alpha n}x_n,$$
$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n).$$

Pour $n = 3$, ces $\frac{n(n+1)}{2}$ équations différentielles sont identiques aux six équations que nous avons écrites plus haut.

Pour $n > 4$, il semble extrêmement difficile d'exprimer les quantités x_α, $p_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n)$ en fonction de t.

Pour $n = 4$, on rencontre des difficultés analytiques, en partie de même nature que celles que M. Kötter a surmontées dans son étude du mouvement d'un solide rigide quelconque dans un fluide indéfini incompressible, en repos à l'infini, dans le cas où il n'y a pas de forces extérieures. Mais on peut aussi étudier les équations différentielles précédentes en leur faisant subir avec M. Schottky les transformations suivantes :

Posons, pour $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ et pour $\beta = 1, 2, \ldots, n$,

$$(A_\alpha + A_\beta)p_{\alpha,\beta} = q_{\alpha,\beta};$$

si l'on désigne par k, l, m les fonctions symétriques de A_1, A_2, A_3, A_4,

$$k = \frac{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{P},$$
$$l = \frac{A_1A_2A_3 + A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4}{P},$$
$$m = \frac{l^2}{k} + \frac{1}{kP},$$

où

$$P = (A_1 + A_2)(A_1 + A_3)(A_1 + A_4)(A_2 + A_3)(A_2 + A_4)(A_3 + A_4),$$

et si l'on pose

$$k\,dt = du, \quad l\,dt = dv, \quad m\,dt = dw,$$

les dix équations différentielles du mouvement se déduisent en permutant les indices 1, 2, 3, 4 dans les deux premières de ces équations que l'on peut mettre

sous la forme

$$(1)\qquad dq_{12} = (A_1^2 - A_2^2)[(A_3^2\,du + dv)q_{13}q_{23} + (A_4^2\,du + dv)q_{14}q_{24}];$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} dx_1 = {} & [A_1^2A_2^2\,du + (A_1^2 + A_2^2)\,dv + dw]q_{12}x_2 \\ & + [A_1^2A_3^2\,du + (A_1^2 + A_3^2)\,dv + dw]q_{13}x_3 \\ & + [A_1^2A_4^2\,du + (A_1^2 + A_4^2)\,dv + dw]q_{14}x_4. \end{aligned}\right.$$

Ces équations différentielles offrent ceci de remarquable, que si l'on envisage u, v, w comme des variables indépendantes, elles représentent un système d'équations aux différentielles totales. On peut chercher à définir les dix paramètres $q_{\alpha\beta}$, x_α (α, $\beta = 1, 2, 3, 4$) en fonction de ces variables indépendantes de manière que ces équations soient vérifiées.

Les dix équations différentielles précédentes se partagent en six équations du type (1) et quatre équations du type (2).

Les six équations du type (1), où la variable w ne figure pas, admettent les cinq intégrales

$$q_{23}q_{14} + q_{31}q_{24} + q_{12}q_{34} = C_0,$$

$$\frac{q_{12}^2}{a_1 - a_2} + \frac{q_{13}^2}{a_1 - a_3} + \frac{q_{14}^2}{a_1 - a_4} = C_1,$$

$$\frac{q_{21}^2}{a_2 - a_1} + \frac{q_{23}^2}{a_2 - a_3} + \frac{q_{24}^2}{a_2 - a_4} = C_2,$$

$$\frac{q_{31}^2}{a_3 - a_1} + \frac{q_{32}^2}{a_3 - a_2} + \frac{q_{34}^2}{a_3 - a_4} = C_3,$$

$$\frac{q_{41}^2}{a_4 - a_1} + \frac{q_{42}^2}{a_4 - a_2} + \frac{q_{43}^2}{a_4 - a_3} = C_4,$$

dont quatre sont indépendantes. Les six paramètres $q_{\alpha,\beta}$ sont donc liés par quatre relations algébriques; ces quatre relations définissent une variété algébrique à deux dimensions; u et v sont des fonctions intégrales de cette variété algébrique, dont les différentielles totales sont définies par les six équations du type (1).

Si, dans les quatre équations différentielles du type (2), on envisage d'abord u et v comme des constantes, les $q_{\alpha\beta}$ seront aussi des constantes et w sera la seule variable indépendante. Ces quatre équations (2) seront alors linéaires à coefficients constants; leurs intégrales sont

$$x_\alpha = \xi_\alpha e^{ikw} + \xi'_\alpha e^{ik'w} + \xi''_\alpha e^{ik''w} + \xi'''_\alpha e^{ik'''w},$$
$$(\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

où k, k', k'', k''' sont les quatre racines de l'équation

$$X^4 - (q_{12}^2 + q_{13}^2 + q_{14}^2 + q_{23}^2 + q_{24}^2 + q_{34}^2)X^2 + (q_{23}q_{14} + q_{31}q_{24} + q_{12}q_{34})^2.$$

Ces racines sont réelles et deux à deux égales et de signes contraires. Elles sont, comme l'a démontré M. Frahm ([1]), *indépendantes des valeurs particulières données à u et v*; elles ne dépendent donc ni de u, ni de v, ni de w.

Les rapports de ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 sont déterminés par les quatre équations linéaires

([1]) *Mathematische Annalen*, t. VIII.

et homogènes

$$ik\xi_1 = q_{12}\xi_2 + q_{13}\xi_3 + q_{14}\xi_4,$$
$$ik\xi_2 = q_{21}\xi_1 + q_{23}\xi_3 + q_{24}\xi_4,$$
$$ik\xi_3 = q_{31}\xi_1 + q_{32}\xi_2 + q_{34}\xi_4,$$
$$ik\xi_4 = q_{41}\xi_1 + q_{42}\xi_2 + q_{43}\xi_3;$$

les systèmes d'équations linéaires et homogènes qui déterminent les rapports des autres coefficients $\xi'_1, \xi'_2, \xi'_3, \xi'_4$; $\xi''_1, \xi''_2, \xi''_3, \xi''_4$; $\xi'''_1, \xi'''_2, \xi'''_3, \xi'''_4$ se déduisent des équations précédentes en y changeant k en k', k'', k'''; la détermination complète des intégrales particulières correspondant aux quatre racines k, k', k'', k''' n'exige plus que des quadratures; si, dans ces intégrales particulières, on sépare la partie réelle et la partie imaginaire, les composantes correspondent à quatre directions orthogonales, de sorte que le passage du mouvement apparent au mouvement réel est facile. Il faut encore poser finalement

$$u = kt, \qquad v = lt, \qquad w = mt.$$

Kronecker (*L.*). — La relation de Legendre. (323-332).

Soient v, w deux quantités imaginaires quelconques dont le rapport n'est pas réel; $\varepsilon = +1$ ou $\varepsilon = -1$ suivant que la partie réelle du rapport $\frac{w}{vi}$ est positive ou négative;

$$\mathfrak{S}\left(\zeta, \frac{\varepsilon w}{v}\right) = \sum_{(\nu)} e^{\frac{\pi i}{4}\left[\nu^2 \frac{\varepsilon w}{v} + 4\nu\zeta - 2\nu\right]} \qquad (\nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots);$$

K et E les intégrales complètes de première et de deuxième espèce de Legendre, correspondant à un module quelconque k; K′ et E′ les intégrales complètes de première et de deuxième espèce correspondant au module complémentaire k'.

Kronecker établit la relation

$$(\mathrm{I}) \qquad 12(K'E + KE' - KK') = \frac{\varepsilon wi}{v}\,\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{\varepsilon vi}{w}\,\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)},$$

en s'appuyant sur la représentation des intégrales complètes de première et de seconde espèce à l'aide de la fonction $\mathfrak{S}$, qu'il déduit aisément de quelques relations fondamentales empruntées aux *Fundamenta*.

Legendre a démontré que le premier membre de cette relation est égal à 6π: son second membre est donc aussi égal à 6π; il en résulte aisément, si l'on tient compte de la formule de transformation

$$\mathfrak{S}\left(\zeta, \frac{\varepsilon w}{v} + 1\right) = e^{\frac{\pi i}{4}}\,\mathfrak{S}\left(\zeta, \frac{\varepsilon w}{v}\right),$$

que l'expression

$$(\mathrm{II}) \qquad \frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(\sigma v + \tau w)} + \frac{1}{3v^2}\,\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

où σ et τ sont deux variables *réelles* quelconques, ne change pas lorsqu'on y remplace σ, τ, v, w respectivement par $\alpha\sigma+\beta\tau$, $\alpha'\sigma+\beta'\tau$, $\beta' v-\alpha' w$, $-\beta v+\alpha w$, pourvu que les nombres entiers α, β, α', β' soient choisis parmi ceux qui vérifient la relation $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$. Mais alors l'expression

$$\text{(III)} \qquad 2\varepsilon\tau(\sigma+\tau w)\pi i+\frac{1}{3}(\sigma+\tau w)^2\frac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)}$$

ne change pas non plus lorsqu'on y remplace σ, τ, w par $\alpha\sigma+\beta\tau$, $\alpha'\sigma+\beta'\tau$, $\dfrac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}$.

Inversement, si l'on écrit que l'expression (III) est égale à celle que l'on obtient en y remplaçant σ, τ, w par $\alpha\sigma+\beta\sigma$, $\alpha'\sigma+\beta'\tau$, $\dfrac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}$, on obtient la formule générale de transformation linéaire de la fonction $\dfrac{\vartheta'''(0,\varepsilon w)}{\vartheta'(0,\varepsilon w)}$, d'où l'on déduit comme cas particulier, en posant $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\alpha'=1$, $\beta'=0$, que le second membre de la relation (I) est égal à 6π, et par suite la relation de Legendre

$$\mathrm{K'E}+\mathrm{KE'}-\mathrm{KK'}=\frac{\pi}{2}.$$

On peut d'ailleurs montrer que l'expression (III) ne change pas quand on y remplace σ, τ, w par $\alpha\sigma+\beta\tau$, $\alpha'\sigma+\beta'\tau$, $\dfrac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}$, en observant que l'expression (III) augmentée de l'unité est égale à l'ensemble des termes de dimensions 0, 1, 2, dans le développement, suivant les puissances croissantes de σ et de τ, de l'expression

$$\varepsilon u \lim_{u_0=0}\left[-\frac{1}{u_0}+\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, 1, \varepsilon w)\right],$$

où l'on a posé pour abréger

$$u=\sigma v+\tau w,$$

et où le symbole $\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)$ représente la fonction Atropos de Kronecker

$$\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, v, \varepsilon w)=\frac{1}{v}e^{\frac{2\tau u_0\pi i}{v}}\frac{\vartheta'\left(0,\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{\varepsilon u+u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{\varepsilon u}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)\vartheta\left(\frac{u_0}{v},\frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

dont l'invariance, pour les substitutions linéaires considérées, a été démontrée de diverses manières dans des Communications précédentes sur les fonctions elliptiques.

D'autre part ([1]), l'ensemble des termes de dimensions 0, 1, 2, dans le développement, suivant les puissances croissantes de σ et τ, de l'expression

$$\varepsilon u \lim_{u_0=0}\left[-\frac{1}{u_0}+\overline{\mathrm{Atr}}(\varepsilon u, u_0, 1, \varepsilon w)\right],$$

([1]) *Sitzungberichte*, mars 1890.

est égal à l'ensemble des termes de dimensions o, 1, 2, dans le développement, suivant les puissances croissantes de σ et de τ, de l'expression

$$\text{(IV)} \qquad \lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{\sigma+\tau w}{m+nw}e^{(n\sigma-m\tau)2\pi i},$$

où

$$m'=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M, \qquad m=\alpha m'+\beta n',$$
$$n'=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N, \qquad n=\alpha' m'+\beta' n',$$

α, β, α', β' étant des entiers arbitrairement fixés parmi ceux qui vérifient la condition $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$.

Donc la relation de Legendre

$$K'E+KE'-KK'=\frac{\pi}{2}$$

est entièrement équivalente avec le fait de l'*invariance*, suivant le système de modules $(\sigma^3, \sigma^2\tau, \sigma\tau^2, \tau^3)$, de l'expression (IV) lorsqu'on y remplace σ, τ, w par $\alpha\sigma+\beta\tau$, $\alpha'\sigma+\beta'\tau$, $\frac{\alpha w-\beta}{-\alpha' w+\beta'}$, où α, α', β, β' sont des entiers quelconques vérifiant l'équation de condition $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$.

Cette invariance, modulis $(\sigma^3, \sigma^2\tau, \sigma\tau^2, \tau^3)$, peut d'ailleurs être établie directement.

Kronecker (*L.*). — La relation de Legendre (*suite*). (343-358).

Dans les *Fundamenta,* Jacobi a déduit de la relation de Legendre, la formule de transformation linéaire de la fonction impaire ϑ dans le cas particulier où $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\alpha'=1$, $\beta'=0$. Dans aucun de ses cours, il n'a suivi la marche inverse : c'est Schellbach qui a, le premier, déduit la relation de Legendre de la formule de transformation linéaire de la fonction impaire $\vartheta_1(v\,|\,\tau)$.

Kronecker montre que si l'on suppose seulement que l'expression

$$K'E+KE'-KK'$$

est indépendante de k, on peut en déduire la formule de transformation linéaire

$$\vartheta\left(\frac{u}{w}, -\frac{2v}{w}\right)=-\varepsilon i\left|\sqrt{-\frac{\varepsilon w i}{v}}\right|e^{\frac{\varepsilon u^2}{vw}\pi i}\,\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right),$$

et qu'inversement on déduit de cette formule la relation

$$K'E+KE'-KK'=\frac{\pi}{2}.$$

Puis, après avoir présenté sous une forme un peu différente de celle de Jacobi ceux des développements de l'article 56 des *Fundamenta* dont il compte faire usage plus loin, il passe à un autre objet et étudie le lien qui rattache la relation de Legendre aux recherches fondamentales d'Eisenstein contenues dans le Tome 35 du *Journal de Crelle.*

Eisenstein a montré que la différence des deux expressions

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{(m,n)}\log\left[1-\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}\right],$$

$$-\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{(m,n)}\left\{\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}+\frac{1}{2}\left[\frac{(\sigma-\sigma_0)v+(\tau-\tau_0)w}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w}\right]^2\right\}$$

$$(-M \leqq m \leqq M, \quad -N \leqq n \leqq N)$$

ne change pas lorsqu'on y remplace les quantités réelles quelconques σ_0, τ_0, σ, τ et les quantités imaginaires v, w, respectivement par

$$\begin{array}{ll} \alpha\sigma_0+\beta\sigma_0+\gamma, & \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0+\gamma', \\ \alpha\sigma+\beta\tau+\gamma, & \alpha'\sigma+\beta'\tau+\gamma', \\ \beta'v-\alpha'w, & -\beta v+\alpha w, \end{array}$$

quels que soient les entiers γ, γ' et quels que soient les entiers α, β, α', β' liés par la relation $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$.

Kronecker reprend cette démonstration et la présente sous une forme plus simple. Soient, pour abréger,

$$u=\sigma v+\tau w, \qquad u_0=\sigma_0 v+\tau_0 w;$$

en désignant par

$$\log \mathrm{En}(u_0, u, v, w)$$

la différence des deux limites précédentes, il fait voir que l'on a

$$\log \mathrm{En}(u_0, u, v, w)=\log\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}-\frac{u_0-u}{v}\,\frac{\vartheta'\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{u_0-u}{v}\right)^2\left[\frac{\vartheta''\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}-\frac{\vartheta'^2\left(\frac{u}{v}\right)}{\vartheta^2\left(\frac{u}{v}\right)}\right].$$

Les deux derniers termes du second membre de cette égalité, changés de signe, sont précisément les deux premiers termes du développement suivant les puissances croissantes de $\frac{u-u_0}{v}$ de la fonction $\log\frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}\right)}$, de sorte que l'on peut dire que la fonction $\log \mathrm{En}(u_0, u, v, w)$ est représentée par l'ensemble des termes du développement suivant les puissances croissantes de $\frac{u_0-u}{v}$ qui commence à la troisième puissance de $\frac{u_0-v}{v}$.

Le symbole En, formé par la première et la dernière lettre du nom d'Eisenstein, a été choisi par Kronecker pour mettre en évidence que c'est ce géomètre qui a le premier étudié les invariants analytiques de la substitution linéaire générale précédente.

En cherchant un invariant analytique de cette même substitution linéaire

dans le cas plus restreint où les entiers γ et γ' sont tous deux nuls, Kronecker est amené à envisager la fonction

$$(\mathrm{V}) \qquad \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{Z},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$Z = \frac{1}{2}(u_0^2 - u^2) \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{(mv + nw)^2},$$

$$(m = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm M; \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N).$$

Cette fonction (V), dont le logarithme peut être représenté par l'expression

$$\log \frac{\vartheta\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} + \frac{u^2 - u_0^2}{6v^2} \frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

ne change effectivement pas lorsqu'on y remplace

$$\sigma_0, \quad \tau_0, \quad \sigma, \quad \tau, \quad v, \quad w$$

par

$$\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \quad \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, \quad \alpha\sigma + \beta\tau, \quad \alpha'\sigma + \beta'\tau, \quad \beta'v - \alpha'w, \quad -\beta v + \alpha w,$$

quels que soient les entiers α, β, α', β' liés par la relation $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$.

Il est enfin très intéressant d'observer que cette même fonction (V) peut aussi être représentée par le quotient de deux invariants dans un sens plus restreint encore. Si l'on désigne par

$$\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{u}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$$

la fonction définie par l'égalité

$$\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{u}, \frac{\varepsilon w}{v}\right) = \lim_{u=0} \left[u \, \mathrm{En}(u_0, u, v, w) e^{\frac{(u_0 - u)(3u - u_0)}{2u^2}} \right],$$

on voit, en effet, que cette fonction $\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{u}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)$ ne change pas, lorsque, sans changer σ_0, τ_0, σ, τ, on remplace v, w par $\beta'v - \alpha'w$, $-\beta v + \alpha w$, quels que soient les entiers α, β, α', β' vérifiant la condition $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$; et l'on voit, d'autre part, que l'expression (V) peut être représentée par le quotient

$$\frac{\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u_0}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\overline{\mathrm{En}}\left(\frac{u}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

Dans sa dissertation inaugurale, M. Hurwitz a déjà montré comment on peut déduire aisément la relation de Legendre des développements analytiques donnés par Eisenstein. Kronecker parvient au même résultat en suivant une voie différente et montre comment, en se plaçant au point de vue d'Eisenstein,

on peut mettre en évidence l'équivalence de la formule de transformation linéaire de la fonction impaire $\mathfrak{S}$ pour $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$ avec la relation de Legendre, équivalence qui a déjà été établie plus haut en se plaçant à un point de vue différent.

Il obtient enfin, comme conséquence de relations établies dans le courant des recherches précédentes, les deux égalités

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{(2m - n + ni\sqrt{3})^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{(m + ni)^2} = \pi,$$

$$(-N \leqq n \leqq N, \quad -M \leqq m \leqq M).$$

Gerhardt (*K.-J.*). — Recherches de Leibniz sur les déterminants. (407-423).

Leibniz n'a rien publié sur les déterminants; mais, dans une lettre adressée à Tschirnhaus et datée de la fin du mois de mai 1678, on trouve un passage qui se rapporte peut-être à ses nombreux travaux sur cette partie de l'Algèbre. Cette lettre, écrite en réponse à une prétendue résolution algébrique des équations de degré quelconque que Tschirnhaus lui avait envoyée de Rome six semaines auparavant, nous donne de précieux renseignements sur l'ensemble des recherches algébriques que Leibniz avait entreprises pendant son séjour à Paris.

Il existe plusieurs brouillons de cette lettre; M. Gerhardt en reproduit un, encore inédit, en le complétant à l'aide d'un second brouillon.

M. Gerhardt publie ensuite trois Notes de Leibniz concernant les déterminants. Il reproduit aussi, pour servir de terme de comparaison, une lettre de Leibniz au marquis de l'Hospital, datée de Hanovre, le 28 avril 1693. Dans cette lettre, Leibniz insiste beaucoup sur l'avantage qu'offre en Algèbre la notation des systèmes d'indices par lesquels il propose de désigner les coefficients des systèmes d'équations au lieu d'employer des lettres a, b, c, ... comme on le faisait jusqu'alors.

Kronecker (*L.*). — La relation de Legendre (*suite*). (447-465).

La série à double entrée $\mathrm{Scr}(u_0, u, v, w)$

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w},$$

où la somme est étendue à tous les indices m et n tels que, α, β, α', β' désignant des entiers quelconques liés par la relation $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$, on ait

$$|\alpha m + \beta n| \leqq M, \qquad |\alpha' m + \beta' n| \leqq N,$$

et où l'on a posé pour abréger

$$u = v\sigma + w\tau, \qquad u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0.$$

comprend comme cas particulier la série à double entrée d'Eisenstein

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{1}{u+mv+nw},$$

qui représente la dérivée logarithmique de la fonction impaire $\mathfrak{S}_1$.

C'est en étudiant d'une façon générale la série $\operatorname{Ser}(u_0, u, v, w)$ qu'il avait déjà envisagée dans des Communications précédentes sur les fonctions elliptiques, que Kronecker se proposait de mettre en pleine lumière la nature et l'importance de la série à double entrée d'Eisenstein; la mort ne lui a pas permis de publier tous les résultats auxquels il était sans doute déjà parvenu. Dans sa Communication actuelle il n'envisage que ceux de ces résultats qui se rapportent à la relation de Legendre.

Lorsque la différence de deux fonctions

$$\mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad \mathfrak{G}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$$

de n variables $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ne change pas quand on y remplace le système des n variables par l'un quelconque des systèmes

$$(z'_1, z'_2, \ldots, z'_n), \quad (z''_1, z''_2, \ldots, z''_n), \quad \ldots,$$

Kronecker dit que les deux fonctions $\mathfrak{F}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ et $\mathfrak{G}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ sont *isotropes* pour la *classe* formée par les systèmes *équivalents*

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n), \quad (z'_1, z'_2, \ldots, z'_n), \quad (z''_1, z''_2, \ldots, z''_n), \quad \ldots.$$

Soient σ_0, τ_0, σ, τ des variables réelles quelconques, v, w des variables imaginaires dont le rapport ne soit pas réel; envisageons la classe formée par les systèmes équivalents que l'on obtient en remplaçant dans le système

$$(\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0,\ \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0,\ \alpha\sigma + \beta\tau,\ \alpha'\sigma + \beta'\tau,\ \beta'v - \alpha'w,\ -\beta v + \alpha w),$$

α, β, α', β' successivement par tous les nombres entiers qui vérifient la relation $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$. Les deux fonctions

$$\frac{6\varepsilon\tau_0\pi i}{u_0 v} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{v^2}\,\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

sont isotropes pour cette classe de systèmes équivalents. Or on peut trouver immédiatement la quantité dont varie la première de ces deux fonctions isotropes quand on passe d'un système $(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w)$ à un quelconque des systèmes équivalents de la classe considérée; on a, en effet,

$$\frac{6\varepsilon(\alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0)\pi i}{(\beta'v - \alpha'w)(\alpha\sigma_0 + \beta\tau_0)} - \frac{6\varepsilon\tau_0\pi i}{u_0 v} = \frac{6\varepsilon\alpha'\pi i}{v(\beta'v - \alpha'w)};$$

la quantité dont varie la seconde fonction isotrope $\left[-\frac{1}{v^2}\,\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right]$ quand on passe d'un système $(\sigma_0, \tau_0, \sigma, \tau, v, w)$ à un quelconque des systèmes équi-

valents de la classe considérée est donc aussi égale à $-\dfrac{6\varepsilon\alpha'\pi i}{v(\beta' v - \alpha' w)}$; on a donc, en particulier, pour $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$, la relation équivalente à celle de Legendre,

$$\frac{1}{w^2}\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, -\frac{\varepsilon v}{w}\right)} - \frac{1}{v^2}\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} = \frac{6\varepsilon\pi i}{vw}.$$

De l'isotropie des deux fonctions

$$\frac{6\varepsilon\tau_0\pi i}{u_0 v} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{v^2}\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)},$$

pour la classe de systèmes envisagés, on déduit aussi que la fonction

$$\frac{v\,\mathfrak{S}\left(\sigma + \tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} e^{\left(\sigma + \tau\frac{w}{v}\right)\tau\varepsilon\pi i}$$

est un invariant de cette classe, tout comme la fonction moins simple

$$\overline{\mathrm{En}}\left(\sigma + \tau\frac{w}{v}, \frac{\varepsilon w}{v}\right),$$

définie dans une Communication précédente. Il est d'ailleurs facile de voir que la formule qui exprime cette invariance n'est autre que la formule de transformation linéaire de la fonction $\mathfrak{S}$ pour $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\alpha' = 1$, $\beta' = 0$. On a donc une nouvelle démonstration de l'équivalence de la formule de transformation linéaire de la fonction impaire $\mathfrak{S}$ dans ce cas particulier et de la relation de Legendre.

Voici encore une autre démonstration de la relation de Legendre. Envisageons la classe des systèmes équivalents que l'on obtient en remplaçant, dans le système

$$(\alpha\sigma + \beta\tau,\ \alpha'\sigma + \beta'\tau,\ \beta' v - \alpha' w,\ -\beta v + \alpha w),$$

α, β, α', β' par tous les nombres entiers vérifiant la relation $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$; σ, τ sont des variables réelles quelconques, v, w des variables imaginaires dont le rapport n'est pas réel. Les deux quantités

$$\frac{2\varepsilon\pi i}{v}, \quad \frac{\tau}{v\sigma + w\tau}$$

et

$$\lim_{N=\infty}\lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{1}{(mv + nw)^2} = -\frac{1}{3v^2}\frac{\mathfrak{S}'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\mathfrak{S}'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}, \quad \left(\begin{matrix}-M \leqq m \leqq M\\ -N \leqq n \leqq N\end{matrix}\right),$$

où ε est le signe de la partie imaginaire de $\frac{w}{vi}$, sont isotropes pour cette classe de systèmes équivalents.

Pour le démontrer, Kronecker envisage la fonction

$$\operatorname{atr}(\varepsilon u, u'_0, u_0, v, \varepsilon w),$$

définie par la série à double entrée

$$\log\operatorname{atr}(\varepsilon u, u'_0, u_0, v, \varepsilon w) = \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i} \log \frac{(\sigma'_0 + m)v + (\tau'_0 + n)w}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}$$

$$(-M \leqq m \leqq M, \quad -N \leqq n \leqq N),$$

où

$$u = v\sigma + w\tau, \qquad u_0 = v\sigma_0 + w\tau_0, \qquad u'_0 = v\sigma'_0 + w\tau'_0,$$

σ'_0 et τ'_0 étant, comme σ_0, τ_0, σ, τ des variables réelles quelconques. Cette fonction, qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial \log\operatorname{atr}(\varepsilon u, u'_0, u_0, v, \varepsilon w)}{\partial u'_0} = \operatorname{Ser}(u, u'_0, v, w),$$

est un invariant de la classe de systèmes équivalents que l'on obtient en remplaçant dans le système

$$\begin{array}{llll} \alpha\sigma + \beta\tau + \gamma, & \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, & \alpha\sigma'_0 + \beta\tau'_0, & \beta' v - \alpha' w, \\ \alpha'\sigma + \beta'\tau + \gamma', & \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, & \alpha'\sigma'_0 + \beta'\tau'_0, & -\beta v + \alpha w, \end{array}$$

γ et γ' par tous les entiers et α, β, α', β' par tous les entiers en vérifiant la relation $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$. L'ensemble des termes de même dimension dans le développement de cette fonction suivant les puissances croissantes de σ, τ, σ_0, τ_0, σ'_0, τ'_0 est donc aussi un invariant de la même classe de systèmes équivalents. Or l'ensemble des termes de ce développement dont la dimension est égale à 2, est

$$\frac{1}{2}(u'_0 - u_0)(2\varepsilon u + u'_0 + u_0)\left[\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(v\sigma + w\tau)} + \frac{1}{3v^2}\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}\right];$$

donc les deux quantités

$$\frac{2\varepsilon\tau\pi i}{v(v\sigma + w\tau)}, \quad -\frac{1}{3v^2}\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}$$

sont isotropes.

De cette isotropie on déduit d'ailleurs immédiatement la relation de Legendre.

En modifiant la démonstration précédente, on montre que, quand M et N tendent vers l'infini, tandis que σ et τ tendent vers zéro, la somme double

$$\sum_{m,n} \frac{\cos(n\sigma - m\tau)2\pi}{(mv + nw)^2} \qquad (-M \leqq m \leqq M, \quad -N \leqq n \leqq N)$$

tend vers des limites différentes suivant l'ordre dans lequel on prend les limites.

Ainsi l'on a

$$\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{\cos(n\sigma - m\tau)2\pi}{(mv+nw)^2} = -\frac{1}{3v^2}\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)} - \frac{2\varepsilon\pi i}{v}\lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \frac{\tau}{v\sigma + w\tau},$$

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \lim_{\substack{\sigma=0\\ \tau=0}} \sum_{m,n} \frac{\cos(n\sigma - m\tau)2\pi}{(mv+nw)^2} = -\frac{1}{3v^2}\frac{\vartheta'''\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}{\vartheta'\left(0, \frac{\varepsilon w}{v}\right)}.$$

De ce fait analytique on déduit aussi la relation de Legendre.

Une autre démonstration de cette même relation repose sur une représentation particulière du carré du produit

$$\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2),$$

où w_1 et $-w_2$ désignent les deux racines de l'équation du second degré

$$a_0 + b_0 w + c_0 w^2 = 0,$$

dont les coefficients sont des quantités réelles vérifiant la relation

$$4a_0c_0 - b_0^2 = 1.$$

Kronecker a montré (*Sitzungsberichte,* 1883) que l'on a

$$\begin{aligned}(iw_1 + iw_2)^3[\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)]^2 \\ = -16\pi^4 \sum_{m,n} (-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2)e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)},\end{aligned}$$

où la série à double entrée qui figure dans le second membre est étendue à tous les entiers positifs et négatifs m, n; or cette série à double entrée ne change pas de valeur quand on y remplace le trinome $a_0m^2 + b_0mn + c_0n^2$ par le trinome

$$\begin{aligned}&(a_0\alpha^2 + b_0\alpha\alpha' + c_0\alpha'^2)m^2 \\ &\quad + [2a_0\alpha\beta + b_0(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + 2c_0\alpha'\beta']mn + (a_0\beta^2 + b_0\beta\beta' + c_0\beta'^2)n^2,\end{aligned}$$

quels que soient les entiers α, β, α', β' vérifiant la relation $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$; l'expression

$$(iw_1 + iw_2)^3[\vartheta'(0, w_1)\,\vartheta'(0, w_2)]^2$$

est donc un invariant pour toute la classe des systèmes que l'on obtient en remplaçant $(w_1, -w_2)$ par les deux racines de l'une quelconque des équations

$$a_0 + b_0\frac{\alpha' + \beta' w}{\alpha + \beta w} + c_0\left(\frac{\alpha' + \beta' w}{\alpha + \beta w}\right)^2 = 0.$$

Cette expression a donc, en particulier, la même valeur lorsque dans la dernière équation on suppose $\alpha = \beta' = 0$, $\alpha' = 1$, $\beta' = -1$ que lorsqu'on y fait $\alpha = \beta' = 1$, $\alpha' = \beta = 0$, on en conclut la relation

$$(iw)^3\left[\frac{\vartheta'(0, w)}{\vartheta'\left(0, -\frac{1}{w}\right)}\right]^2 = 1,$$

d'où

$$w\frac{\vartheta'''(0,w)}{\vartheta'(0,w)}-\frac{1}{w}\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{1}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{1}{w}\right)}=-6\pi i,$$

relation équivalente à celle de Legendre, comme on l'a déjà démontré.

Kronecker modifie enfin la démonstration précédente en remarquant que l'on a

$$\left[\frac{\vartheta'''(0,w_1)}{3c_0\vartheta'(0,w_1)}+2\pi\right]\left[\frac{\vartheta'''(0,w_2)}{3c_0\vartheta'(0,w_1)}+2\pi\right]$$
$$=-8\pi^2+\frac{16\pi^4}{9}\frac{\sum\limits_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)^3e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)}}{\sum\limits_{m,n}(-1)^{(m-1)(n-1)}(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)\,e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)}},$$

où, au numérateur comme au dénominateur, les sommes doubles sont étendues à toutes les valeurs entières positives et négatives des indices m, n. Pour $b_0=0$, on a donc, en désignant par w la valeur commune $\frac{i}{2c_0}$ des deux racines w_1-w_2 du trinome $a_0+b_0w+c_0w^2$,

$$iw\frac{\vartheta'''(0,w)}{\vartheta'(0,w)}-3\pi=-\left[\frac{1}{iw}\frac{\vartheta'''\left(0,-\frac{1}{w}\right)}{\vartheta'\left(0,-\frac{1}{w}\right)}-3\pi\right],$$

d'où l'on déduit, pour des valeurs *réelles* de iw, la formule de transformation linéaire de la fonction ϑ qui est équivalente à la relation de Legendre. On étend ensuite, sans difficulté, la même formule à des valeurs quelconques de iw.

J. M.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES,

Tome CXVII, 1893 [1].

Boussinesq. — Sur les déformations successives à la tête d'une onde aérienne isolée, durant la propagation de cette onde le long d'un tuyau de conduite sans eau de longueur indéfinie. (12-18).

M. Boussinesq étudie le ralentissement, les déformations et l'extinction des

---

[1] Voir *Bulletin*, XIX$_2$, p. 130.

ondes aériennes dans les tuyaux, par l'effet du frottement et de la perméabilité calorifique de la paroi.

Il obtient, pour expression asymptotique de la compression γ, l'équation

$$\frac{d\gamma}{dt} = -a\frac{d\gamma}{dx} + \mu\frac{\chi}{\sigma}\sqrt{\frac{a}{\pi}}\int_0^\infty \varphi'(x - at + \beta^2)\,d\beta,$$

où a est la vitesse du son dans l'air libre, μ un coefficient habituellement voisin de 0,0058, σ l'aire et χ le périmètre du tuyau, enfin $\varphi(x - at)$ une expression de γ approchée et censée connue.

Il examine en particulier le cas d'une intumescence isolée où, en allant du front de l'onde ($x = \infty$) vers sa queue ($x = -\infty$), la condensation γ croît de zéro jusqu'à une valeur maxima h (sommet) qu'elle atteint au niveau de la section X, pour décroître ensuite jusqu'à zéro. Il donne des formules qui permettent de calculer : 1° la vitesse de propagation $\omega = \frac{dX}{dt}$ du sommet h vers les x positifs; 2° le rapport $m = -\frac{1}{h}\frac{dh}{dX}$, coefficient actuel d'extinction de ce même sommet ou maximum h; 3° le coefficient d'extinction $m' = -\frac{1}{a\varepsilon}\frac{d\varepsilon}{dt}$ de l'énergie totale de l'onde $\varepsilon = \int_{-\infty}^{\infty}\gamma^2\,dx$.

Si l'on attribue à la fonction φ la forme très simple et très naturelle

$$(1)\qquad \varphi(x - at) = h\frac{c^2}{c^2 + (x - at)^2} = h\sin^2 2\eta,$$

où la variable auxiliaire η croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$ de la tête à la queue de l'onde, ces formules se présentent sous la forme

$$(2)\qquad \frac{a - \omega}{a} = \frac{3\mu}{16}\sqrt{\frac{\pi c}{2a}}\frac{\chi}{\sigma},$$

$$(3)\qquad m = \frac{\mu}{\pi}\sqrt{\frac{\pi}{2ac}}\frac{\chi}{\sigma},$$

$$(4)\qquad m' = m\sqrt{2};$$

d'où l'on déduit que la longueur *sensible* de l'onde, mesurée par le paramètre c, croît, à l'époque considérée, comme l'exponentielle $e^{(2-\sqrt{2})mat}$.

Cet allongement se fait surtout à la *queue* ($x = -\infty$). Au contraire, le mouvement de la tête garde à toute époque l'expression (3), où h et c sont supposés *lentement* variables. Il suffit donc d'évaluer le coefficient d'extinction m'' de l'énergie

$$\int_X \gamma^2\,dx = \frac{\pi}{4}ch^2$$

de ce mouvement de la tête pour avoir une équation qui, avec (3), détermine de proche en proche les déformations.

M. Boussinesq trouve, pour calculer m'', la relation

$$\frac{m''}{m} = -\frac{3}{\pi} + \frac{64}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(3\sin^{\frac{5}{2}}\eta\cos^{\frac{7}{2}}\eta - \sin^{\frac{9}{2}}\eta\cos^{\frac{3}{2}}\eta\right)d\eta = 1,7878.$$

Comme le rapport $\frac{m''}{m}$ surpasse $\frac{m'}{m}$, l'énergie décroît plus vite dans la tête que dans l'onde entière : la tête s'allonge sans cesse, mais beaucoup moins que la queue.

Si l'on désigne par h_0 et c_0 les valeurs initiales des paramètres h et c, on aura

$$\left(\frac{h_0}{h}\right)^{0,1061} = 1 + 0,1061\,\frac{\mu\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2ac_0}}\,\frac{\chi}{\sigma}\,at,$$

$$\sqrt{\frac{c}{c_0}} = 1 + 0,1061\,\frac{\mu\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2ac_0}}\,\frac{\chi}{\sigma}\,at,$$

$$a - \omega = \frac{3\mu\sqrt{\pi}}{32}\,\frac{\chi}{\sigma}\left(\sqrt{2ac_0} + 0,1061\,\frac{\mu\sqrt{\pi}}{4}\,\frac{\chi}{\sigma}\,at\right).$$

On voit que la vitesse de propagation ω décroît sans cesse, comme l'avait indiqué Regnault.

Poincaré. — Sur les transformations birationnelles des courbes algébriques. (18-23).

Nöther et Halphen ont démontré qu'on peut toujours, par une transformation birationnelle, transformer une courbe algébrique plane dont tous les points multiples sont à tangentes séparées.

On peut aller plus loin et montrer, comme le fait M. Poincaré :

1° Qu'on peut toujours transformer une courbe quelconque en une courbe gauche dénuée de toute singularité;

2° Qu'on peut toujours la transformer en une courbe plane n'ayant d'autres singularités que des points doubles ordinaires.

Boussinesq. — Introduction naturelle de termes proportionnels aux déplacements de l'éther, ou termes de Briot, dans les équations de mouvement des ondes lumineuses. (80-86).

Mittag-Leffler. — Sur une équation différentielle du second ordre. (92-93).

M. Mittag-Leffler fait remarquer que, au lieu de définir la fonction $p(u)$ de Weierstrass par l'équation connue

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3,$$

on peut aussi bien la définir par l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 - \frac{1}{2}g_2.$$

Il se pose ensuite cette question : Trouver toutes les équations du second ordre, ne contenant pas x explicitement, qui soient du premier degré en $\frac{d^2y}{dx^2}$, rationnelles et entières en y et $\frac{dy}{dx}$, et dont l'intégrale générale n'ait d'autres singularités que des pôles de multiplicité 2.

Toutes ces équations peuvent être ramenées par une substitution linéaire à la forme

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 - \frac{3}{2}k^4 + 5k\frac{dy}{dx},$$

dont l'intégrale générale, avec les deux constantes arbitraires x_0 et H, est

$$y = p\left[\frac{\sqrt{H}}{k}(e^{kx} + e^{kx_0}),\ 0, 4\right] He^{2kx} - \frac{k^2}{2} \quad (g_2 = 0,\ g_3 = 4).$$

Brillouin. — Vibrations propres d'un milieu indéfiniment étendu extérieurement à un corps solide. (94-96).

Si l'on déforme la surface d'un corps plongé dans un milieu indéfini, puis qu'on immobilise la surface, le milieu, abandonné à lui-même, restera en mouvement pendant quelque temps au voisinage du corps, car en général la pression n'aura pas été réduite à sa valeur d'équilibre en même temps que la surface était immobilisée, puis ce mouvement se propagera au loin et tout s'éteindra lentement autour du corps. L'existence de ces vibrations propres résulte de l'absence de mouvement se propageant vers le corps et des conditions à la surface.

M. Brillouin cherche les petits mouvements propres d'une atmosphère gazeuse enclavant une sphère solide. Le potentiel des vitesses d'une onde périodique émise par cette sphère est

$$\varphi = \sum S_n \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{-2pr}}{r^{n+1}}\right) e^{p(r+\omega t)},$$

où S_n est une fonction sphérique homogène de degré n en x, y, z et e la base des logarithmes népériens.

L'auteur applique cette formule : 1° au cas où la pression à la surface est invariable; 2° au cas où la surface est immobile. Il obtient ainsi les équations qui définiraient le son émis par un corps sphérique en mouvement lent dans l'air.

La propriété générale, mise en évidence par M. Brillouin, montre que la forme d'un boulet définit la hauteur des sons qu'il produit, que celle d'un navire définit les périodes des ondes auxquelles il donne naissance, etc.

Boussinesq. — Expression de la résistance opposée par chaque molécule pondérable au mouvement vibratoire de l'éther ambiant. (138-144).

Poincaré. — Sur la généralisation d'un théorème d'Euler relatif aux polyèdres. (144-145).

Qu'on imagine un polyèdre situé dans l'espace à $n+1$ dimensions. Soient : α_0 le nombre de ses éléments à une dimension (sommets); α_1 le nombre des éléments à deux dimensions (arêtes), etc; α_n celui des éléments à n dimensions. (Tous les éléments sont supposés simplement connexes.) M. Poincaré trouve

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots \pm \alpha_n = \text{const.}$$

Il est remarquable que la constante dépend de l'ordre de connexion du polyèdre si n est pair, et est toujours nulle si n est impair.

Boussinesq. — Considérations diverses sur la théorie des ondes lumineuses. (193).

Painlevé. — Sur les équations du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme. (211-214).

L'auteur donne la solution complète de la question suivante : Étant donnée une équation du second ordre

$$(1) \qquad y'' = \mathrm{R}(y', y),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y et indépendant de x, reconnaître si l'intégrale générale de cette équation est uniforme.

La méthode qu'il indique permet d'ailleurs de former toutes les équations (1) jouissant de cette propriété et de déterminer la nature de leur intégrale : cette intégrale est une combinaison de fonctions rationnelles, exponentielles et doublement périodiques ou dépend d'une équation de Riccati à coefficients périodiques.

Il y a donc une profonde différence entre le second et le troisième ordre, puisque les équations du troisième ordre de la forme

$$y'y''' = \frac{3}{2}y''^2 + y'^4 \mathrm{A}(y),$$

où $\mathrm{A}(y)$ est une fonction algébrique, peuvent admettre comme intégrale une fonction fuchsienne. Une des raisons de cette différence est que l'intégrale d'une équation du second ordre ne peut présenter de coupure.

M. Painlevé regarde comme indubitable que l'intégrale d'une équation algébrique quelconque

$$\mathrm{F}(y'', y', y) = 0,$$

quand elle est uniforme, est réductible aux transcendantes qu'introduisent les équations du premier ordre. Il n'en est pas ainsi quand x figure explicitement dans l'équation.

Guldberg. — Sur certains systèmes d'équations différentielles ordinaires. (215-216).

M. Guldberg a déjà présenté quelques remarques sur les systèmes simultanés qui possèdent *un* système simultané d'intégrales premières.

Actuellement, il étudie le cas où un système simultané possède *un* système *fondamental* d'intégrales premières.

D'Ocagne. — Sur une méthode nomographique applicable à des équations pouvant contenir jusqu'à dix variables. (216-219).

D'Ocagne. — Complément à la méthode nomographique récemment décrite en vue de l'introduction d'une variable de plus. (277-278).

Maltézos. — Sur les équations du mouvement d'un corps solide se mouvant dans un liquide indéfini. (337).

Clebsch a intégré les équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide en supposant nulles les forces accélératrices.

Reprenant ces équations, complétées par l'adjonction des composantes X, Y, Z des forces extérieures et des composantes M_x, M_y, M_z de leurs moments, M. Maltézos indique les conditions auxquelles doivent satisfaire X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, pour que les équations soient intégrables par la méthode de Clebsch.

Humbert (G.). — Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques. (361-363).

Sur une surface n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série quelconque, simplement infinie, de courbes algébriques se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire de courbes du même ordre. (Les courbes d'une série linéaire sont des courbes découpées sur la surface fixe par les surfaces d'un même système linéaire, chaque surface ne découpant qu'une courbe et inversement.)

Les applications de ce principe sont nombreuses; en voici deux :

Toute surface engendrée par des courbes unicursales, sans point singulier mobile et se coupant deux à deux en un nombre quelconque de points, est représentable point par point sur le plan.

Les surfaces susceptibles d'être engendrées par des cubiques planes de genre 1, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points, sont : 1° les surfaces d'ordre 3 ; 2° les surfaces réglées d'ordre 4 et de genre 1; 3° une surface d'ordre 3 (avec ses variétés) dont les coordonnées ponctuelles homogènes, exprimées en fonctions de deux paramètres u et v, sont des combinaisons linéaires et homogènes des six quantités

$$1,\quad pu\,pv,\quad p'u\,p'v,\quad pu+pv,\quad p'u+p'v,\quad pu\,p'v+pv\,p'u.$$

Resal. — Sur la denture de l'engrenage hyperboloïdal. (391-398).

M. Resal fait la théorie mathématique de ce mécanisme dont l'objet est de transformer l'une dans l'autre deux rotations non comprises dans un même plan.

Qu'on imagine un polyèdre situé dans l'espace à $n+1$ dimensions. Soient : α_0 le nombre de ses éléments à une dimension (sommets); α_1 le nombre des éléments à deux dimensions (arêtes), etc; α_n celui des éléments à n dimensions. (Tous les éléments sont supposés simplement connexes.) M. Poincaré trouve

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots \pm \alpha_n = \text{const.}$$

Il est remarquable que la constante dépend de l'ordre de connexion du polyèdre si n est pair, et est toujours nulle si n est impair.

Boussinesq. — Considérations diverses sur la théorie des ondes lumineuses. (193).

Painlevé. — Sur les équations du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme. (211-214).

L'auteur donne la solution complète de la question suivante :

Étant donnée une équation du second ordre

$$(1) \qquad y'' = R(y', y),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y et indépendant de x, reconnaître si l'intégrale générale de cette équation est uniforme.

La méthode qu'il indique permet d'ailleurs de former toutes les équations (1) jouissant de cette propriété et de déterminer la nature de leur intégrale : cette intégrale est une combinaison de fonctions rationnelles, exponentielles et doublement périodiques ou dépend d'une équation de Riccati à coefficients périodiques.

Il y a donc une profonde différence entre le second et le troisième ordre, puisque les équations du troisième ordre de la forme

$$y'y''' = \frac{3}{2}y''^2 + y'^4 A(y),$$

où $A(y)$ est une fonction algébrique, peuvent admettre comme intégrale une fonction fuchsienne. Une des raisons de cette différence est que l'intégrale d'une équation du second ordre ne peut présenter de coupure.

M. Painlevé regarde comme indubitable que l'intégrale d'une équation algébrique quelconque

$$F(y'', y', y) = 0,$$

quand elle est uniforme, est réductible aux transcendantes qu'introduisent les équations du premier ordre. Il n'en est pas ainsi quand x figure explicitement dans l'équation.

Guldberg. — Sur certains systèmes d'équations différentielles ordinaires. (215-216).

M. Guldberg a déjà présenté quelques remarques sur les systèmes simultanés qui possèdent *un* système simultané d'intégrales premières.

Actuellement, il étudie le cas où un système simultané possède *un* système *fondamental* d'intégrales premières.

D'Ocagne. — Sur une méthode nomographique applicable à des équations pouvant contenir jusqu'à dix variables. (216-219).

D'Ocagne. — Complément à la méthode nomographique récemment décrite en vue de l'introduction d'une variable de plus. (277-278).

Maltézos. — Sur les équations du mouvement d'un corps solide se mouvant dans un liquide indéfini. (337).

Clebsch a intégré les équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide en supposant nulles les forces accélératrices.

Reprenant ces équations, complétées par l'adjonction des composantes X, Y, Z des forces extérieures et des composantes M_x, M_y, M_z de leurs moments, M. Maltézos indique les conditions auxquelles doivent satisfaire X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, pour que les équations soient intégrables par la méthode de Clebsch.

Humbert (G.). — Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques. (361-363).

Sur une surface n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série quelconque, simplement infinie, de courbes algébriques se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire de courbes du même ordre. (Les courbes d'une série linéaire sont des courbes découpées sur la surface fixe par les surfaces d'un même système linéaire, chaque surface ne découpant qu'une courbe et inversement.)

Les applications de ce principe sont nombreuses; en voici deux :

Toute surface engendrée par des courbes unicursales, sans point singulier mobile et se coupant deux à deux en un nombre quelconque de points, est représentable point par point sur le plan.

Les surfaces susceptibles d'être engendrées par des cubiques planes de genre 1, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points, sont : 1° les surfaces d'ordre 3; 2° les surfaces réglées d'ordre 4 et de genre 1; 3° une surface d'ordre 3 (avec ses variétés) dont les coordonnées ponctuelles homogènes, exprimées en fonctions de deux paramètres u et v, sont des combinaisons linéaires et homogènes des six quantités

$$1,\quad pu\,pv,\quad p'u\,p'v,\quad pu+pv,\quad p'u+p'v,\quad pu\,p'v+pv\,p'u.$$

Resal. — Sur la denture de l'engrenage hyperboloïdal. (391-398).

M. Resal fait la théorie mathématique de ce mécanisme dont l'objet est de transformer l'une dans l'autre deux rotations non comprises dans un même plan.

Qu'on imagine un polyèdre situé dans l'espace à $n+1$ dimensions. Soient : α_0 le nombre de ses éléments à une dimension (sommets); α_1 le nombre des éléments à deux dimensions (arêtes), etc; α_n celui des éléments à n dimensions. (Tous les éléments sont supposés simplement connexes.) M. Poincaré trouve

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots \pm \alpha_n = \text{const.}$$

Il est remarquable que la constante dépend de l'ordre de connexion du polyèdre si n est pair, et est toujours nulle si n est impair.

Boussinesq. — Considérations diverses sur la théorie des ondes lumineuses. (193).

Painlevé. — Sur les équations du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme. (211-214).

L'auteur donne la solution complète de la question suivante :

Étant donnée une équation du second ordre

$$(1) \qquad y'' = R(y', y),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y et indépendant de x, reconnaître si l'intégrale générale de cette équation est uniforme.

La méthode qu'il indique permet d'ailleurs de former toutes les équations (1) jouissant de cette propriété et de déterminer la nature de leur intégrale : cette intégrale est une combinaison de fonctions rationnelles, exponentielles et doublement périodiques ou dépend d'une équation de Riccati à coefficients périodiques.

Il y a donc une profonde différence entre le second et le troisième ordre, puisque les équations du troisième ordre de la forme

$$y'y''' = \frac{3}{2}y''^2 + y'^4 A(y),$$

où $A(y)$ est une fonction algébrique, peuvent admettre comme intégrale une fonction fuchsienne. Une des raisons de cette différence est que l'intégrale d'une équation du second ordre ne peut présenter de coupure.

M. Painlevé regarde comme indubitable que l'intégrale d'une équation algébrique quelconque

$$F(y'', y', y) = 0,$$

quand elle est uniforme, est réductible aux transcendantes qu'introduisent les équations du premier ordre. Il n'en est pas ainsi quand x figure explicitement dans l'équation.

Guldberg. — Sur certains systèmes d'équations différentielles ordinaires. (215-216).

M. Guldberg a déjà présenté quelques remarques sur les systèmes simultanés qui possèdent *un* système simultané d'intégrales premières.

Actuellement, il étudie le cas où un système simultané possède *un* système *fondamental* d'intégrales premières.

D'Ocagne. — Sur une méthode nomographique applicable à des équations pouvant contenir jusqu'à dix variables. (216-219).

D'Ocagne. — Complément à la méthode nomographique récemment décrite en vue de l'introduction d'une variable de plus. (277-278).

Maltézos. — Sur les équations du mouvement d'un corps solide se mouvant dans un liquide indéfini. (337).

Clebsch a intégré les équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide en supposant nulles les forces accélératrices.

Reprenant ces équations, complétées par l'adjonction des composantes X, Y, Z des forces extérieures et des composantes M_x, M_y, M_z de leurs moments, M. Maltézos indique les conditions auxquelles doivent satisfaire X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, pour que les équations soient intégrables par la méthode de Clebsch.

Humbert (G.). — Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques. (361-363).

Sur une surface n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série quelconque, simplement infinie, de courbes algébriques se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire de courbes du même ordre. (Les courbes d'une série linéaire sont des courbes découpées sur la surface fixe par les surfaces d'un même système linéaire, chaque surface ne découpant qu'une courbe et inversement.)

Les applications de ce principe sont nombreuses; en voici deux :

Toute surface engendrée par des courbes unicursales, sans point singulier mobile et se coupant deux à deux en un nombre quelconque de points, est représentable point par point sur le plan.

Les surfaces susceptibles d'être engendrées par des cubiques planes de genre 1, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points, sont : 1° les surfaces d'ordre 3; 2° les surfaces réglées d'ordre 4 et de genre 1; 3° une surface d'ordre 3 (avec ses variétés) dont les coordonnées ponctuelles homogènes, exprimées en fonctions de deux paramètres u et v, sont des combinaisons linéaires et homogènes des six quantités

$$1,\quad pu\,pv,\quad p'u\,p'v,\quad pu+pv,\quad p'u+p'v,\quad pu\,p'v+pv\,p'u.$$

Resal. — Sur la denture de l'engrenage hyperboloïdal. (391-398).

M. Resal fait la théorie mathématique de ce mécanisme dont l'objet est de transformer l'une dans l'autre deux rotations non comprises dans un même plan.

Qu'on imagine un polyèdre situé dans l'espace à $n+1$ dimensions. Soient : α_0 le nombre de ses éléments à une dimension (sommets); α_1 le nombre des éléments à deux dimensions (arêtes), etc; α_n celui des éléments à n dimensions. (Tous les éléments sont supposés simplement connexes.) M. Poincaré trouve

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \ldots \pm \alpha_n = \text{const.}$$

Il est remarquable que la constante dépend de l'ordre de connexion du polyèdre si n est pair, et est toujours nulle si n est impair.

Boussinesq. — Considérations diverses sur la théorie des ondes lumineuses. (193).

Painlevé. — Sur les équations du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme. (211-214).

L'auteur donne la solution complète de la question suivante :

Étant donnée une équation du second ordre

$$(1) \qquad y'' = R(y', y),$$

où R est rationnel en y', algébrique en y et indépendant de x, reconnaître si l'intégrale générale de cette équation est uniforme.

La méthode qu'il indique permet d'ailleurs de former toutes les équations (1) jouissant de cette propriété et de déterminer la nature de leur intégrale : cette intégrale est une combinaison de fonctions rationnelles, exponentielles et doublement périodiques ou dépend d'une équation de Riccati à coefficients périodiques.

Il y a donc une profonde différence entre le second et le troisième ordre, puisque les équations du troisième ordre de la forme

$$y'y''' = \frac{3}{2}y''^2 + y'^4 A(y),$$

où $A(y)$ est une fonction algébrique, peuvent admettre comme intégrale une fonction fuchsienne. Une des raisons de cette différence est que l'intégrale d'une équation du second ordre ne peut présenter de coupure.

M. Painlevé regarde comme indubitable que l'intégrale d'une équation algébrique quelconque

$$F(y'', y', y) = 0,$$

quand elle est uniforme, est réductible aux transcendantes qu'introduisent les équations du premier ordre. Il n'en est pas ainsi quand x figure explicitement dans l'équation.

Guldberg. — Sur certains systèmes d'équations différentielles ordinaires. (215-216).

M. Guldberg a déjà présenté quelques remarques sur les systèmes simultanés qui possèdent *un* système simultané d'intégrales premières.

Actuellement, il étudie le cas où un système simultané possède *un* système *fondamental* d'intégrales premières.

D'Ocagne. — Sur une méthode nomographique applicable à des équations pouvant contenir jusqu'à dix variables. (216-219).

D'Ocagne. — Complément à la méthode nomographique récemment décrite en vue de l'introduction d'une variable de plus. (277-278).

Maltézos. — Sur les équations du mouvement d'un corps solide se mouvant dans un liquide indéfini. (337).

Clebsch a intégré les équations du mouvement d'un corps solide dans un liquide en supposant nulles les forces accélératrices.

Reprenant ces équations, complétées par l'adjonction des composantes X, Y, Z des forces extérieures et des composantes M_x, M_y, M_z de leurs moments, M. Maltézos indique les conditions auxquelles doivent satisfaire X, Y, Z, M_x, M_y, M_z, pour que les équations soient intégrables par la méthode de Clebsch.

Humbert (G.). — Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques. (361-363).

Sur une surface n'ayant pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce, une série quelconque, simplement infinie, de courbes algébriques se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire de courbes du même ordre. (Les courbes d'une série linéaire sont des courbes découpées sur la surface fixe par les surfaces d'un même système linéaire, chaque surface ne découpant qu'une courbe et inversement.)

Les applications de ce principe sont nombreuses; en voici deux :

Toute surface engendrée par des courbes unicursales, sans point singulier mobile et se coupant deux à deux en un nombre quelconque de points, est représentable point par point sur le plan.

Les surfaces susceptibles d'être engendrées par des cubiques planes de genre 1, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points, sont : 1° les surfaces d'ordre 3; 2° les surfaces réglées d'ordre 4 et de genre 1; 3° une surface d'ordre 3 (avec ses variétés) dont les coordonnées ponctuelles homogènes, exprimées en fonctions de deux paramètres u et v, sont des combinaisons linéaires et homogènes des six quantités

$$1,\quad pu\,pv,\quad p'u\,p'v,\quad pu+pv,\quad p'u+p'v,\quad pu\,p'v+pv\,p'u.$$

Resal. — Sur la denture de l'engrenage hyperboloïdal. (391-398).

M. Resal fait la théorie mathématique de ce mécanisme dont l'objet est de transformer l'une dans l'autre deux rotations non comprises dans un même plan.

Serret (*P.*). — Des cercles ou des sphères d'une enveloppe plane ou solide de classe quelconque. (400-402).

Serret (*P.*). — Des cercles ou des sphères dérivés d'une enveloppe de classe quelconque. (435-438).

Picard. — Sur une classe de transcendantes nouvelles. (472-476).

Étant donnée une substitution Cremona

$$x' = R_1(x, y, \ldots, t),$$
$$y' = R_2(x, y, \ldots, t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$t' = R_m(x, y, \ldots, t),$$

relative à m lettres $x, y, \ldots, t$, il existe une infinité de systèmes de m fonctions $f(z)$, $\varphi(z)$, ..., $\psi(z)$ uniformes dans tout le plan, n'ayant que discontinuités polaires, et jouissant des propriétés suivantes :

Elles admettent une période ω', et l'on a, par le changement de z en $z+\omega$,

$$f(z+\omega) = R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z+\omega) = R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\psi(z+\omega) = R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$

ω et ω' étant deux constantes données dont le rapport est imaginaire.

M. Picard traite d'abord le problème en prenant pour les R des fonctions rationnelles quelconques. On démontre seulement dans ce cas l'existence de fonctions uniformes dans une moitié du plan.

L'auteur résout la question par la méthode des approximations successives. Il prend pour première approximation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce $f_0(z)$, $\varphi_0(z)$, ..., $\psi_0(z)$, et démontre que les fonctions

$$f_n(z+\omega) = \mu_1 f_n(z) + R_1[f_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)],$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\psi_n(z+\omega) = \mu_m f_n(z) + R_m[f_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)]$$

tendent quand n augmente vers des limites $f(z)$, ..., $\psi(z)$ qui sont précisément les fonctions dont il s'agit de prouver l'existence.

Lévy (*L.*). — Théorème sur les systèmes triplement orthogonaux. (477-480).

M. Darboux a signalé des systèmes qui jouissent de la propriété suivante : Si l'on forme le tableau carré des neuf cosinus directeurs des normales aux

trois surfaces orthogonales en un même point

$$\begin{matrix} X, & Y, & Z, \\ X_1, & Y_1, & Z_1, \\ X_2, & Y_2, & Z_2, \end{matrix}$$

ce tableau est symétrique par rapport à la diagonale principale.

Ces systèmes sont : 1° celui qui se compose des trois familles de sphères tangentes à l'origine respectivement aux trois plans coordonnés; 2° ceux qui correspondent au système précédent par plans tangents parallèles suivant la méthode de M. Combescure ou suivant celle de M. Darboux.

M. L. Lévy démontre qu'il n'y a pas d'autres systèmes orthogonaux jouissant de la même propriété.

Serret (*P.*). — Des cercles ou des sphères dérivés d'une enveloppe, plane ou solide, de classe quelconque. (480-482).

Resal. — Sur la stabilité de l'équilibre de l'axe de la toupie gyroscopique (499-502).

Picard. — Sur l'équation aux dérivées partielles qui se présente dans la théorie de la vibration des membranes. (502-507).

Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad \Delta u + ku = 0,$$

il n'existe pas, si la constante k est prise arbitrairement, d'intégrale continue à l'intérieur d'un contour fermé C et s'annulant sur ce contour. Il existe seulement certaines valeurs positives en nombre infini k_1, k_2, ... pour lesquelles il en est ainsi; à ces valeurs correspondent les divers sons que peut rendre la membrane dont les vibrations dépendent de l'équation (1). Ces résultats n'ont jamais été démontrés rigoureusement, sauf en ce qui concerne la première valeur k_1. M. Schwartz a, en effet, établi l'existence de la solution singulière correspondante (son fondamental de la membrane).

Reprenant ce problème, M. Picard envisage l'intégrale de (1) qui devient égale à l'unité sur C; on peut la regarder comme une fonction de k, lequel peut être complexe aussi bien que réel. Cette fonction est une fonction uniforme dans le plan de la variable complexe k, et ses points singuliers sont k_1, k_2, ... L'auteur cherche quelle est la nature de ce premier point singulier k_1; il trouve que c'est un pôle simple de l'intégrale considérée v, laquelle peut être développée en une série ordonnée suivant les puissances de k,

$$v = 1 + v_1 k + v_2 k^2 + \ldots + v_n k^n + \ldots.$$

M. Picard établit ensuite l'existence de la seconde valeur singulière k_2, en montrant que k_2 est le rayon de convergence de la série

$$w = w_0 + k w_1 + \ldots + k^n w_n + \ldots,$$

[illegible] sont déterminés par les équations

$$[illegible] = 0,$$
$$[illegible] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$[illegible] = 0,$$

[illegible] étant la valeur [illegible] pour [illegible] le contour C, tandis que les autres [illegible] se réduisent à zéro.

Delassus. — Sur une extension aux équations d'ordre quelconque d'une méthode de Riemann relative aux équations du second ordre. ([illegible]).

Les équations d'ordre n qu'étudie l'auteur sont de la forme

$$F(z) = \sum A_{ik} \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0 \quad [illegible]$$

qui comprend comme cas particulier l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

intégrée par Riemann.

On suppose que les A_{ik} ont des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$ analogues à celles de z qui entrent dans $F(z)$ et qui soient continues dans une certaine région du plan.

Si A et B désignent les points où les parallèles aux axes menées par un point quelconque P rencontrent le contour C, la valeur de z au point P se trouve, comme le montre M. Delassus, exprimée au moyen des valeurs de z et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$ le long de AB. C'est la généralisation du résultat fondamental de la méthode de Riemann.

Lelieuvre. — Sur certaines familles de cubiques gauches. ([illegible]).

M. Lelieuvre étudie l'*ensemble* GΓ d'une cubique gauche G et de la développable Γ de troisième classe enveloppée par les plans osculateurs de G.

Il recherche les familles de pareils ensembles, dépendant d'un paramètre u, qui possèdent la propriété d'être *divisés homographiquement* par leurs conjuguées; cela veut dire que, si l'on exprime les coordonnées d'un point de G et de son plan osculateur rationnellement avec un paramètre t, l'équation différentielle entre t et u, qui détermine les lignes conjuguées des cubiques G ou les développables conjuguées des développables Γ, est réductible à une équation de Riccati.

Soit

$$\Delta\, dt - \Delta' du = 0$$

l'équation différentielle des conjuguées, transformée de façon que Δ soit un polynome entier en t du sixième degré, et Δ' un autre du huitième. Il faut et il suffit que Δ divise Δ'. Or, une méthode indiquée antérieurement par M. Le-

lieuvre montre que, pour que Δ et Δ' aient une racine commune $t = t_0$, il faut et il suffit, ou que le point $t = t_0$ de la cubique G engendre, quand u (et, par suite, t_0) varie, une *enveloppe* de ces cubiques, ou que le plan tangent $t = t_0$ à Γ engendre une *enveloppe* des développables Γ. L'auteur peut alors chercher quelles pareilles enveloppes peut et doit posséder l'enveloppe $G\Gamma$ pour que la condition demandée soit remplie, et ensuite tenter la détermination de pareils ensembles.

Seiliger. — Sur un théorème nouveau de Mécanique. (578-579).

Soit un système (A) de points matériels auxquels sont appliqués dans un instant quelconque deux systèmes (P) et (P') de forces instantanées; soient (Q) et (Q') les deux mouvements instantanés correspondants de (A). On a ce théorème :

« Si les liaisons du système (A) sont indépendantes du temps, le travail des forces (P) par rapport au mouvement (Q') est égal au travail des forces (P') par rapport au mouvement (Q). »

Et ce corollaire : Si, dans le même cas, le premier travail est égal à zéro, le second travail sera aussi égal à zéro; corollaire qui contient, comme cas très particulier, le théorème de Ball, relatif à un corps solide.

Resal. — Sur le joint Goubet et son application à l'hélice des navires. (599-602).

Picard. — Sur une classe d'équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. (603-604).

Les équations dont s'occupe M. Picard sont des cas particuliers de celles qu'a envisagées M. S. Lie

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx_i}{dz} = Z_1(z)\,\xi_{1i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + Z_r(r)\,\xi_{ri}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ &\qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \right.$$

où les ξ sont supposés tels que les transformations infinitésimales

$$X_j(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

engendrent un groupe à r paramètres. L'intégrale générale de (1) peut alors, comme l'a montré M. Lie, s'obtenir à l'aide de solutions particulières arbitraires, en nombre convenable m,

$$x_1^k,\quad x_2^k,\quad \ldots,\quad x_n^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$

au moyen de formules de la forme

$$x_i = \varphi_i(x_1', \ldots, x_n', \ldots, x_1^m, \ldots, x_n^m, a_1, a_2, \ldots, a_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui dépendent de n constantes arbitraires a.

M. Picard considère le cas où les φ sont des fonctions rationnelles de x. Dans ce cas, les points critiques de l'intégrale sont fixes, et l'on peut décider si l'intégrale générale est uniforme.

S'il en est ainsi, les fonctions $Z(z)$ sont doublement périodiques et les équations (1) s'intégreront à l'aide des transcendantes nouvelles récemment introduites par M. Picard, et définies de la manière suivante :

Partant d'une substitution birationnelle arbitraire

$$x' = R_1(x, y, \ldots, t),$$
$$y' = R_2(x, y, \ldots, t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$t' = R_m(x, y, \ldots, t),$$

il existe une infinité de systèmes de m fonctions

$$f(z), \quad \varphi(z), \quad \ldots, \quad \psi(z),$$

uniformes dans tout le plan, admettant la période ω' et telles que l'on ait, par le changement de z en $z + \omega$,

$$f(z+\omega) = R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z+\omega) = R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\varphi(z+\omega) = R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)].$$

Painlevé. — Sur les équations du second ordre à points critiques fixes et sur la correspondance univoque entre deux surfaces. (611-614).

Lorsqu'une équation différentielle du second ordre

$$F(y'', y', y, x) = 0$$

a ses points critiques fixes, son intégrale $y(x)$ définit, pour x et x_0 constants, une correspondance biuniforme entre les deux surfaces

$$F(y'', y', y, x) = 0, \qquad F(y''_0, y'_0, y_0, x_0) = 0.$$

Lorsque, de plus, cette correspondance est birationnelle, les intégrales doubles et les différentielles totales de première espèce, attachées à F, se conservent dans la transformation, et c'est ce qui rend l'intégration possible.

M. Painlevé s'occupe actuellement du cas où la correspondance en question n'est pas birationnelle, mais où l'intégrale $y = f(x, \alpha, \beta)$ dépend ***algébriquement*** de l'une α des deux constantes d'intégration α, β. En éliminant α entre $y = f(x, \alpha, \beta)$ et $y' = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, on obtient une équation qui peut être ramenée algébriquement à l'une des deux formes

$$v' = lv^2 + mv + n,$$
$$v' = n\sqrt{(1-v^2)(1-k^2v^2)},$$

l, m, n étant des fonctions algébriques de x et d'une variable u fonction de x, qui vérifie soit une équation de Riccati

$$u' = Lu^2 + Mu + N,$$

soit une équation

$$u' = N\sqrt{(1-u^2)(1-xu^2)},$$

où L, M, N dépendent algébriquement de x.

M. Painlevé enseigne à reconnaître si l'intégrale d'une équation *donnée* est bien de cette nature. La méthode qu'il indique s'applique à toutes les équations, sauf à celles pour lesquelles le nombre des différentielles totales de première espèce, attachées à F, est égal à zéro.

L'auteur insiste sur la nature des surfaces F auxquelles sont applicables les considérations qui précèdent. Ces surfaces possèdent au moins une famille de génératrices unicursales ou de genre 1. Les coordonnées d'un de leurs points s'expriment en fonctions uniformes de deux paramètres. Enfin, elles admettent un faisceau continu de transformations biuniformes qui dépend d'au moins une fonction arbitraire. Ce faisceau conserve à la fois les intégrales doubles et les différentielles totales de première espèce. Il n'existe pas d'autres faisceaux de transformations biuniformes pour lesquelles une relation algébrique (et une seule) ait lieu entre les points correspondants.

Guldberg. — Sur certaines équations différentielles ordinaires. (614-616).

La détermination des systèmes d'équations différentielles qui possèdent *un* système fondamental d'intégrales premières se ramène, comme l'a montré récemment l'auteur, à celle des groupes continus p fois transitifs. On peut utiliser les recherches de M. Lie pour former un tableau complet de ces équations dans les cas de 1, 2, 3 variables. M. Guldberg présente actuellement quelques remarques sur l'intégration de ces systèmes, en se bornant, pour fixer les idées, au cas de $n = 1$.

Lelieuvre. — Sur certaines familles de cubiques gauches. (616-618).

M. Lelieuvre a indiqué précédemment une classification des ensembles GΓ dépendant d'un paramètre u et formée d'une cubique gauche G et de la développable Γ dont elle est l'arête, qui sont divisés homographiquement par leurs conjugués.

Il indique une méthode propre à déterminer ces ensembles.

Kœnigs. — Sur les équations aux fonctions mêlées et un problème de lignes géodésiques. (683-685).

Soient X, X_0, X_{00}, ... des fonctions inconnues de x; Y, Y_0, Y_{00}, ... de y; Z, Z_0, Z_{00}, ... de z; T, T_0, T_{00}, ... de t, les variables x, y, z, t étant liées par

deux équations linéaires à coefficients constants réels

$$ax + by + cz + dt + e = 0,$$
$$ax' + b'y + c'z + d't + e' = 0,$$

où aucun des déterminants tels que $ab' - ba'$ n'est nul.

Soit $f = 0$ une équation dont le premier membre est un polynome composé avec les fonctions X, X_0, ...; Y, Y_0, ...; Z, Z'_0, ...; T, T_0 et leurs dérivées jusqu'à un certain ordre.

Si l'on groupe ensemble les termes semblables formés de fonctions de la variable x seulement, on peut mettre f sous la forme

$$\Sigma \mathcal{A}_i \mathcal{X}_i = 0,$$

où les $\mathcal{X}_i$ sont composés de fonctions de x seulement, et les $\mathcal{A}_i$ sont des coefficients composés avec les autres fonctions Y, ..., Z, T, ...

Cela posé, voici le théorème énoncé par M. Kœnigs :

« Sauf pour certains cas où l'équation $f = 0$ se décompose en plusieurs autres, les quotients $\frac{\mathcal{X}_i}{\mathcal{X}_k}$ et les quotients analogues relatifs aux variables y, z, t sont des fonctions de leurs arguments uniformes dans tout le plan et dénuées de point essentiel à distance finie. »

Ce théorème sert à résoudre l'équation dont dépend le problème des éléments linéaires qui admettent pour leurs géodésiques plusieurs intégrales quadratiques.

Painlevé. — Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. (686-688).

Il existe des équations du second ordre

$$F(y'', y', y, x) = 0,$$

à points critiques fixes, dont les intégrales sont telles que les *deux* constantes arbitraires y figurent d'une manière transcendante de quelque façon qu'on les choisisse.

Le théorème suivant met hors de doute l'existence de pareilles équations qui n'est nullement certaine *a priori*.

Soit $\varphi(y, x)$ une fonction de y qui, pour x constant, n'admet pas de points transcendants et dont les déterminations s'obtiennent par une combinaison d'un nombre *fini* de lacets. Si la valeur φ_n, obtenue en parcourant n lacets, est telle que $\left|\frac{\varphi_n}{n}\right|$ reste inférieur à un nombre fixe A (si grand que soit n), l'équation

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, x)$$

a ses points transcendants fixes. (Il suit de là qu'on sait reconnaître si ses points critiques sont fixes.)

Telle est, par exemple, l'équation

$$y' = -\frac{\sqrt{R(y,x)}}{2}\int_{a(x)}^{y}\frac{y^2\,dx}{(1-xy^2)\sqrt{R(y,x)}}\qquad [R=(1-y^2)(1-xy^2)].$$

On peut chercher les équations du second ordre à points critiques fixes, dont chaque intégrale vérifie cette relation. On trouve qu'elles se ramènent à la forme

$$y'' - y'^2\frac{y(2xy^2-x-1)}{(1-y^2)(1-xy^2)} + y'\left[\frac{y^2-1}{(1-x)(1-xy^2)}+\frac{1}{x}\right] - \frac{y(1-y^2)}{4x(1-x)(1-xy^2)}$$
$$= A(x)\sqrt{(1-y^2)(1-xy^2)}.$$

L'intégrale de cette dernière équation est fonction transcendante des deux constantes de quelque manière qu'on les choisisse. Bien plus, cette équation ne se laisse ramener d'aucune manière à une combinaison d'équations du premier ordre. C'est le premier exemple d'équation à points critiques fixes ainsi irréductible.

En examinant le cas où l'équation ne serait pas, comme la précédente, résolue par rapport à y, M. Painlevé est conduit à d'importantes conclusions, entre autres à celle-ci.

Soit $P\,dy' + Q\,dy$ une différentielle totale de première espèce de F; si les points essentiels de $y(x)$ sont fixes (en même temps que les points critiques), la fonction $u = Py'' + Qy'$ a ses pôles fixes. En particulier, quand x ne figure pas dans F, $u(x)$ est holomorphe.

Pellet. — Sur les équations et les fonctions implicites. (719-722).

Si la fonction $F(y)$ holomorphe dans un cercle de rayon R s'annule pour n valeurs de y intérieures au cercle de rayon r_1 et n'admet aucune racine dans la couronne comprise entre les cercles de rayons r_1 et r_2 $(r_1 < r_2 < R)$, on a (Weierstrass), pour les valeurs de y dont le module est inférieur à r_2,

$$F(y) = Cf(y)e^{G(y)};$$

C est une constante, $f(y)$ un polynome entier de degré n en y, dont le premier coefficient est l'unité; $G(y)$ une fonction holomorphe de y dans le cercle de rayon r_2, s'annulant avec y.

M. Pellet montre comment cette fonction $G(y)$ peut être obtenue directement, par un calcul algébrique, lorsque, la fonction $F(y)$ étant

$$a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \ldots + a_n y^n + \ldots,$$

l'équation

$$0 = \alpha_0 + \alpha_1 y + \ldots + \alpha_{n-1} y^{n-1} + \alpha_n y^n + \ldots,$$

où α_i désigne le module de a_i, a une racine positive.

Blutel. — Sur les surfaces admettant des cubiques gauches pour lignes asymptotiques. (722).

Étudiant les surfaces S, dont les lignes asymptotiques d'un système sont des cubiques gauches, M. Blutel arrive aux résultats suivants :

1° Les cubiques asymptotiques ont quatre courbes enveloppes ; le plan osculateur d'une cubique est le même que celui de son enveloppe en chacun des points de contact;

2° Les lignes asymptotiques du second système partagent homographiquement les cubiques du premier. Parmi ces surfaces, il en existe dont les lignes asymptotiques des deux systèmes sont des cubiques gauches, de sorte que les asymptotiques d'un système quelconque partagent homographiquement les asymptotiques de l'autre;

3° Si l'on suppose la surface S rapportée à ses deux systèmes de lignes asymptotiques, les valeurs générales des quatre coordonnées homogènes d'un point de cette surface dépendent de six fonctions arbitraires; la recherche de ces valeurs n'exigent que des résolutions d'équations du 1er degré et des quadratures.

La première propriété s'étend aux surfaces ayant un système de lignes asymptotiques composé de courbes unicursales d'ordre supérieur à 3, à condition toutefois que ces courbes ne présentent ni rebroussement ni inflexion.

Guyou. — Sur le clapotis. (722-724).

A la théorie approchée de M. Boussinesq, M. Guyou substitue une théorie rigoureuse du clapotis.

Soient X, Y les coordonnées d'une molécule liquide au repos; x, y celles de la molécule en mouvement à un instant donné; R_0 le rayon arbitraire de la trochoïde superficielle; R celui qui correspond à la profondeur Y; z la distance des centres de la trochoïde de profondeur Y à celle de la trochoïde superficielle; L la longueur des ondes.

Les équations du mouvement sont

$$x = X + \sin R \frac{2\pi X}{L},$$

$$y = Y + R \cos \frac{2\pi X}{L} - \frac{\pi R^2}{L},$$

$$z = Y + \frac{\pi R^2}{L} - \frac{\pi R^2}{L},$$

$$R = R_0 e^{-\frac{2\pi z}{L}}.$$

Elles satisfont à la relation différentielle

$$\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} - \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X} = 1.$$

Cette condition étant vérifiée quel que soit R_0, on peut supposer ce paramètre variant avec le temps suivant une loi arbitraire; il reste à choisir cette loi telle que la condition de la surface libre soit vérifiée, c'est-à-dire que l'on ait pour $Y = 0$ et $R = R_0$

$$\frac{\partial x}{\partial X}\frac{d^2 x}{dt^2} - \left(g - \frac{d^2 y}{dt^2}\right)\frac{\partial y}{\partial X} = 0.$$

En posant $R_0 = a \cos\varphi$, on obtient, par une intégration facile,

$$d\varphi \sqrt{1 + \frac{4\pi^2}{L^2} a^2 \cos^2\varphi} = \sqrt{\frac{2\pi}{L}}\, g\, dt.$$

Le problème se résout donc par les fonctions elliptiques.

Caronnet. — Sur les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont planes et égales. (842-844).

Quelles sont les courbes (C) qui, par des déplacements convenables, sont susceptibles de constituer l'une des familles de lignes de courbure des surfaces qu'elles engendrent?

M. Caronnet résout ce problème général dans divers cas étendus. En dehors des surfaces de Monge, engendrées par une ligne plane dont le plan roule sans glisser sur une développable quelconque, l'auteur signale les cas suivants :

1° La courbe (C) est une trajectoire (T) sous un angle constant de cercles dont les centres décrivent une droite (D);

2° La courbe (C) est une développante de cercle, dont le plan se déplace en restant parallèle à un plan fixe. Les surfaces correspondantes sont des moulures dont le noyau est un cylindre de révolution;

3° Les courbes (C) sont définies comme il suit : les distances de tout point M de (C) à une droite (D) et au point correspondant de sa podaire par rapport à un point (O), non situé sur (D), sont dans un rapport constant. La détermination des surfaces correspondantes dépend de l'intégration d'une équation de Riccati.

Hadamard. — Sur les caractères de convergence des séries. (844-845).

Il est impossible de former une suite infinie de fonctions $\varphi_p(n)$ de plus en plus lentement croissantes, de manière qu'une série Σu_n soit nécessairement divergente si le produit $u_n \varphi_n(n)$ augmente indéfiniment avec n, quel que soit p, et nécessairement convergente si, à partir d'une certaine valeur de p, ce produit reste fini.

De même, il est impossible de trouver une suite infinie de fonctions $\varphi_p(n)$ telles que la série Σu_n soit nécessairement convergente si le produit $u_n \varphi(n)$ tend vers o pour $n = \infty$, quel que soit p, et nécessairement divergente si, à partir d'une certaine valeur de p, ce produit reste supérieur à un nombre indépendant de n.

Enfin, étant donnée une suite infinie de fonctions $\varphi_1(n)$, $\varphi_2(n)$, ..., $\varphi_p(n)$, ..., toutes infinies avec n, on peut toujours former une série convergente Σu_n, telle que les séries $\Sigma u_n \varphi_p(n)$ soient toutes divergentes, et aussi une série divergente Σv_n, telle que toutes les séries $\sum \frac{\varphi_p(n)}{v_n}$ soient convergentes.

Poincaré. — Sur la propagation de l'électricité. (1027-1032).

Les variations du potentiel dans un fil qui transmet une vibration électrique

sont représentées par l'équation

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\beta\frac{\partial V}{\partial t} = C\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},$$

où A, B, C sont des constantes. Cette équation, dite *des télégraphistes*, peut, si l'on choisit convenablement les unités, être réduite à la forme

$$(2)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2};$$

l'unité de vitesse est alors la vitesse de la lumière. Si l'on pose $V = Ue^{-t}$, et qu'on se donne les conditions initiales, à savoir que, pour $t = 0$, U et $\frac{\partial U}{\partial t}$ se réduisent à des fonctions données $f(x)$ et $f_1(x)$, on peut mettre ces deux fonctions sous la forme d'intégrales de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(q)e^{iqx}\,dq,$$

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_1(q)e^{iqx}\,dq,$$

et alors la solution est donnée par la formule

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iqx}\left[\theta\cos t\sqrt{q^2-1} + \theta_1\frac{\sin t\sqrt{q^2-1}}{\sqrt{q^2-1}}\right]dq.$$

Discutant cette solution dans le cas où $f(x)$ et $f_1(x)$ n'ont de valeurs sensibles qu'entre $x = a$ et $x = b$, M. Poincaré parvient aux conclusions suivantes :

La tête de la perturbation se propage avec une certaine vitesse, de telle sorte que, en avant de cette tête, la perturbation est nulle, contrairement à ce qui se passe pour la conduction calorifique et conformément aux lois de propagation de la lumière et du son. Mais il y a, avec ce dernier cas, une différence importante, car la perturbation laisse derrière elle un résidu, U ne s'annulant pas pour $b + t > x > a - t$.

Si $a - b$ est très petit, c'est-à-dire si la perturbation est de très courte durée, on a sensiblement

$$U = \frac{1}{2}f(x-t) \quad\text{pour}\quad a + t > x > b + t,$$

$$U = \frac{1}{2}f(x+t) \quad\text{pour}\quad a + t > x > b - t,$$

$$U = 0 \text{ dans tous les autres cas.}$$

Le résidu est donc négligeable par rapport à la perturbation principale, mais il n'en est plus de même si la perturbation est de longue durée et si $a - b$ est fini.

Godefroy. — Sur les rayons de courbure successifs de certaines courbes. (1062).

Si l'expression du rayon de courbure est connue sous la forme d'une fonction $R_1 = F(U, V)$ des distances d'un point fixe à la tangente et à la normale, on a ce théorème :

« Les rayons de courbure successifs de la courbe s'expriment en fonction de U et de V. Un rayon de courbure quelconque est représenté par la différentielle totale de l'expression du précédent, dans laquelle on remplace respectivement dU, dV par V et $F(U, V) - U$. »

L'auteur fait diverses applications de ce théorème, notamment à la parabole pour laquelle on aperçoit une loi de formation régulière des polynomes représentant les rayons de courbure successifs.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam (3e série). In-8 (¹).

Tome VII; 1899.

Grinwis (*C.-H.-C.*). — Sur deux formes d'énergie dans le mouvement de roulement. (47-63).

De Vries (*J.*). — Sur un groupe de configurations planes régulières et quelques configurations planes connexes de points et de courbes. (75-96).

La figure plane formée de 3 couples de points situés sur 3 droites concourantes détermine 4 couples de triangles perspectifs qui mènent à 12 points nouveaux, les points d'intersection des côtés homologues, et 16 droites nouvelles, les 12 côtés des triangles et les 4 axes d'homologie; ces éléments nouveaux constituent une $cf(12_4, 16_3)A$. De la même manière, $n-1$ couples de points sur $n-1$ droites concourantes donnent lieu à une $cf[n(n-1)_{2n-4}, \frac{2}{3}n(n-1)(n-2)_3]$, désignée par le signe σ_n. Elle possède $8\binom{n}{4}$ points diagonaux triples et n points diagonaux de l'ordre $n-1$; ces derniers sont les centres de n cercles dont le rapport des rayons, les centres de similitude et les axes de similitude entrent dans la configuration. Détermination de σ_n par des constellations. Toute σ_n contient $(2n-5)\binom{n}{3}$ quadrilatères complets; chaque point de σ_n entre dans $(2n-5)(n-2)$ de ces quadrilatères, chaque droite de σ_n fait partie de $2n-5$ d'entre eux; les σ_{n-2} comprises dans une σ_n comme figures résiduelles de 2 points. Si d'une σ_{np} on enlève les éléments de p $cf\sigma_n$, n'ayant prises deux à deux aucun nombre commun

---

(¹) Voir *Bulletin*, XIV$_2$, p. 179.

dans leur notation, il reste une cf $\left[2n^2\binom{p}{2}_{2n(p-2)}, 4n^2\binom{p}{3}_2\right]$. Les points de τ_4 forment avec les cubiques à 2 branches déterminées par les σ_4 compris dans σ_n une cf $\left[n(n-1)_{\binom{n-2}{2}}, \binom{n}{1}_n\right]$, ...

On trouve une traduction française de ce Mémoire dans les *Archives Néerl.*, t. XXV, p. 33-56.

Kluyver (*J.-C.*). — Nombres caractéristiques des courbes gauches algébriques. (121-164).

Application de la Géométrie énumérative de M. H. Schubert aux courbes gauches R^m d'ordre m quelconque. Explication de la notation de Schubert. Détermination du nombre λ des tangentes de la courbe qui la rencontrent en un autre point, du nombre τ des points d'intersection de 3 tangentes non consécutives et des nombres corrélatifs, en fonction de l'ordre m et du genre D de la courbe, supposée de ne pas posséder des particularités d'un ordre supérieur. Les résultats de cette Partie introductrice du travail s'accordent avec les résultats connus de M. Cremona (1870).

La surface des cordes triples de R^m. Ordre μ de la surface et degré δ de multiplicité de R^m sur elle. Cette surface F^μ contient deux espèces de génératrices particulières, les arêtes qui rencontrent les génératrices infiniment voisines et les génératrices qui passent par 4 points de R_m. Dans la recherche du nombre de ces dernières génératrices quadruples de la surface F^μ, l'auteur retrouve, d'une manière caractéristique, le nombre des droites situées sur une surface cubique.

Ensuite, la détermination de l'ordre m' de la courbe double de F^μ exige la connaissance du genre de F^μ. Ce nombre résulte d'une relation entre les genres de deux espaces en relation géométrique, trouvée par M. Zeuthen. D'abord, le genre de F^μ fait connaître le nombre des points doubles d'une section plane qui à son tour mène au degré m' de la courbe double. Cette courbe possède 4 groupes différents de points remarquables. Si l'on exclut le cas $m = 5$, R^m ne contient pas de point double ordinaire, toujours des points triples et des points quadruples. Avant de déduire le nombre de ces points triples qui, d'après une vérification simple, monte à 740 quand R^m est l'intersection totale de deux surfaces cubiques, l'auteur est obligé de rechercher la classe de trois surfaces développables circonscrites à F^μ. Surtout la déduction de la classe de la développable doublement circonscrite à F^μ le long de $R^{m'}$ fait ressortir l'utilité de la méthode de Schubert.

Enfin, l'auteur contrôle ses résultats par l'étude indépendante des quatre courbes gauches R^4 non situées sur une quadrique.

De Vries (*J.*). — Nouvelles propriétés de la configuration harmonique $(24_3, 18_4)$. (177-191).

La configuration harmonique $(24_3, 18_4)$ est inscrite dans une courbe quartique. Cette courbe comprend encore les 16 points d'intersection des couples de droites associées. Les points et les droites des deux σ_4 qui déterminent la configuration harmonique forment avec leurs points et droites complémen-

taires une configuration 40_4, inscrite dans une quartique. La 40_4 appartenant à la configuration harmonique peut, de huit manières différentes, être composée de deux configurations (40_2, 20_4) de construction différente; elle contient encore seize configurations (24_2, 12_4). Les points de la configuration 40_4 donnent lieu à 36 coniques, dont chacune contient 4 points de la configuration harmonique et 4 points complémentaires. Il y a 800 cubiques passant chacune par 12 points de la configuration 40_4. Les 48 points accessoires d'une σ_4 forment 12 quadruples linéaires; ils font partie d'une configuration combinatoire (56_3, 28_6). Les 16 droites de σ_4 forment 16 sextuples tangentes à une conique; les 48 points accessoires se rangent en 16 sextuples coniques; elles font partie d'une configuration combinatoire (84_3, 36_7). Les 72 points de la configuration harmonique forment 6 groupes de points conconiques.

On trouve une traduction française de ce travail dans les *Arch. Néerl.*, t. XXV, p. 57-69, sous le titre : *Sur une configuration plane de 24 points et de 18 droites.*

Baehr (*G.-F.-W.*). — Sur les points d'inflexion de l'herpolhodie de Poinsot. (328-360).

Après que M. de Sparre eut démontré, en se basant sur la théorie des intégrales elliptiques, que l'herpolhodie ne présente ni points d'inflexion, ni points de rebroussement, plusieurs auteurs ont repris la question géométriquement. Dans le présent Mémoire, M. Baehr tâche de prouver le théorème sans sortir du domaine de la Géométrie analytique.

Ce Mémoire est inséré, en même temps, dans les *Annales de Delft*, t. VI, p. 27-50.

De Vries (*J.*). — Polygones cycliques sur des cubiques planes. (430-461).

Dans ce Mémoire, l'auteur considère trois espèces de polygones inscrits à une cubique donnée. Les polygones de première espèce sont à la fois inscrits et circonscrits. Dans les polygones de seconde espèce le point tangentiel du sommet A_i se trouve sur la droite $A_{i+1}A_{i+2}$. Dans les polygones de troisième espèce le point tangentiel d'un sommet se trouve sur le côté opposé.

L'auteur se sert de la relation $\Sigma u \equiv 0 \pmod{\omega, \omega'}$ entre les $3n$ points d'intersection de la cubique donnée et d'une courbe quelconque d'ordre n.

Traduction française du Mémoire *Arch. Néerl.*, t. XXV, p. 1-32.

Tome VIII; 1891.

Kluyver (*J.-C.*). — Sur des systèmes de rayons déduits de 4 droites données dans l'espace. (41-71).

Dans les *Math. Ann.* (t. XIII, p. 168) M. A. Voss a démontré l'existence d'une relation identique entre les coordonnées de droites de 4 tangentes d'une cubique gauche R^3, de manière que le problème de construire une R^3 qui touche 4 droites données est impossible ou indéterminé.

L'auteur donne d'abord une nouvelle déduction de la relation de M. Voss. Il démontre que 4 droites données 1, 2, 3, 4 touchent une infinité de cubiques gauches, si les 4 hyperboloïdes (2, 3, 4), (3, 4, 1), (4, 1, 2), (1, 2, 3) admettent une tangente commune z. A cette fin les racines carrées des quantités (1, z), (2, z), (3, z), (4, z), où $(p, q) \equiv p_1 q_4 + p_2 q_5 + p_3 q_6 + p_4 q_1 + p_5 q_2 + p_6 q_3$ doivent satisfaire à 4 équations linéaires homogènes déterminées. L'élimination des 4 racines donne la relation $\Gamma = 0$ de M. Voss en forme de déterminant. Sous la condition $\Gamma = 0$ les 4 racines en question sont proportionnelles aux mineurs premiers de ce déterminant. Dans ce cas, on a donc identiquement

$$\frac{(1z)}{\sqrt{(12)(13)(14)}} = \frac{(2z)}{\sqrt{(21)(23)(24)}} = \frac{(3z)}{\sqrt{(31)(32)(34)}} = \frac{(4z)}{\sqrt{(41)(42)(43)}};$$

dans le cas général $\Gamma \neq 0$ ces équations déterminent un lieu de droites z. Eu égard au signe double des racines, ce lieu se compose de 12 complexes linéaires, qui se pénètrent trois à trois suivant 16 congruences de premier ordre et de première classe et six à six suivant 12 hyperboloïdes. Cette figure à trois dimensions montre une analogie frappante avec celle des 12 plans bissecteurs des angles dièdres sur les arêtes d'un tétraèdre, leurs 16 droites d'intersection trois à trois et leurs 12 points d'intersection six à six, les sommets et les centres des sphères qui touchent les 4 faces. Parmi les 12 hyperboloïdes les surfaces (234), (341), (412), (123) correspondent aux 4 sommets; les 8 autres se divisent en 2 groupes de caractère différent, les surfaces réglées H_1, H_2, H_3, H_4 qui correspondent aux centres des sphères ex-inscrites et les surfaces réglées H_5, H_6, H_7, H_8 qui correspondent aux centres des autres sphères tangentes.

Après l'étude détaillée des 2 groupes de 4 hyperboloïdes qui font trouver 3 systèmes focaux et 1 groupe de surfaces F^4, l'auteur revient au cas $\Gamma = 0$. Il prouve que le rapport anharmonique des 4 points de contact a la même valeur λ pour l'infinité des courbes tangentes R^3 et que l'on a $\lambda^4 = \lambda'\lambda''$, où λ' et λ'' sont les rapports anharmoniques des points d'intersection de 1, 2, 3, 4 avec les 2 sécantes communes, situées sur les 12 hyperboloïdes.

Traduction française *Arch. Néerl.*, t. XXV, p. 70-100.

Cardinaal (*J.*). — Construction des surfaces quartiques à conique double à l'aide de faisceaux projectifs de surfaces quadratiques. (88-146).

L'auteur a mis en rapport l'une avec l'autre deux générations différentes de la surface quartique à conique double. La première, indiquée dans le titre du Mémoire, a été énoncée par M. C. Segre (*Math. Ann.*, t. XXIV, p. 313); la seconde, énoncée par M. Th. Reye, se base sur la correspondance quadratique entre deux espaces de trois dimensions. M. Segre remarque qu'il est étrange qu'on n'ait pas encore pensé à déduire de la première génération une théorie synthétique complète de ces surfaces. Dans le présent Mémoire, l'auteur comble cette lacune et il y réussit à l'aide du rapport entre la génération de Segre et celle de Reye. Dans la correspondance entre les deux espaces Σ et Σ' aux points, aux droites, aux plans et aux quadriques F^2 de Σ correspondent successivement des couples de points, des coniques, des quadriques F'^2 passant par une conique déterminée d'^2 et des surfaces quartiques à conique double d^2 de Σ'. Ainsi à la génération d'une quadrique O^2 en Σ à l'aide de deux faisceaux

projectifs de plans correspond en Σ' la génération d'une surface quartique O^4 à conique double; de sorte que la surface O^2 forme l'image de la surface O^4 et que les types divers de surfaces O^2 font connaître les types de surfaces O^4. Dans cette classification, l'auteur fixe l'attention sur trois circonstances différentes, le caractère de l'image O^2, le caractère de la quadrique K^2 qui est le lieu des cônes du système triplement infini de quadriques de Σ' correspondant aux plans de Σ et à la position des quadriques O^2 et K^2 l'une par rapport à l'autre.

'e *Boer* (*F.*). — Application de la méthode de Darboux à l'équation différentielle $s=f(r, t)$. (221-286).

Exposé de la méthode. Littérature. Cas particuliers capables de transformations simples qui mènent à des solutions évidentes. Recherches directes par rapport au cas général à l'aide du criterium de Jacobi, etc.

Traduction française *Arch. Néerl.*, t. XXVII, p. 355-412.

***orentz* (*H.-A.*). — La théorie de Maxwell sur le mouvement de l'électricité. (323-327).**

***'luyver* (*J.-C.*). — Sur les tangentes d'inflexion de la biquadratique gauche. (346-380).**

Les 16 points d'inflexion d'une biquadratique gauche R_1^4 se trouvent quatre à quatre dans les faces du tétraèdre autopolaire des surfaces quadratiques passant par la courbe; les tangentes d'inflexion passent toujours par les sommets opposés à ces faces. Ainsi l'on ne trouve 4 tangentes d'inflexion qui ne se rencontrent pas qu'en prenant un des 16 points de chacune des quatre faces, ce qui est possible de 256 manières différentes. Si l'on représente les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 des points de R_1^4 prises par rapport au tétraèdre autopolaire à l'aide des fonctions $p(u)$ de Weierstrass par les formules

$$\frac{x_1}{p''(u)} = \frac{x_2}{p'(u)} = \frac{x_3}{p(u)} = \frac{x_4}{1},$$

ces 256 combinaisons se rangent en quatre groupes de 64 combinaisons caractérisées par les relations

$$u_1+u_2+u_3+u_4=0, \quad u_2+u_3=u_1+u_4, \quad u_3+u_1=u_2+u_4, \quad u_1+u_2=u_3+u_4.$$

La première relation fait connaître 4 points complanaires; ce cas symétrique est étudié en détail. Dans ce cas les coordonnées de droites des 4 tangentes d'inflexion 1, 2, 3, 4 satisfont à la relation identique

$$(23)(14)+(31)(24)+(12)(34)=0,$$

de manière que le problème de la construction d'une R_1^4 tangente à 4 droites données est impossible ou indéterminé. Ensuite l'auteur s'occupe de la notion d'invariant absolu des R_1^4. Enfin, le cas asymétrique $u_2+u_3=u_1+u_4$ est caractérisé par la relation $(-a+b+c)^4=64a^2bc$ où $a=(23)(14)$, $b=(31)(24)$, $c=(12)(34)$.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur les points de plissement. (385-386).

Transformation d'un point de plissement et de ses courbes spinodale et connodale adjointes à travers un point conique de la surface.

Van der Waals (*J.-D.*). — La valeur de la pression pour des phases coexistantes de mélanges, notamment de solutions salines. (409-459).

Traduction française *Arch. Néerl.*, t. XXVI, p. 91-125.

Tome IX; 1892.

Bierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Mathématiques dans les Pays-Bas. (4-47).

N° 37. Essai d'une bibliographie de l'histoire des Sciences mathématiques et physiques (466 numéros). Table des biographies y comprises.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la résolution approchée des équations d'après Newton. (53-67).

Exposé analytique et géométrique de la méthode. Amélioration de la méthode à l'aide d'une formule où entrent trois points voisins du point d'intersection cherchée de la courbe $y = f(x)$ avec l'axe des abscisses.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur des coniques qui ont un contact du quatrième ordre avec une courbe plane. (85-103).

Les coordonnées du centre $C(\alpha, \beta)$ de la conique qui a au point $A(x, y)$ un contact du quatrième ordre avec la courbe $y = f(x)$ sont

$$\alpha = x + \frac{3qr}{5r^2 - 3qs}, \qquad \beta = f(x) - \frac{3q(3q^2 - pr)}{5r^2 - 3qs},$$

où p, q, r, s ont la signification ordinaire. La droite AC est tangente en C au lieu de C (courbe de déviation). L'équation de ce lieu s'obtient par l'élimination de x entre les deux relations données. Exemple : la courbe de déviation d'une spirale logarithmique est encore une spirale logarithmique; le problème réciproque : « trouver la famille des courbes $y = f(x)$ qui possèdent une courbe de déviation donnée. »

Enfin, l'auteur considère la série des coniques osculatrices pour lesquelles les lieux des foyers sont enveloppés par les droites qui joignent les foyers de la conique au point correspondant de la courbe donnée.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur le calcul de systèmes centrés de lentilles. (125-130).

Grinwis (*C.-H.-C.*). — L'énergie kinétique du mouvement central. (211-225).

Décomposition de la vitesse du mouvement des comètes et des planètes en deux composantes perpendiculaires l'une à l'autre, l'une desquelles est dirigée vers le centre d'attraction. Étude des énergies kinétiques dépendant de ces composantes, etc.

Schoute (*P.-H.*). — Un problème de la *Geometria situs*. (226-230).

Il s'agit du problème de M. Lemoine sur la bande de timbres-poste.

Sirks (*J.-L.*). — De l'influence de la diffraction par un réseau à mailles rectangulaires, placé devant l'objectif d'une lunette, sur la clarté de l'image principale d'une étoile. (307-328, 1 pl.).

Speckman (*H.-A.-W.*). — La méthode de M. Darboux pour l'intégration des équations aux dérivées partielles, non linéaires, du second ordre. (441-497).

Ce travail se compose de deux parties distinctes. Comme on sait, la méthode nouvelle d'intégration exige la recherche d'intégrales communes de deux équations simultanées, l'une desquelles est du second ordre en p. Tandis que la seconde Partie du présent Mémoire s'occupe du cas particulier où cette équation caractéristique a des racines égales, la première Partie est consacrée à l'étude des équations simultanées. Dans cette première Partie, l'auteur fait connaître les deux méthodes de Darboux, le rapport intime entre eux et les méthodes plus spéciales de MM. Falk, Picart, Hamburger, Winckler, König, Sersawy. Dans la seconde Partie, il démontre que les équations auxiliaires admettent le nombre maximum cinq d'intégrales communes dans le cas où les racines de l'équation caractéristique sont égales. Il fait connaître les cinq intégrales communes et applique la théorie aux cinq cas particuliers

$$f(r, s, t) = 0, \quad f(x, r, s, t) = 0, \quad f(y, r, s, t) = 0,$$
$$f(z, r, s, t) = 0, \quad f(q, r, s, t) = 0.$$

Ensuite, il s'occupe d'une classe d'équations du second ordre et du second degré, faisant partie des équations de Poisson. L'étude des équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre lui fait trouver le théorème que l'intégration de ces équations et de l'équation d'Ampère dépend du même système d'équations de condition, soit qu'on parte du système de Monge, soit qu'on se serve du système de Darboux. Enfin, par des opérations inverses, l'auteur déduit de nouvelles relations différentielles.

Traduction française *Arch. Néerl.*, t. XXVII, p. 303-354.

VERSLAG DER ZITTINGEN VAN DE WIS-EN NATUURKUNDIGE AFDEELING DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam. In-4° (1).

Tome I; juin 1892-mai 1893.

Lorentz (*H.-A.*). — Sur la réflexion de la lumière par les corps en mouvement. (28-31).

Schoute (*P.-H.*). — Sur une relation générale dans la théorie des courbes planes. (53-58 et 62-67).

Si $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ représente l'ellipse E et que $f(x,y)$ forme l'expression homogène des termes du $n^{\text{ième}}$ ordre de l'équation d'une courbe C^n par rapport aux mêmes axes, les anomalies excentriques d_k des points d'intersection $S_k(k=1,2,\ldots,2n)$ de E et de C^n ont une somme A déterminée par la relation $e^{iA}=\frac{f(a,ib)}{f(a,-ib)}$. Cas particuliers. Rapport entre ces résultats et ceux de Laguerre.

Lorentz (*H.-A.*). — Le mouvement relatif de la Terre et de l'éther. (74-79).

Lorentz (*H.-A.*). — La théorie de Stokes sur l'aberration. (97-104).

Schoute (*P.-H.*). — Recherche de la position des 27 droites d'une surface cubique les unes par rapport aux autres à l'aide de la représentation sur un plan. (143-144).

Indication de la correspondance (1, 1) entre les points situés dans des directions différentes autour d'un point principal du plan à distances infiniment petites et les points de la droite homologue de la surface cubique.

Lorentz (*H.-A.*). — L'influence du mouvement de la Terre sur la propagation de la lumière dans les corps biréfringents. (149-154).

Van der Waals (*J.-D.*). — Théorie thermodynamique de la capillarité. (158-160).

(1) Ce Recueil va remplacer dorénavant les *Verslagen en Mededeelingen*.

Schols (*Ch.-M.*). — La loi des erreurs d'observation. (194-202).

L'auteur s'occupe de la probabilité $\frac{e^{-\frac{x^2}{2M^2}}}{M\sqrt{2\pi}}dx\left(1+\frac{K_3\psi_3}{3!}+\frac{K_4\psi_4}{4!}+\frac{K_5\psi_5}{5!}+\ldots\right)$ qu'une erreur se trouve entre les limites x et $x+dx$, où ψ_n représente un polynome d'ordre n en $\frac{x}{M}$ et K_n une constante. Dans le cas des erreurs symétriques K_{2n+1} disparaît et l'on trouve $K_4=\frac{\Sigma k_4-3\Sigma k_2^2}{(\Sigma k_2)^2}$, où k_2 et k_4 indiquent les valeurs moyennes des secondes et des quatrièmes puissances des erreurs; si s est le nombre de ces erreurs, on a donc $K_4=\frac{1}{5}\left(\frac{k_4}{k_2^2}-3\right)$. L'application de ce résultat à quatre séries d'observations astronomiques de Bessel fait connaître des différences petites très marquées entre les valeurs théoriques et les valeurs observées; de plus, l'étude d'une série d'observations géodésiques du général italien Ferrero mène aux mêmes résultats. L'auteur cherche à expliquer ces différences caractéristiques à l'aide de deux influences, dont l'une, la combinaison d'observations d'exactitude inégale, tend à donner à K_4 une valeur positive, tandis que les fautes élémentaires elles-mêmes ont ordinairement l'effet opposé. Enfin, l'auteur indique comment des observations d'exactitude inégale doivent être combinées.

Tome II; mai 1893-mai 1894.

Schoute (*P.-H.*). — Trois modèles de surfaces développables en rapport avec des équations algébriques. (8-12, 44).

Il s'agit des surfaces discriminantes des équations $u^3+3xu^2+3yu+z=0$, $u^4+6xu^2+4yu+z=0$, $u^6-15u^4+15xu^2+6yu+z=0$. La dernière divise l'espace en quatre parties (à 6, 4, 2, 0 racines réelles). Sections de cette surface par les plans $x=$ const.

Van der Waals (*J.-D.*). — La loi de l'attraction moléculaire. (20-21).

Korteweg (*D.-J.*). — Communication sur les formes fondamentales des courbes de la troisième classe. (60-64, 81, 1 pl.).

Division en courbes à une branche et courbes à deux branches. Subdivision des courbes du premier groupe en courbes qui admettent et qui n'admettent pas des sécantes à six points d'intersection imaginaires. Représentation graphique de cette classification.

Van de Sande Bakhuyzen (*H.-G.*). — Sur la variation de la latitude. (132-138).

Meerburg (*J.-H.*). — Contribution à la connaissance de la polarisation électrolytique. (152-156).

Résumé de la thèse du même titre. Étude de la loi

$$i = \mathrm{A}\varphi'(t) + \mathrm{B}t^{-\frac{1}{2}}\left\{\varphi(t) - \int_1^\infty \left[\varphi\left(t - \frac{t}{x^2}\right) - \varphi(t)\right]dx\right\},$$

entre l'intensité i du courant et le temps t, où $\varphi(t)$ représente la densité de l'hydrogène sur l'électrode.

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam. In-4°.

Tome XVIII; 1879.

Bierens de Haan (D.). — **Sur la déduction d'équations différentielles d'une équation intégrale donnée. (37).**

L'auteur s'occupe d'équations intégrales de la forme

$$(x + ay + b)^p(x + a_1y + b_1)^q = \mathrm{P}.$$

Lorentz (H.-A.). — **Sur la relation entre la vitesse de propagation de la lumière et la densité et la composition des milieux. (112).**

L'auteur donne un résumé de la théorie de Maxwell; ensuite il étudie le mouvement de la lumière dans un milieu isotrope à structure moléculaire. Cette étude mène à des formules qui lient la vitesse de propagation à la densité et la composition du milieu. Ces formules admettent une vérification expérimentale à l'aide de la détermination des indices de réfraction. Dans ces recherches l'auteur fait attention à la dispersion de la lumière.

Bierens de Haan (D.). — Sur la différentiation de quelques intégrales elliptiques suivant le module ou une fonction du module. (33).

Tome XX; 1880.

Korteweg (D.-J.). — Théorie générale des forces pondéromotrices (56).

Les hypothèses dont on se sert dans l'explication de la loi qui forme la base de la théorie électrodynamique d'Ampère ont été données par C. Neumann (*Math. Ann.*, t. XI, p. 313). Trois de ces quatre hypothèses entrent dans toutes les théories électrodynamiques plus récentes. Seulement la quatrième, d'après laquelle il n'y a pas de forces pondéromotrices en dehors de la droite

qui joint deux éléments de courant et non plus des couples directeurs, a été remplacée plus d'une fois par d'autres hypothèses : d'abord par Grassmann, puis par von Helmholtz. D'après l'hypothèse de Grassmann, les forces pondéromotrices sont perpendiculaires aux éléments de courant; d'après celle de Helmholtz, les forces et les couples directeurs admettent un potentiel. Chacune de ces quatrièmes hypothèses mène à une théorie électrodynamique, et ces théories sont d'accord pour les courants fermés et en discordance par rapport aux courants ouverts. Chacune des trois a ses adhérents. L'auteur développe une théorie plus générale qui comprend les théories anciennes comme des cas particuliers en rejetant et ne déplaçant pas la quatrième hypothèse. Sommaire : Forces et couples en action entre deux éléments de courant. Les quatre positions fondamentales. Les milieux des deux éléments se trouvent sur un même axe de coordonnées. Décomposition des forces et des couples. Un des éléments est placé à l'origine et dirigé suivant l'axe des x. Élément de position arbitraire. Action d'un courant élémentaire fermé, placé à l'origine, sur un élément quelconque et sur un courant fermé quelconque. Les deux conditions de concordance avec la théorie d'Ampère pour des courants fermés. Action d'un courant fermé sur un élément incomplet. Résumé. Les hypothèses d'Ampère, de Grassmann, de Stéfan. La théorie générale des potentiels. Actions de forces d'après la théorie des potentiels de Helmholtz. Théorie de Wand. Les théories électrodynamiques de Weber et de Clausius. L'influence de la polarisation diélectrique. Action momentanée d'une décharge statique.

Van der Waals (*J.-D.*). — Remarques sur le Mémoire précédent. (12).

L'auteur remarque qu'il est possible de remplacer dans les calculs de M. Korteweg les éléments de courants et les courants élémentaires fermés par des courants de dimensions finies sans que les formules deviennent plus compliquées.

Van der Waals (*J.-D.*). — Recherches sur les propriétés correspondantes des courbes de vapeur normale et de fluide pour des matières diverses et sur une modification de ces courbes dans le cas de mélanges. (32).

Van der Waals (*J.-D.*). — Sur les coefficients de dilatation et de compression de divers fluides en des circonstances correspondantes. (11).

Tome XXI; 1881.

Kamerlingh Onnes (*H.*). — Théorie générale des fluides. (24-149).

L'auteur se base sur l'hypothèse que les molécules des fluides sont des corps semblables, élastiques, à dimensions presque inaltérables, qui s'attirent les uns

les autres avec des forces qui se réduisent à une pression à la surface, proportionnelle au carré de la vitesse. De plus, il accepte le théorème de la Théorie mécanique de la chaleur d'après lequel la force vive du mouvement progressif mesure la température. Sommaire : L'équation des isothermes. Forme générale des isothermes. La température, le volume et la pression critiques d'après l'équation des isothermes. Déduction de la loi générale des fluides de Van der Waals. La similitude des isothermes, expression immédiate de la similitude du mouvement. Théorie kinétique des pressions de la vapeur. Loi des pressions correspondantes de la vapeur. Déduction de cette loi. Extension du théorème que la similitude du mouvement des molécules entraîne celle des surfaces thermodynamiques.

Van der Waals (*J.-D.*). — Remarques sur la loi des circonstances correspondantes. (10).

Bierens de Haan (*D.*). — Réduction de quelques intégrales où entre le radical $\sqrt{1+p\sin^2 x\cos^2 x}$ à des intégrales elliptiques et à d'autres intégrales. (50).

Tome XXII; 1883.

Bierens de Haan (*D.*). — Appendice à la Table des intégrales indéfinies. (225).

Formules générales de réduction pour des intégrales de la forme $\int\varphi(x)\Delta\,dx$, $\int\varphi(x)\frac{1}{\Delta}\,dx$ où $\Delta=\sqrt{1-k^2\sin^2 x}$. Chapitre I. Intégrales qui contiennent Δ et des fonctions goniométriques. Chapitre II. Intégrales qui contiennent, en outre, l'intégrale elliptique F de première espèce. Chapitre III. Intégrales qui contiennent, en outre, l'intégrale elliptique E de seconde espèce. Chapitre IV. Intégrales qui contiennent des fonctions goniométriques et des produits ou des puissances d'intégrales elliptiques. En tout 108 Tables nouvelles.

Tome XXIV; 1886.

Kam (*N.-M.*). — Catalogue d'étoiles, dont les lieux ont été déterminés par des observations indépendantes dans le méridien, publiées dans les *Astronomische Nachrichten*, t. I-LXVI, réduites à 1855,0. (384).

Julius (*V.-A.*). — Contribution à la théorie des phénomènes capillaires. (63).

L'étude des Mémoires classiques de Laplace, Gauss et Poisson a inspiré l'auteur à étendre la théorie de Laplace-Gauss à l'hypothèse de la couche limi-

tante à densité variable. Cette extension, dont on trouve des indications un peu vagues chez Bertrand et Bede, pouvait être atteinte par deux voies différentes, celle de Laplace et celle de Gauss. La base unique de la théorie de Laplace, c'est l'hypothèse que l'action de deux particules ne se manifeste que dans le cas de distances excessivement petites. Il parvient à l'équation différentielle du problème; seulement, les conditions des limites de la surface sont incomplètes. A cet inconvénient Gauss a porté remède. Par l'application du principe des déplacements virtuels, il trouva que la somme de trois intégrales déterminées est maximum dans la position d'équilibre. Après une transformation de ces intégrales, le calcul des variations fit trouver deux conditions d'équilibre; l'une de ces conditions détermina la forme de la surface, l'autre fut de rigueur pour les limites de la surface. L'auteur étend cette méthode de Gauss. Ses résultats ne s'accordent pas d'abord avec un théorème de Lord Rayleigh, qui veut que la limitation brusque des deux milieux en contact est *conditio sine qua non* par rapport aux phénomènes capillaires. Car, dans le cas d'un liquide en présence de sa vapeur, la tension superficielle est très petite dans l'hypothèse de Lord Rayleigh, tandis que l'auteur trouve des valeurs assez grandes. Cette déviation s'explique par la remarque que la théorie de Lord Rayleigh est basée sur les considérations de Laplace, tandis que l'auteur continue la théorie de Gauss. Ainsi l'hypothèse que l'épaisseur de la couche de passage est un infiniment petit de même ordre que le rayon des sphères d'action réconcilie les résultats. A la fin du Mémoire, l'auteur pose la question si l'introduction de la densité variable de la couche de passage a quelque influence sur la valeur des quantités N, N' qui figurent dans la théorie de Van der Waals sur la continuité des états gazeux et liquide; la réponse est négative.

Kapteyn (*J.-C. et W.*). — Les sinus du quatrième ordre. (98).

Les auteurs se proposent d'étudier les fonctions $\frac{z^\mu}{\mu!} \pm \frac{z^{\mu+n}}{(\mu+n)!} + \frac{z^{\mu+2n}}{(\mu+2n)!} + \ldots$ où z représente une variable imaginaire, n un nombre entier positif et μ un des nombres $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Ces fonctions ont été désignées sous le nom collectif de ***sinus supérieurs*** d'ordre $\mu - 1$ du genre hyperbolique ou elliptique selon qu'on prend les signes supérieurs ou inférieurs. Dans le présent Mémoire ils s'occupent du cas $n = 4$. Ce Mémoire est divisé en deux Parties. La première Partie contient les formules fondamentales qui sont d'un usage continuel. La seconde Partie contient la théorie du développement d'une fonction holomorphe arbitraire en séries, analogues à celles de Fourier.

Tome XXVI; 1888.

Julius (*V.-A.*). — Sur les spectres de lignes des éléments. (125).

Julius (*V.-A.*). — Sur les raies doubles dans les spectres du natrium, du magnésium et de l'aluminium. (11).

Tome XVIII; 1890.

Sissingh (*R.*). — Mesures sur le phénomène de Kerr dans le cas d'aimantion parallèle à la surface réfléchissante. (64, 1 pl.).

I. Introduction. II. Méthode d'observation. III. Description de l'appareil. IV. Examen de la méthode d'observation. V. Résumé des différentes observations et des résultats auxquels elles conduisent. Comparaison des résultats obtenus avec ceux d'autres observateurs et avec la théorie.

Une traduction française du Mémoire se trouve dans les *Annales de Delft*, t. VIII, p. 13-71.

VERHANDELINGEN DER KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN te Amsterdam. Eerste Sectie (¹). In-4°.

Tome I; 1893.

Julius (*W.-H.*). — Examen bolométrique des spectres d'absorption. (49, 10 pl.).

Oudemans (*J.-A.-C.*). — Examen de niveaux à bulle d'air. (20, 2 pl.).

Van Ryn van Alkemade (*A.-C.*). — Application de la théorie de Gibbs aux positions d'équilibre de solutions salines à phases fixes. (65).

Cardinaal (*J.*). — La génération des surfaces du quatrième ordre à droite double à l'aide de faisceaux projectifs de quadriques. (63).

La surface S^4 à droite double *d* est engendrée au moyen de deux faisceaux projectifs (A^2, B^2) et (C^2, D^2) déterminés par les quatre quadriques A^2, B^2, C^2, D^2 passant par *d*. Pour étudier les différentes formes de S^4, le système linéaire (A^2, B^2, C^2, D^2) de quadriques est mis en rapport projectif avec un système linéaire Σ_1 de plans, comme l'a indiqué M. Reye (*Leçons de Géométrie de position*, t. II, p. 252); la quadrique O^2 engendrée par les deux faisceaux projectifs (A, B) et (C, D) de plans s'appelle *l'image* de S^4. La correspondance en question jouissant de propriétés particulières dans le cas de quadriques à droite commune, l'étude de ce cas a dû faire l'objet d'un Mémoire antérieur (voir *Rev. sem.*, I, 2, p. 18). Dans ce cas, la surface K de Σ_1 qui correspond à la surface jacobienne du système linéaire de quadriques se compose d'une quadrique K^2 et d'une surface réglée K^4. A l'aide de trois bifurcations indépendantes, l'auteur distingue huit familles de surfaces S^4 à droite double. D'abord le système de quadriques à droite commune est général ou à côté de la droite de base il possède un, deux ou trois points de base. Ensuite l'image S^2 est une surface générale ou un cône. Enfin cette image a une position générale ou par-

---

(¹) Nouvelle série.

ticulière par rapport aux deux surfaces K^3 et K^4. Dans le dernier Chapitre l'auteur compare ses nombreux résultats avec ceux de M. Salmon.

'an der *Waals* (*J.-D.*). — Théorie thermodynamique de la capillarité. (56).

Une théorie thermodynamique de la capillarité a été développée par M. W. Gibbs dans son Mémoire *On the equilibrium of heterogeneous substances*. D'après l'opinion de M. Van der Waals, ce travail, en grande partie consacré à l'étude des phénomènes, contient une supposition discutable. La théorie nouvelle exposée ici est exempte de cette objection. De plus, contraire à celle de M. Gibbs, elle se base sur l'hypothèse de la variation continue de la densité dans la couche limite et dans son voisinage.

Contenu : 1. Introduction. 2. Le principe de l'équilibre thermodynamique. 3. Application à l'équilibre sans faire attention aux phénomènes capillaires. 4. Déduction dè l'équibre eu égard à la capillarité. 5. Évaluation de l'énergie dans le cas de couches parallèles et d'une variation continue de la densité. 6. La forme de l'intégrale de l'énergie libre. Loi de la variation de la densité. 7. La stabilité. 8. L'invariabilité de la pression dans la couche superficielle. 9. L'énergie capillaire. 10. La capillarité dans le cas d'une sphère. 11. Valeur de l'énergie capillaire près de la température critique. 12. La dimension de la couche capillaire. 13. Propriétés thermiques de la couche capillaire. 14. Couche superficielle discontinue. 15. Solution de l'équation différentielle exacte.

Traduction française dans les *Archiv. Néerl*, t. XXVIII, p. 121.

Tome II; 1894.

?ierens de Haan (*D.*). — Matériaux pour l'histoire des Sciences mathématiques et physiques dans les Pays-Bas. (60, 5 pl.).

Nos 33. Constantyn Huygens comme architecte hydraulique, Michæl Florentz van Langren.

'choute (*P.-H.*). — Sections et projections régulières de l'octaédroïde et de l'hexadécaédroïde de l'espace à quatre dimensions. (14, 1 pl.).

Les corps réguliers à quatre dimensions admettent quatre espèces d'axes centrales, les diagonales D par deux sommets opposés et les diamètres Q_1, Q_2, Q_3 de première, de seconde et de troisième espèce qui joignent successivement les centres de deux arêtes opposées, de deux faces opposées et de deux corps limitants opposés; de même, ils possèdent quatre espèces d'espaces tridimensionaux centraux d, q_1, q_2, q_3 perpendiculaires à D, Q_1, Q_2, Q_3. Dans le Mémoire présent il s'agit des sections par d, q_1, q_2, q_3 et des projections orthogonales sur d, q_1, q_2, q_3. Dans l'ordre indiqué, les sections des deux corps sont octaèdre et octaèdre prisme hexagonale et pyramide double quadrilatérale, parallélépipède orthogonal et pyramide double hexagonale, hexaèdre et combinaison hexaèdre-octaèdre en équilibre. Dans le même ordre, les projections

sont dodécaèdre rhombique et octaèdre, prisme hexagonal et pyramide double quadrilatérale, parallélépipède orthogonal et pyramide double hexagonale, hexaèdre et hexaèdre.

Molenbroek (*P.*). — Sur les applications des quaternions à la Mécanique et à la Physique. (38).

La résolution de beaucoup de problèmes de Mécanique et de Physique, dans lesquels l'opérateur $\nabla = i\frac{\delta}{\delta x} + j\frac{\delta}{\delta y} + k\frac{\delta}{\delta z}$, appliqué à une fonction scalaire ou vectorielle d'un vecteur ρ, joue un rôle important, offre cet inconvénient, qu'il n'y a pas de méthode directe pour obtenir le résultat de cette opération de sorte que, dans la plupart de ces applications de la méthode des quaternions on revient aux équations en coordonnées cartésiennes. L'auteur montre qu par des considérations analogues à celles introduites par Euler dans l'Hydrodynamique, les quantités résultant de l'opération ∇ deviennent identiques avec d'autres qu'on rencontre dans la théorie de la fonction vectorielle linéaire étudiée par Hamilton. Dans la théorie du potentiel, les équations de Laplace de Poisson et le théorème de Green se présentent ainsi dans une nouvelle forme. Le problème de déterminer les dilatations et l'axe instantané de rotation dans le cas d'une déformation homogène finie est complètement résolu. Enfin, si dans l'Hydrodynamique on regarde la vitesse ρ au point ρ comme fonction vectorielle $\alpha_1 F_1 \rho + \alpha_2 F_2 \rho + \alpha_3 F_3 \rho$ du vecteur $\rho (F_1, F_2, F_3$ étant des fonctions scalaires), la quantité $d\rho$ se présente sous la forme d'une fonction vectorielle linéaire $\varphi\, d\rho = \alpha_1 S \nu_1\, d\rho + \alpha_2 S \nu_2\, d\rho + \alpha_3 S \nu_3\, d\rho$, jouissant des propriétés suivantes :
L'invariant $x_2 = S(\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2 + \alpha_3 \nu_3)$ est égal à $-\frac{d \log m}{dt}$, m désignant la densité du fluide, et le vecteur δ défini par l'équation connue $\varphi\, d\rho = \varphi_1\, d\rho + V\delta d\rho$ représente en même temps l'axe de rotation des tourbillons et la vitesse angulaire de ce mouvement. Nouvelle forme de l'équation du mouvement des tourbillons et démonstration de ses propriétés Application de la théorie générale au problème, étudié par MM. Helmholtz et Kirchhoff, de l'écoulement stationnaire d'un fluide sans mouvement rotatoire des particules. Démonstration du théorème : A chaque point, où la surface de la veine fluide est rencontrée par les surfaces équipotentielles, celles-ci possèdent des rayons de courbure principaux égaux et opposés.

Schoute (*P.-H.*). — Sections et projections régulières de l'icositétraédroïde de l'espace à quatre dimensions. (17, 1 pl.).

Par rapport aux quatre espaces tridimensionaux centraux d, q_1, q_2, q_3 les sections sont dodécaèdre rhombique, combinaison d'une pyramide double hexagonale avec un prisme hexagonal coaxial, pyramide double hexagonale sommets découpés et combinaison hexaèdre-octaèdre en équilibre. Dans même ordre, les projections sont dodécaèdre rhombique, prisme hexago terminé par deux pyramides hexagonales, combinaison de deux pyrami doubles hexagonales terminée par des plans normaux à l'axe et combina hexaèdre-octaèdre en équilibre. Décomposition de l'icositétraédroïde d'; les sommets en un octaédroïde et un hexadécaédroïde, de l'octaédroïd deux hexadécaédroïdes, etc.

Schouten (*G.*). — Les accélérations d'ordre supérieur. (26).

M. J. Somoff, dans son *Cours de Cinématique* (p. 333 de la traduction allemande par M. Alex. Ziwet), décompose l'accélération de l'ordre n d'un point, ou la vitesse de l'index d'accélération de l'ordre $(n-1)$, quand ce point fait partie d'un corps tournant autour d'un point fixe, en deux composantes : 1° la vitesse due à la rotation autour de l'axe instantané; 2° la vitesse due à l'allongement de l'index. Cette dernière composante est indiquée simplement par $\frac{dv}{dt}$. L'auteur du présent Mémoire fait remarquer que cette composante doit nécessairement dépendre des rotations autour des axes de différents ordres. Son but principal est d'indiquer clairement cette dépendance. Il démontre que l'accération $\alpha^{(n)}$ est la résultante de $(n+1)$ composantes, chacune d'elles étant donnée d'une manière bien déterminée par chacun des axes d'accélération de l'ordre 1 à n. Les composantes suivant trois axes rectangulaires sont des fonctions linéaires des coordonnées du point en question; les coefficients sont des fonctions des accélérations angulaires. Le déterminant D de ce système n'est pas identiquement nul, de sorte que chaque point du mobile en mouvement a son accélération spéciale. En des cas particuliers (l'auteur en cite deux), ce déterminant est zéro; alors il existe un axe d'accélération instantané. Ensuite l'auteur étudie le mouvement d'un solide entièrement libre. Dans ce cas il y a un centre instantané d'accélération; tandis que pour $D = 0$ la projection de l'index de chaque point du mobile sur une ligne déterminée a une valeur constante. Cette ligne n'aura pas nécessairement la direction de l'axe instantané d'accélération; toutefois, si l'axe d'accélération de l'ordre n est l'axe instantané, il est axe d'accélération et de glissement. Chemin faisant, l'auteur trouve que les théorèmes concernant le parallélogramme et le parallélépipède de vitesses linéaires et de vitesses angulaires, l'équivalence d'un couple de rotation avec une translation se conservent pour les vitesses de tous ordres.

Sirks (*J.-L.*). — Sur l'astigmatisme des réseaux concaves de Rowland. (7, 1 pl.).

Schoute (*P.-H.*). — Sections et projections régulières de l'hexacosiédroïde et de l'hécatonicosaédroïde dans l'espace à quatre dimensions. (26, 7 pl.).

Ce Mémoire termine la recherche commencée dans les deux Mémoires précédents. De la position la plus simple de l'icosaèdre par rapport à un système de trois axes rectangulaires, l'auteur déduit la position la plus simple du corps régulier à quatre dimensions limité par six cents tétraèdres par rapport à un système de quatre axes rectangulaires; ces axes sont des diagonales centrales du corps. Ensuite la remarque que les centres des six cents tétraèdres forment les sommets d'un hécatonicosaédroïde mène à la position la plus simple de ce corps. A l'aide de transformations de coordonnées, les autres positions remarquables des deux corps sont déterminées. Ainsi le matériel nécessaire à la définition des sections et des projections remarquables a été trouvé. L'auteur dépose les coordonnées des sommets des deux figures en quatre positions différentes en trois Tableaux et il fait connaître la forme des sections et des projections en perspective rapide sur sept planches.

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE ([1]).

Tome XVII; 1890.

Kluyer (*J.-C.*). — Lieu géométrique des points d'intersection des tangentes menées à une courbe plane d'ordre n et de classe m dans les points de rencontre avec une transversale qui tourne autour d'un point fixe ([2]). (1-51).

Le problème a été proposé par Steiner (*Œuvres complètes*, t. II, p. 489 et *Journal de Crelle*, t. 45, p. 377); le cas $n = 3$ a été résolu (*Bulletin*, t. X, p. 242). L'auteur détermine les nombres plückériens du lieu général et il étend le problème aux courbes gauches et aux surfaces.

Mantel (*W.*). — Application de l'équation de Villarceau au mouvement libre ou forcé d'un point matériel ([3]). (52-76).

Onnen (*H.*). — Courbes bifocales. (77-129, 1 pl.).

L'auteur appelle *courbe bifocale* toute courbe plane admettant deux foyers A et B de manière que les rayons émanés de A concourent en B après la réfraction par la courbe. Il étudie donc les ovales de Descartes (équation bipolaire $u \pm nv = a$). 1. Introduction. 2. Équation bipolaire. 3. Cas particuliers (cercle, bifocale hyperbolique, ellipse inverse, bifocale conchoïdale, hyperbole inverse, bifocale elliptique). 4. Équation polaire. 5. Équation essentielle. 6. Points d'inflexion. 7. Sommets. 8. Les bifocales typiques.

Molenbroek (*P.*). — Sur le roulement exact d'un corps sur une surface quelconque. (130-157).

L'auteur donne d'abord la théorie complète du roulement exact. Après avoir ramené la solution du problème à l'intégration d'équations, il en effectue l'intégration en six cas particuliers (roulement exact d'un tore ou d'un ellipsoïde sur un plan horizontal, d'un cylindre droit, d'un cône ou d'une sphère sur un plan incliné, d'une sphère sur une sphère fixe).

Prange (*A.-J.-A.*). — Quelques remarques sur l'Algèbre moderne, à l'occasion de l'apparition du Manuel du Dr J. Diekmann. (158-175).

Van der Harst (*A.-D.*). — Démonstrations générales de quelques

(1) Voir *Bulletin*, t. XIV₂, p. 169.
de prix proposé par la Société (n° 12, 1888).
prix proposé par la Société (n° 8, 1888).

formules importantes de la Goniométrie et de la Trigonométrie sphérique. (176-187).

Van der Harst (*A.-D.*). — Angle trièdre et triangle sphérique supplémentaires. (188-190).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la construction d'un triangle dont on connaît la longueur des trois bissectrices (suite) (¹). (191-205).

Van Wettum (*Th.-B.*). — Le quaternion de Hâmilton comme matrice de Cayley. (206-216).

Cayley dit que la théorie des quaternions est identique à celle des matrices du second ordre, comme l'a prouvé M. Price dans son *Linear associative Algebra* (*Amer. Journ. of Math.*, t. IV, p. 132).

L'auteur prétend que cette conclusion de Cayley se base sur une fausse démonstration. Il tâche de remplacer la matrice du deuxième ordre par une matrice du troisième ordre qui offre de l'analogie aux quaternions.

Helwig J.-Az. (*P.-I.*). — Les transversales angulaires du triangle. (217-228).

L'auteur étudie les transversales angulaires intérieures et extérieures de l'ordre n (qui divisent les côtés opposés en raison des puissances $n^{\text{ièmes}}$ des côtés adjacents).

D'Ocagne (*M.*). — Méthode nouvelle pour calculer $\sin ma$ et $\cos ma$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos \alpha$. (229-232).

Rasch (*J.-W.*). — Lieu géométrique des points-racines d'une équation algébrique. (233-234).

Stolp (*C.*). — La surface d'un triangle sphérique. (235-236).

Tome XVIII; 1891.

Schouten (*G.*). — Lieu géométrique des centres d'oscillation d'un ellipsoïde de révolution par rapport aux axes menés par un des deux foyers (²). (1-18).

L'auteur remplace l'ellipsoïde et son foyer par un corps et un point quelconques. Le lieu est une surface quintique.

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIV_2, p. 168.

(²) Sujet de prix proposé par la Société (n° 6; 1889).

Schouten (*G.*). — Étude de la force vive correspondant aux composantes de la vitesse suivant le rayon vecteur central et la normale à cette droite dans les divers points de la trajectoire décrite sous l'influence d'une force centrale Ar^n (¹). (19-29).

Schoute (*P.-H.*). — Post-scriptum au Mémoire de Dr G. Schouten: lieu géométrique des centres d'oscillation, etc. (30-34).

Étude de la surface du cinquième ordre à point quadruple.

Van Loghem (*W.*). — Lieu géométrique des points dont la fixation soudaine réduit à une $n^{\text{ième}}$ partie la force vive d'un disque en rotation (²). (35-41).

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la probabilité que les segments d'une droite donnée, cassée d'une manière arbitraire, se trouvent entre des limites données. (42-62).

Simplification et extension des méthodes de Laguerre.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur la probabilité que des segments d'une droite donnée, cassée d'une manière arbitraire, on puisse former des polygones fermés. (63-117).

Halphen a trouvé que la probabilité cherchée est $1 - \frac{n}{2^{n-1}}$, si n représente le nombre des segments.

Dans le Mémoire présent l'auteur résout la question suivante, plus générale : Quelle est la probabilité $K_{m,n,p}$ que, des m segments, la somme des $m - n + 1$ plus petits surpasse p des segments restants?

Comptes rendus des discours prononcés aux séances en 1889-1890 et en 1890-1891. (119-154).

Mantel (*W.*). — Sur des moments de mouvements. (155-167).

Démonstration et application du théorème suivant :

« S'il est possible d'exprimer quelques moments de mouvement (dérivées partielles de la fonction de force par rapport aux vitesses) dans les coordonnées correspondantes de manière que l'énergie du système devienne indépendante de ces coordonnées, ces relations valent continuellement, aussitôt qu'elles valent à un moment quelconque. »

(¹) Sujet de prix proposé par la Société (n° 7; 1889).
(²) *Ibid.* (n° 5; 1889).

Van Wettum (*Th.-B.*). — Sur la matrice de quaternions. (168-186).

Démonstration de l'identité de la matrice de quaternions et de la matrice du remplacement d'un système d'axes rectangulaires par un autre à même origine et à déterminant positif. Produits de matrices comme des rotations successives. Critique des quaternions de Hamilton.

Escher (*R.-J.*). — Théorie des fonctions algébriques. (187-222).

Étude historique, surtout de la théorie de Cauchy.

Tome XIX; 1892.

Kluyver (*J.-C.*). — Sur le complexe des génératrices d'un réseau de quadriques (¹). (1-34).

Le réseau des quadriques. Histoire de la construction du huitième point de base. Le cône de complexe d'un point donné (cône cubique). Lieu des couples de points conjugués sur les génératrices du cône [courbe gauche du septième ordre à point triconique (²)]. La courbe de complexe d'un plan donné (courbe de la troisième classe et du sixième ordre). Relations entre cône et courbe de complexe. Cônes à arête double, à arête de rebroussement, à deux arêtes doubles, cônes dégénérés. Courbe de complexe à une ou à deux tangentes doubles; courbe dégénérée. La surface des singularités (surface de l'ordre 24, de la classe 8, etc. à un système de courbes doubles contenant les 28 droites par deux points de base, 28 courbes gauches cubiques correspondantes et la courbe focale du sixième ordre). Liste des nombres caractéristiques de la surface des singularités comparés avec ceux trouvés par M. Voss dans le cas du complexe cubique général. Remplacement de la congruence (4, 12) des rayons singuliers du cas général par la courbe focale. La surface de complexe d'un axe (surface de l'ordre 12 à droite sextuple). Le faisceau de courbes gauches biquadratiques. Le lieu des points d'inflexion et l'enveloppe des plans d'inflexion de ces courbes (surface de l'ordre 16 par les 28 droites et la courbe focale à huit points sextuples, surface des singularités comptée deux fois). La congruence (19, 30) des cordes d'osculation double (cordes AB qui sont en même temps les droites d'intersection des plans osculateurs en A et B). Cas particuliers par rapport à la position des points de base du réseau.

Nyland (*A.-A.*). — Coordonnées logarithmiques (35-66).

Traduction et extension d'un Mémoire de R. Mehmke (*Civilingenieur*, t. XXXV). Transformation de $f(x) = 0$ en $f_1(x) = f_2(x)$ ou $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$. Images logarithmiques de ces courbes. Extension du principe à un système de deux équations à deux inconnues.

(¹) Sujet de prix proposé par la Société (n° 7; 1890).
(²) Voir *Bulletin*, IX₂, p. 58.

Krediet (*C.*). — Recherche des conditions initiales de quatre points qui en se mouvant sous l'action de leur attraction mutuelle restent à la même distance les uns des autres ([1]). (66-79).

Tous les points matériels sont coplanaires; la résultante des forces agissant sur un quelconque de ces points passe au centre de gravité du système, etc.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur des courbes polaires auto-réciproques. (80-97).

Le problème en sa forme la plus générale. L'enveloppe de la corde commune à une ellipse et à un de ses cercles osculateurs (SALMON-FIEDLER, *Höheren ebenen Curven*, p. 90; 1882) ne satisfait pas aux conditions du problème. Les cubiques $ay^2 = x^3$. Les coniques harmoniquement associées de Steiner, etc.

Thiel (*J.-M.*). — Démonstration nouvelle du théorème d'Euler pour les polyèdres convexes. (98-99).

Mounier (*G.-J.-D.*). — Démonstration d'un théorème de l'Algèbre supérieure. (100-104).

Une fonction algébrique n'admet qu'un seul développement suivant les puissances ascendantes ou descendantes de la même valeur de la variable.

Ekama (*H.*). — Une propriété arithmétique des coefficients du binome (105-106).

Ekama (*H.*). — Sur le jeu de la cloche et du marteau. (107-112).

Calcul de la valeur mathématique des cinq tableaux.

Molenbroek (*P.*). — Sur la représentation des points imaginaires dans l'espace. (113-131).

Représentation d'un point imaginaire à l'aide du cycle des points réels situés à une distance zéro du point imaginaire. Centre, rayon et plan du point imaginaire. Les cycles de deux points imaginaires conjugués. Points imaginaires d'un plan, d'un ellipsoïde, d'une surface quelconque. Extension des travaux de Laguerre et de M. G. Tarry à l'espace.

Elfrinkhof (*L.*). — La solution d'équations vectorielles linéaires dans des cas spéciaux. (132-142).

Étude plus profonde des cas des articles 351 et 352 des *Elements of quaternions* de Hamilton.

([1]) Sujet de prix proposé par la Société (n° 12; 1890).

Elfrinkhof (*L.*). — Remarques par rapport aux Mémoires sur les matrices de quaternions de M. Th.-B. van Wettum (*Nieuw Archief*, t. XVII et XVIII). (143-150).

Défense de la théorie de Hamilton contre les attaques de M. van Wettum.

Van den Berg (*F.-J.*). — Sur un problème d'utilité pour la Géodésie. (151-187).

D'après la méthode de simplifier la théorie de la fermeture d'un réseau triangulaire donnée par Schleiermacher, il reste à résoudre le problème suivant :

« Trouver pour chaque triangle du réseau un nombre tel, que la somme des trois excès des trois triangles à sommet commun surpasse d'une quantité constante la somme des trois nombres correspondants, si l'on ajoute des triangles à nombre zéro pour chaque sommet où le nombre des triangles est plus petit que trois ».

L'auteur s'occupe des cas tant soit peu réguliers de ce problème, le problème général offrant trop de difficulté. Chaîne de triangles. Cycle de triangles. Chaîne et cycle avec des triangles environnants. Cycle complet à cycle extérieur. Chaîne à cycle extérieur. Couronne de cycles. Deux chaînes à côté l'une de l'autre.

Mounier (*G.-J.-D.*). — Le calcul complet du jeu de la cloche et du marteau. (188-210).

Critique et extension du Mémoire de M. Ekama.

Van den Berg (*F.-J.*). — Les tables à calcul les plus anciennes du monde. (211-215).

Helwig J.-Az. (*P.-I.*). — La construction de quelques transversales angulaires du triangle. (216-223).

Extension du travail antérieur contenu dans le tome XVII.

Tome XX; 1893.

Van Wettum (*Th.-B.*). — Sur les lois d'opération auxquelles sont soumises les quantités i, j, k de Hamilton. (1-6).

Gravelaar (*N.-L.-W.-A.*). — Sur les facteurs premiers de $x^n - 1$. (7-25).

L'auteur démontre l'irréductibilité de la forme $\frac{(x^n - 1)\,\Pi(x^{n:qp} - 1)\ldots}{\Pi(x^{n:p} - 1)\,\Pi(x^{n:pqr} - 1)\ldots}$ étudiée par Arndt (*Journal de Crelle*, t. 56, p. 178).

Wythoff (*Mlle A.-G.*). — Équations en coordonnées bipolaires du mouvement d'un point dans un plan sous l'influence de formes simples de forces (¹). (26-62).

Équations en coordonnées bipolaires et en coordonnées elliptiques. Cas de l'ellipse, de la lemniscate, des ovales de Descartes et de quelques autres trajectoires. Calcul du rayon de courbure en coordonnées bipolaires. Courbe tautochrone et courbe brachistochrone. Solution des problèmes 72, 73 et 75 de Tait et de Steele, *Dynamics of a Particle*.

Korteweg (*D.-J.*). — Sur les modèles des surfaces cubiques construites d'après les indications de M. Rodenberg. (63-96).

Introduction historique. Déduction des cinq classes à l'aide des procédés de jonction ou de séparation aux points coniques d'après M. Klein. Les particularités des modèles divers. Annotations. La classification de M. Schläfli. Post-scriptum.

Comptes rendus des discours prononcés aux séances en 1891-1892. (97-127).

Moors (*B.-P.*). — Évaluation de la valeur approchée d'une intégrale définie. (129-215).

Évaluation de la valeur approchée d'une intégrale définie. Représentation de la valeur d'une intégrale définie par une aire. Formules d'approximation. Expression de la valeur de l'aire dont on peut déduire les formules d'approximation de Newton-Cotes. Sur la convergence d'une série qui y entre. Formules de Maclaurin, Simpson, Newton, Cotes, etc. Expression de la valeur de l'aire dont on peut déduire les formules d'approximation de Maclaurin. Deuxième formule de Maclaurin. Formules déduites de la deuxième formule de Maclaurin. Déplacement de l'axe des ordonnées vers le milieu de la figure. Déduction des formules d'approximation de Newton-Cotes et de celles de Maclaurin. Déduction des formules d'approximation de Gauss. Évaluation de l'aire de la figure à l'aide d'ordonnées de Gauss. Termes de correction des formules de Newton-Cotes et de Maclaurin. Termes de correction des formules de Gauss. Application particulière de la méthode de Gauss. Évaluation de l'aire de la figure, les abscisses de Gauss étant exprimées en deux ou en trois décimales. Évaluation approchée de l'intégrale d'un produit. Tables.

(¹) Sujet de prix proposé par la Société (n° 7; 1891).

ANNALES DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE DELFT. In-4°.

Tome I; 1885.

Schols (*Ch.-M.*). — Sur l'emploi de la projection de Mercator pour le calcul d'une triangulation dans le voisinage de l'équateur. (1-64).

La circonstance qu'on allait commencer la triangulation de l'île de Sumatra et que deux officiers de l'armée des Indes étaient détachés à l'École Polytechnique de Delft pour s'appliquer à l'étude de la Géodésie afin d'être chargés de cette triangulation a conduit l'auteur à l'étude du problème susdit. L'île de Sumatra étant coupée en deux parties par l'équateur et s'étendant de part et d'autre jusqu'à six degrés de latitude, la projection de Mercator appliquée directement à la sphère se présente d'elle-même. L'auteur développe d'abord les formules pour le calcul des coordonnées rectilignes d'après les coordonnées géographiques et inversement et pour le calcul du rapport d'agrandissement. Ensuite il fait connaître les corrections qu'il faut appliquer aux angles et aux côtés pour les projeter du sphéroïde sur le plan ou du plan sur le sphéroïde. Les formules servant à évaluer ces corrections ne sont poussées d'abord plus loin que l'exige la pratique ordinaire. Plus tard les termes d'ordres plus élevés font voir jusqu'à quel point on est autorisé à les négliger. Mais auparavant l'auteur s'occupe du cas de la terre sphérique, non seulement parce que les formules qui s'y rapportent sont beaucoup plus simples, mais aussi parce qu'on les trouve plus directement et qu'elles donnent une vérification utile pour les formules plus compliquées du cas du sphéroïde. 1. Introduction. 2. Calculs des coordonnées et du rapport d'agrandissement. 3. Équation différentielle de la projection de la ligne géodésique. 4. Développement de ψ_0, ψ_1 et de $\log S - \log s$ jusqu'aux termes du second ordre inclus. 5. Développement de ces mêmes grandeurs pour la sphère. 6. Développement des termes d'ordre supérieur. 7. L'azimut astronomique et la corde.

Bosscha (*J.*). — Relation des expériences qui ont servi à la construction de deux mètres étalons en platine iridié, comparés directement avec le mètre des archives. Première Partie. (15-144).

Rapport. — 1. Introdution. 2. Élasticité d'une des règles. Degré de précision des mesures micrométriques. 3. Examen des qualités chimiques des règles. 4. Recherche d'une cause d'erreur dans la mesure de la longueur d'un mètre à bouts.

Haga (*H.*). — Étude expérimentale sur l'effet thermo-électrique découvert par Thomson. (145-168).

Schols (*Ch.-M.*). — La série semi-convergente pour l'évaluation de l'intégrale $\psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{-z^2}dz$. (213-227).

L'auteur développe quelques formules simples donnant avec grande approximation la valeur du reste de la série connue de Laplace.

Tome II; 1886.

Bosscha (*J.*). — Relation, etc. (1-122).

Suite du Mémoire précédent. 5. Comparaisons des mètres 19, 23, 27 entre eux et avec le mètre des Archives. 6. Nouvelles vérifications des étalons 19, 23, 27. Note. 1. Analyse des erreurs causées dans les mesures micrométriques par une mise au point défectueuse. Note 2 (de A.-C. Oudemans). Analyse du métal des règles.

Schols (*Ch.-M.*). — Théorie des erreurs dans le plan et dans l'espace (¹). (123-178).

Lorsque l'on détermine d'une manière quelconque le lieu occupé par un point dans l'espace, on trouvera en général, par suite de différentes causes, une position qui diffère plus ou moins de la position vraie du point. On commet donc une erreur, déterminée en grandeur et en direction par le segment de droite qui lie la position vraie à la position trouvée. En répétant plusieurs fois cette détermination, on trouvera sans cesse d'autres positions pour le point; on commettra donc continuellement d'autres erreurs, différant tant en grandeur qu'en direction. En répétant la détermination un grand nombre de fois, on trouvera que les points qu'on obtient de cette manière se répartissent d'une façon inégale autour de la position vraie du point et lorsque ce nombre devient très grand, on verra que la répartition n'est pas arbitraire, mais qu'elle suit une certaine loi. C'est de la recherche de cette loi et des propriétés qui en découlent que l'auteur s'occupe dans le présent Mémoire.

1. Introduction. 2. Propriétés générales des erreurs. 3. L'erreur résultante. 4. La loi de l'erreur résultante. 5. La loi limite. 6. Discussion des lois limites pour les erreurs linéaires, dans le plan et dans l'espace. 7. Applications. Note additionnelle. Trois Tableaux.

Schols (*Ch.-M.*). — La courbure de la projection de la ligne géodésique. (179-230).

Pour les projections conformes ou orthomorphes les lois de la courbure de la projection de la ligne géodésique sont connues; pour un même point la courbure varie proportionnellement au cosinus de l'angle que fait la ligne avec la courbe pour laquelle le rapport d'agrandissement est constant. Pour une projection quelconque la courbure s'exprime par une fonction homogène et entière du troisième ordre des sinus et cosinus de l'angle que fait la ligne avec une direction quelconque dans le plan de la carte. L'auteur prouve ce théorème,

(¹) Traduction française sans changements d'un Mémoire hollandais paru en 1874.

d'abord pour le cas d'une surface de révolution et ensuite d'une manière indépendante de la nature de la surface projetée.

1. Formules générales. 2. Applications à diverses projections. 3. Recherches des projections dans lesquelles les lignes géodésiques sont projetées par des cercles.

Tome III; 1887.

Haga (*H.*). — Étude expérimentale, etc. (43-51).

Suite du Mémoire précédent.

Schoute (*P.-H.*). — Sur le complexe de droites dont les distances à deux droites données sont entre elles dans un rapport constant. (52-90).

Étude géométrique d'un complexe particulier du quatrième ordre, dans lequel la génération de courbes et de surface au moyen de faisceaux projectifs joue un rôle important. Supplément analytique.

Schols (*Ch.-M.*). — Erreurs dans les Tables de Callet. (130-139).

L'auteur indique 126 erreurs, en tout 184 chiffres fautifs dans les formules d'Euler pour le calcul des sinus, des cosinus, des tangentes et des cotangentes, ainsi que pour le calcul des logarithmes des sinus et des cosinus comme elles se trouvent avec des coefficients en 20 et en 22 décimales dans la préface des Tables de Callet.

Schols (*Ch.-M.*). — La loi de l'erreur résultante. (140-150).

Les difficultés qui résultent de la discontinuité n'étant pas résolues par les formules données par Bessel et Kummell, l'auteur développe des formules assez simples qui tiennent compte de toutes les discontinuités, sans avoir recours aux ressources de la haute Analyse.

Cardinaal (*J.*). — Application des principes de la Géométrie synthétique à la solution des problèmes de la Géométrie descriptive. (151-194).

L'auteur s'occupe de quelques problèmes qui se rapportent à la construction et à l'intersection de quadratiques. 1. Intersection des quadratiques. 2. Projection des courbes gauches qui en résultent. 3. Construction et intersection des courbes planes d'après les principes de la Géométrie synthétique. 4. Solutions de quelques problèmes sur la construction et l'intersection des quadratiques.

Schols (*Ch.-M.*). — Démonstration directe de la loi limite pour les erreurs dans le plan et dans l'espace. (195-200).

L'auteur a développé la loi limite des erreurs dans le plan et dans l'espace (t. II, p. 123, Chap. V) en partant de cette loi pour les erreurs linéaires. Dans le présent Mémoire il applique les mêmes raisonnements et les mêmes développements qui donnent cette dernière loi aux erreurs du plan et de l'espace, ce qui mène à une démonstration plus directe de ces lois limites.

Tome IV; 1888.

Schols (*Ch.-M.*). — Remarques sur le calcul des efforts maxima dans les maîtresses-poutres des ponts de chemins de fer. (13-100, 4 pl.).

1. Introduction. 2. Charge roulante des ponts de chemins de fer. 3. Type de locomotive pour le calcul. 4. Effort tranchant et moment de flexion. 5. L'effort tranchant maximum. Considérations générales. 6. Cas où V_m est produit par l'essieu d'avant. 7. Type modifié de la locomotive pour le calcul. 8. Suite de 6. 9. Chargement par un nombre restreint de locomotives. Remplacement des wagons par une charge uniformément répartie. 10. Partie périodique du moment des locomotives. 11. Cas où V_m n'est pas produit par l'essieu d'avant. 12. Application à la locomotive de 67 tonnes. 13. Valeur maximum du moment de flexion. Considérations générales. 14. Calcul du moment de flexion maximum pour une charge composée de locomotives. 15. Influence de la partie périodique du moment des locomotives. 16. Calcul du moment de flexion maximum pour une charge composée en partie de locomotives, en partie de wagons. 17. Formule simplifiée pour le calcul du moment de flexion maximum dans le cas d'une charge mixte. 13. Charge équivalente pour les ponts de grande portée.

Rahusen (*A.-E.*). — Sur quelques propriétés des déterminants, appliquées à une question de Géométrie à n dimensions. (104-138).

Après avoir démontré plusieurs théorèmes nouveaux sur les déterminants, l'auteur cherche le lieu géométrique des points de l'une de deux figures égales ou symétriques à n dimensions qui coïncident avec les points homologues de l'autre. Il trouve les trois théorèmes généraux suivants :

« Deux figures égales à n dimensions ont en commun un espace linéaire à distance finie à $n-2k$ dimensions, ou bien un espace linéaire de l'infini à $n-2k-1$ dimensions. »

« Deux figures symétriques à n dimensions ont en commun un espace linéaire à distance finie à $n-2k-1$ dimensions, ou bien un espace linéaire de l'infini à $n-2k-2$ dimensions. »

« Le lieu géométrique des milieux des points homologues de deux figures égales à n dimensions est un espace linéaire a $n-2k$ dimensions, celui de deux figures symétriques de n dimensions est un espace linéaire à $n-2k-1$ dimensions. »

Tome V; 1890.

Julius (*V.-A.*). — Sur les spectres des lignes des éléments. (1-117).

Traduction française du Mémoire publié dans les *Verhandelingen d'Amsterdam* (t. XXVI).

Julius (*V.-A.*). — Sur les raies doubles, etc. (118-128).

Traduction française du Mémoire publié dans les *Verhandelingen d'Amsterdam* (t. XXVI).

Schols (*Ch.-M.*). — La projection de la ligne géodésique. (133-138).

Dans un Mémoire antérieur l'auteur a donné la loi de la courbure de la ligne géodésique, d'abord pour les surfaces de révolution par la relation connue $R \sin A = \text{const.}$, ensuite pour des surfaces quelconques par des considérations géométriques. Dans le présent Mémoire l'auteur établit la même loi pour une surface quelconque à l'aide de l'analyse.

Tome VI; 1890.

Baehr (*G.-F.-W.*). — Sur les points d'inflexion de l'herpolhodie de Poinsot. (27-50) (1).

Schoute (*P.-H.*). — Théorèmes généraux par rapport aux figures planes directement semblables (51-71, 2 pl.).

Plusieurs théorèmes pour la plupart nouveaux qui se rapportent à deux figures planes directement semblables et aux faisceaux ponctuel et tangentiel qui en dérivent. Lieux de points homologues et enveloppes de droites homologues.

Tome VII; 1891.

Bosscha (*J.*). — Les équations des nouvelles copies du mètre des Archives. (51-125).

Schoute (*P.-H.*). — Le déplacement le plus général dans l'espace à *n* dimensions. (139-158).

---

(1) Voir plus hant, p. 223.

L'auteur se propose un but triple. D'abord il cherche à simplifier les raisonnements qui ont mené M. Rahusen (t. IV, p. 104) à une distinction caractéristique entre la congruence et la symétrie de deux figures égales à n dimensions, en remplaçant dans les démonstrations la plus grande partie de la théorie des déterminants par des considérations géométriques. Ensuite il tâche d'approfondir ces résultats, en les considérant dans la lumière de la théorie générale de la projectivité dans l'espace à n dimensions. Enfin de cette généralisation il déduit une représentation géométrique simple de la relation entre deux figures congruentes et entre deux figures symétriques.

ARCHIVES NÉERLANDAISES DES SCIENCES EXACTES ET NATURELLES, publiées par la Société hollandaise des Sciences à Harlem et rédigées par M. J. Bosscha ([1]).

Tome XXIV; 1891.

Van der Waals (J.-D.). — Théorie moléculaire d'une substance composée de deux matières différentes. (1-56).

Dans sa thèse (Leyde, 1873) l'auteur a montré que l'expression analytique de la courbe isotherme d'un gaz $pv = \mathrm{RT}$ doit être remplacée par

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = \mathrm{RT}.$$

Dans le présent Mémoire où il est question d'un mélange, il substitue $a_x \equiv a_1(1-x)^2 + 2a_{1,2}(1-x)x + a_2x^2$ pour a et $b_x \equiv b_1(1-x)^2 + 2b_{1,2}(1-x)x + b_2x^2$ pour b en désignant par $1 - x$ et x les parties de molécules des deux substances comprises dans l'unité de molécules. Ainsi il s'occupe de la surface $\psi = -\mathrm{MRT}\log(\mathrm{V} - b_x) - \frac{a_x}{\mathrm{V}} + \mathrm{MRT}[x\log x + (1-x)\log(1-x)]$ ou $\psi = f(\mathrm{V}, x)$.

Les points de contact d'un plan doublement tangent correspondent à des phases qui peuvent se présenter simultanément. L'auteur décrit un modèle de la surface où les points qui indiquent des phases coexistantes sont liés entre eux par des fils. Appendice contenant quelques remarques sur la marche de la courbe spinodale.

Korteweg (D.-J.). — Sur les points de plissement. (57-98, 1 pl.).

I. Lorsqu'un plan bitangent se meut sur la surface qu'il touche doublement, il peut arriver que les deux points de contact viennent à coïncider; le point de la surface où cette coïncidence se produit est appelé *point de plissement*. Ce point se trouve tant sur la courbe spinodale que sur la courbe flecnodale. Équa-

(1) Voir *Bulletin*, XIV$_2$, p. 173.

tion $z = cx^4 + dxy^2 + ey^4$ de la surface dans la proximité d'un point de plissement. Les points de plissement de première espèce ($4ce > d^2$) et leur indicatrice du quatrième ordre. Les points de plissement de seconde espèce ($4ce < d^2$). La courbe flecnodale en première approximation. Les courbes spinodale, flecnodale et connodale en seconde approximation. Le point de plissement double homogène ($d = 0$). Le point de plissement double hétérogène ($4ce = d^2$). II. Apparition et disparition de points de plissement sur une surface qui subit une déformation continue. Points exceptionnels de premier ordre. Calcul des points de plissement d'une surface $z = f(x, y)$. Détermination de l'espèce. Transformation des points de plissement double homogène et hétérogène. Transformation des points d'osculation. Détermination des points de plissement et de leur espèce. Transformation d'un point conique. Récapitulation. Application aux surfaces cubiques.

Van den Berg (F.-J.). — Quelques formules pour le calcul des nombres de Bernoulli et des coefficients des tangentes ([1]). (99-141).

Korteweg (D.-J.). — La théorie générale des plis et la surface ψ de Van der Waals dans le cas de symétrie. (295-368, 3 pl.).

Dans le cas de symétrie la courbe spinodale se prête au traitement mathématique. Alors la forme et les singularités de cette courbe font connaître la forme et les singularités de la courbe connodale. Ainsi l'étude de la courbe spinodale mène l'auteur à la connaissance complète des différents phénomènes qui se produisent sur la surface symétrique ψ.

Le cas de symétrie se présente sous les conditions $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$ (*voir* le premier Mémoire de ce Tome); alors le plan $x = \frac{1}{2}$ est plan de symétrie.

Le travail est divisé en trois sections. Dans la première sont développées les parties de la théorie générale des plis qui ont trait à la surface ψ; les démonstrations des théorèmes qui y entrent seront publiées dans un Mémoire ultérieur. Dans la seconde section il s'agit des différents modes de passage pour ce qui concerne la courbe spinodale et les parties physiquement réalisables de la courbe connodale. La troisième section fournit des démonstrations de contrôle par rapport à l'exactitude des passages trouvés. I. Division des plis en espèces (pli fermé, pli non fermé annulaire, pli non fermé simple); propriété générale de la courbe connodale. Points d'intersection des courbes spinodale et connodale. Point de plissement doubles, homogènes et hétérogènes. Points d'osculation. Récapitulation. Les points singuliers de la spinodale indiquent avec sûreté des points singuliers de la connodale. Les trois modes de génération d'un plan tritangent. Pli principal et pli accessoire. Plan quadritangent. II. Partie descriptive. Les cas $a_{1,2} \geqq a_1$. Le cas $a_{1,2} < a_1$. Aperçu général. Différents sous-cas. Les températures remarquables. Les cas $b_{1,2} < b_1 \pm \Delta$ (Δ très petit). La surface ψ pour le mélange éther-eau. III. Partie démonstrative. L'équation de la surface. La courbe connodale à connodes symétriques; sa terminaison du côté des petits volumes. L'hypothèse $b_{1,2} = b_1$. Étude de la conno-

---

([1]) Voir *Bulletin*, XIV$_2$, p. 176.

dale. L'équation de la spinodale. Les points de plissement. La connodale. Les limites de l'existence du plan quadritangent.

Tome XXV; 1892.

De Vries (*J.*). — Polygones cycliques sur des courbes cubiques planes ([1]). (1-32).

De Vries (*J.*). — Sur un groupe de configurations planes régulières et quelques configurations planes connexes de points et de courbes ([2]). (33-56).

De Vries (*J.*). — Sur une configuration plane de vingt-quatre points et de dix-huit droites ([3]). (57-69).

Kluyver (*J.-C.*). — Sur des systèmes de rayons déduits de quatre droites données dans l'espace ([4]). (70-99).

Lorentz (*H.-A.*). — Sur la théorie moléculaire des dissolutions diluées. (107-130).

Les lois relatives à la pression osmotique d'une solution sont si simples qu'on est conduit à essayer de les déduire directement de la théorie kinétique sans se servir de la thermodynamique. Étude entreprise dans cette direction.

Bosscha (*J.*). — Les équations des nouvelles copies du mètre des Archives. (165-226).

Lorentz (*H.-A.*). — La théorie électrique de Maxwell et son application aux corps mouvants. (363-552).

Introduction (Hypothèses fondamentales. Le principe de d'Alembert. Notations). I. Mouvements électriques dans des corps en repos. (Valeur de l'énergie kinétique. Sa variation. Quantités qui définissent un déplacement virtuel du système. Application du principe de d'Alembert. Valeurs de X, Y, Z pour les diélectriques et les conducteurs. Équations du mouvement. Formules de l'électrostatique. Hypothèse du fluide électrique. Courants invariables et variables. Force électrique. Charge électrique au sein d'un isolateur. Forces électromotrices. Vitesse de la lumière dans l'éther). II. Phénomènes électromagnétiques

---

([1]) *Voir* plus haut, p. 223.
([2]) *Voir* plus haut, p. 221.
([3]) *Voir* plus haut, p. 222.
([4]) *Voir* plus haut, p. 223.

dans les corps qui se meuvent et qui entraînent l'éther contenu dans leur intérieur. (Valeur de l'énergie kinétique. Quantité d'électricité qui traverse une surface. Application du principe de d'Alembert. Valeur de la force électrique. Relations entre les composantes du courant et celles du déplacement diélectrique). III. Examen d'une hypothèse qui a été faite aux chapitres précédents. IV. Théorie d'un système de particules chargées qui se déplacent à travers l'éther sans entraîner ce milieu. (Considérations préliminaires. Hypothèses fondamentales. Valeur de la variation δT. Équations qui déterminent l'état de l'éther. Action de l'éther sur une particule chargée. Moment du couple qui agit sur une particule chargée. Vitesse de rotation d'une particule. Influence des rotations sur les valeurs des forces. Récapitulation des formules). V. Applications de la théorie précédente (Électrostatique. Forces électrodynamiques agissant sur un élément d'un circuit linéaire. Remarques. Induction dans un circuit fermé. Pouvoir inducteur spécifique). VI. Propagation de la lumière dans un diélectrique pondérable en repos. (Nature du problème. Vibrations dans l'éther produites par une seule molécule. Théorèmes mathématiques. Détermination de quelques quantités. Intensité de la force qu'une particule vibrante éprouve en vertu de l'état de la molécule dont elle fait partie. Détermination de la force totale qui agit sur une particule vibrante. Équations du mouvement d'une particule. Propagation de la lumière). VII. Propagation de la lumière dans un diélectrique pondérable en mouvement. (Équations fondamentales. Vibrations produites. Vibrations produites par une seule molécule. Théorèmes mathématiques. Détermination de quelques quantités. Valeur de la force produite par la molécule dont la particule fait partie. Détermination de la force totale agissant sur une particule vibrante. Équations du mouvement d'une particule. Équations différentielles. Entraînement des ondes lumineuses par la matière pondérable). Note additionnelle. (Valeurs générales de f, g, h, α, β, γ. Vérification d'une formule. Déplacement diélectrique et force magnétique qu'une particule vibrante produit à quelque distance).

Tome XXVI; 1893.

Van der Waals (*J.-D.*). — La valeur de la pression dans les phases coexistantes de mélanges, notamment des solutions salines. (91-125).

Van der Waals (*J.-D.*). — La formule de la dissociation électrolytique. (126-136).

Kuenen (*J.-P.*). — Mesures concernant la surface de Van der Waals pour les mélanges d'acide carbonique et de chlorure de méthyle. (354-422).

Engelmann (*Th.-W.*). — Le principe du conducteur commun. (423-435).

Bosscha (*J.*). — Sur un problème relatif à la variation simultanée de courants électriques dans un système de conducteurs linéaires. (459-469).

Tome XXVII; 1894.

Sissingh (*R.*). — Mesures relatives au phénomène de Kerr, dans l'aimantation parallèle à la surface réfléchissante. (173-251).

Zeeman (*P.*). — Mesures relatives au phénomène de Kerr, etc. se rapportant, en particulier à la différence de phase magnéto-optique de Sissingh. (252-302).

Speckmann (*H.-A.-W.*). — La méthode de M. Darboux pour l'intégration d'équations aux dérivées partielles, non linéaires, du second ordre (1). (303-354).

De Boer (*F.*). — Application de la méthode de M. Darboux à l'intégration de l'équation différentielle $s = f(r, t)$ (2). (355-412).

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI. RENDICONTO DELL' ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE; Napoli, in-4°.

Année XVIII, 1879.

De Gasparis (*A.*). — Sur les perturbations planétaires. (34).

De Gasparis (*A.*). — Nouvelle série relative au mouvement des planètes sur l'ellipse. (67-68).

De Gasparis (*A.*). — Sur la valeur inverse du cube de la distance variable de deux planètes, exprimée par une série ordonnée suivant les puissances du temps. (80-83).

Fergola (*E.*). — Observations de Mars, faites à l'observatoire

---

(1) *Voir* plus haut, p. 227.
(2) *Voir* plus haut, p. 225.

royal de Capodimonte, du 19 août au 23 octobre 1877. (123-132).

Salvatore-Dino (*N.*). — Sur le genre des courbes gauches. (133-136).

Démonstration du théorème de M. Cremona :

« Si deux surfaces ont en commun un point r_1 — uple pour l'une et r_2 — uple pour l'autre, le nombre des points doubles apparents de leur intersection diminue de

$$\frac{1}{2} r_1 r_2 (r_1 - 1)(r_2 - 1).$$

» Si les deux surfaces ont au point commun un contact d'ordre $r - 1$, sans y avoir de point multiple commun, leur intersection ne perd aucun point double apparent. »

De Gasparis (*A.*). — Sur certaines dérivées, et essai d'un calcul pour les perturbations planétaires. (136-141).

Trudi (*N.*). — Sur la partition de lettres. (154-164).

Partition d'un système de lettres en un nombre donné de groupes, étant donné le nombre de lettres qui doit être contenu dans chaque groupe (nombre différent en général d'un groupe à un autre). L'auteur résout cette question autant pour le cas des lettres différentes, que pour celui des lettres répétées.

Trudi (*N.*). — Note sur la dérivée d'ordre quelconque du produit de fonctions de plusieurs variables. (181-188 et 299-300).

Salvatore-Dino (*N.*). — Sur la construction de la surface du 2ᵉ ordre, donnée par neuf points. (195-198).

L'auteur donne la solution de ce problème, c'est-à-dire la construction de la section déterminée par un plan quelconque passant par deux des neuf points, en employant la solution des deux problèmes suivants :

« 1° Étant donnés dans un plan onze points A_1, B_1, C_1, D_1, E_1; A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, P et une droite par P, trouver l'autre point d'intersection de cette droite avec la conique passant par P et par les quatre points communs aux coniques $A_1, \ldots, E_1$ et $A_2, \ldots, E_2$. 2° Étant donnés dans un plan quinze point $A_1, \ldots, E_1, A_2, \ldots, E_2, A_3, \ldots, E_3$, déterminer la conique passant par deux points donnés P, Q et appartenant au réseau des trois coniques

$$A_1, \ldots, E_1;\ A_2, \ldots, E_2;\ A_3, \ldots, E_3.$$

Janni (*V.*). — Expression générale d'un coefficient d'une équa-

tion en fonction des sommes des puissances semblables des racines de cette même équation. (199-201).

Caporali (*E.*). — Sur les transformations uniponctuelles planes involutives. (212-219).

Le nombre de couples de points correspondants qui se trouvent sur une droite arbitraire est appelé par l'auteur la *classe* de la transformation. Après avoir étudié quelques propriétés générales de ces transformations, il trouve toutes celles de la première classe et fait l'application des résultats généraux à deux cas particuliers qui sont :

1° La transformation involutive du 4° ordre à trois points fondamentaux doubles et trois simples,

2° La transformation involutive du 8° ordre ayant un point fondamental quintuple, trois triples, deux doubles et trois simples.

De Gasparis (*A.*) — Sur le développement de la fonction perturbatrice. (227-232).

Caporali (*E.*) — Sur certains systèmes de droites. (244-249).

Les systèmes étudiés par l'auteur sont ceux que l'on obtient en joignant les points d'une surface représentable sur un plan aux points correspondants de la représentation. Soit Φ un système linéaire triplement infini de courbes algébriques planes dans un plan Π_0. L'auteur établit une correspondance linéaire entre le système Φ et celui des plans de l'espace. Un point P de Π_0 détermine un réseau en Φ et les plans correspondants passent par un point P′ correspondant à P. On a ainsi une surface Σ, lieu de P′, et le système des droites PP′. Étant n l'ordre et N le nombre des intersections variables des courbes Φ,

la surface Σ est de l'ordre N,
le système de droites est de l'ordre $N + n + 1$,
il y a $N + 2n + 1$ droites du système rencontrant deux droites quelconques.

Ce dernier résultat est obtenu au moyen de certaines courbes T de Π_0 correspondant aux droites de l'espace. En employant ces mêmes courbes l'auteur trouve aussi la classe de la surface focale qui est

$$2(2n + p - 2),$$

p étant le genre des courbes Φ. Suit l'étude de cette surface focale. Enfin l'auteur indique les modifications que le système éprouve en certains cas particuliers.

De Gasparis (*A.*). — Sur la variation des éléments elliptiques dans les orbites planétaires. (282-287).

Année XIX, 1880.

De Gasparis (*A.*). — Sur une relation de distances dans le problème des trois corps. (13-19).

Padelletti (*D.*). — Sur les axes conjugués de rotation dont les directions comprennent un angle constant et sur les axes conjugués orthogonaux. (42-51).

Contarino et *Angelitti*. — Sur la détermination des ascensions droites des étoiles en zone. (51-65).

De Gasparis (*A.*). — Sur la variation qui se produit dans le rayon vecteur d'une planète perturbée pendant un temps infiniment petit. (67-70).

De Gasparis (*A.*). — Sur la variation de la différentielle du carré de la distance entre deux planètes, produite par l'influence perturbatrice d'une troisième planète. (81-84).

Fergola (*E.*). — Observations de Mars faites à l'observatoire royal de Capodimonte, au cercle méridien de Repsold. (90-92).

De Gasparis (*A.*). — Emploi ultérieur et extension de la formule pour le calcul des perturbations. (95-99).

De Gasparis (*A.*). — Sur les rapports des variations simultanées de quelques éléments d'ellipses instantanées dans le problème des trois corps. (118-132).

Rubini (*R.*). — Sur une assertion de Boole. (132-144).

Boole (*Phil. Trans.*, 1844) applique son *calcul des symboles d'opération* à l'intégration des équations différentielles linéaires. Dans l'intégration par séries il suit le procédé d'Euler, qui consiste à poser l'intégrale $y = \Sigma a_\lambda x^\lambda$, et résoudre les équations que l'on obtient pour la détermination des coefficients a_λ. La méthode tombe en défaut lorsque l'équation qui donne le premier coefficient n'a pas ses racines réelles et différentes. L'auteur montre que Euler, contrairement à ce que Boole dit dans son Mémoire, avait aussi donné la manière de traiter ces cas exceptionnels, et même les équations qui servent à résoudre le problème suivant la méthode de Boole coïncident, à part les notations, avec celles d'Euler.

Salvatore-Dino (*N.*). — Sur une surface minima. (148-157).

Surface algébrique minima du 12° ordre et de la 12° classe, et sa représentation par projection orthogonale.

De Gasparis (*A.*). — Sur les rapports des variations simultanées de quelques éléments d'ellipses instantanées dans le problème des trois corps. (166-175).

Année XX, 1881.

Caporali (*E.*). — Sur l'hexaèdre complet. (59-71).

L'auteur commence par étudier quelques particularités de l'hexaèdre polaire d'une surface du 3° ordre possédant un point double. Ensuite il démontre le théorème suivant, qui établit une correspondance univoque entre les surfaces du 3° ordre ayant un hexaèdre polaire donné, et les plans tangents de la développable déterminée par les plans de l'hexaèdre :

Soient X les 15 points où les arêtes d'un hexaèdre sont coupées par un plan osculateur de la cubique gauche déterminée par les plans de l'hexaèdre. Sur chaque arête, le point X appartient à un groupe de l'involution syzygétique déterminée par les quatre sommets; les 45 points Y qui complètent ces 15 groupes se trouvent trois par trois sur 15 droites appartenant à une même surface du 3° ordre.

Puis il trouve qu'il y a 40 surfaces ayant l'hexaèdre donné pour hexaèdre polaire principal, et 56 pour lesquelles il est un des hexaèdres polaires secondaires. Enfin, il donne quelques propositions sur le plan polaire d'un point par rapport à un hexaèdre, et en montre l'application à l'étude de l'hexagramme de Pascal.

Govi (*G.*). — Sur une brochure de M. le prof. A. Favaro, ayant pour titre : *G. Galilei ed il dialogo de Cecco di Ronchitti da Bruzene in perpuosito de la Stella Nuova.* (89-93).

De Gasparis (*A.*). — Sur certaines ellipses instantanées dans le problème des trois corps. Note troisième et dernière. (101-112).

Caporali (*E.*). — Théorèmes sur les surfaces du 3e ordre. (122-130).

Ces théorèmes se rapportent principalement aux pentagones gauches complets inscrits dans une surface cubique et tels que le point de rencontre de chaque côté avec la face opposée soit aussi sur la surface.

De Gasparis (*A.*). — Série pour le mouvement perturbé, y com-

pris les termes jusqu'aux septièmes puissances du temps. (134-142 et 151-158).

Caporali (*E.*). — Sur les tangentes menées à une courbe algébrique plane par un point multiple. (143-147).

Étant donnée une courbe F de l'ordre n, ayant un point $(n-r)^{\text{uple}}$ O

$$\left[n \geqq rs + \frac{1}{2}(r-1)(r-2)\right],$$

il y a système linéaire $n - rs - \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$ fois infini de courbes de l'ordre $n - s$ passant par O avec $n - s - 2r + 2$ branches et contenant les points de contact des tangentes menées par O à la courbe F.

Fergola (*E.*). — Observation de la comète b, 1881 au cercle méridien de Repsold. (161).

Angelitti (*F.*). — Sur la détermination des ascensions droites des étoiles en zone. (169-177).

Rubini (*R.*). — Commémoration de F. Padula. (181-198).

Salvatore-Dino (*N.*). — Sur l'intersection de deux surfaces du 2e degré. (212-213).

Construction de l'intersection avec la règle et le compas, en employant les méthode de la Géométrie descriptive.

De Gasparis (*A.*). — Quelques théorèmes sur les ellipses instantanées planétaires. (219-227).

Contarino (*F.*) et *Angelitti* (*F.*). — Observations micrométriques de la comète Schæberle c, 1881, faites à l'observatoire de Capodimonte, avec l'équatorial de Reichembach. (228).

De Gasparis (*A.*). — Table pour la résolution numérique du problème de Képler. (236-237).

Angelitti (*F.*). — Ascension droite des étoiles en zone (240-247).

Padelletti (*D.*). — Sur l'équivalence astatique d'un système de forces dans la rotation autour d'un axe. (248-255).

L'auteur résume et généralise en partie les résultats de Minding, Darboux et Steichen sur ce sujet en donnant un exposé géométrique de la question.

De Gasparis (*A.*). — Autres séries pour les anomalies et le rayon vecteur dans les ellipses planétaires (à suivre). (260-264).

Année XXI, 1882.

De Gasparis (*A.*). — Autres séries entre l'anomalie et le rayon vecteur des ellipses planétaires (suite). (12-19).

Si, pour compter les angles, on prend pour point de départ l'aphélie au lieu du périhélie, on obtient des séries plus convergentes.

Padelletti (*D.*). — Observations sur la théorie des dynames (theory of screws). (31-44).

Une *dyname* (appelée *screw* par Stawell Ball qui en a donné la théorie) est l'ensemble d'un segment (force) et d'un couple dont le plan est perpendiculaire au segment. L'auteur montre l'analogie qui a lieu entre cette théorie et celle des complexes linéaires.

Masoni (*U.*). — Sur certaines courbes du quatrième ordre douées de points d'ondulation. (45-69).

Un point d'ondulation de la courbe est un point où la tangente a avec elle un contact du troisième ordre. Une courbe du quatrième ordre ne peut avoir plus de quatre ondulations réelles. L'auteur étudie les divers cas qui peuvent se présenter, et enfin le cas spécial d'une courbe du quatrième ordre possédant douze points d'ondulation.

Torelli (*G.*). — Sur les déterminants circulants. (83-91).

Un circulant est un déterminant tel que le suivant:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{vmatrix}.$$

L'auteur donne une extension de quelques théorèmes de Glaisher et de Scott, et de quelques relations de Stern et de Kummer.

De Gasparis (*A.*) — Première approximation d'une orbite avec cinq données, choisies de quatre observations. (104-106). Note II. (154-155).

On peut, à l'aide de cinq données, avoir la distance de la planète à la Terre

et le rayon vecteur. La sixième donnée n'est nécessaire que pour connaître tous les éléments de l'orbite. Dans la seconde Note, l'auteur fait l'application à l'orbite de Vesta.

De Gasparis (*A.*) — Sur une équation différentielle du deuxième ordre contenant seulement les distances mutuelles d'un nombre quelconque de masses qui s'attirent. (106-107).

L'équation est la suivante :

$$\frac{1}{2\Sigma m}\frac{d^2}{dt^2}\sum m_1 m_2 \rho_{12}^2 = 2f + \sum \frac{m_1 m_2}{\rho_{12}}.$$

Padelletti (*D.*). — Sur un calcul dans la théorie des dynames, analogue à celui des quaternions. (111-119).

Le calcul des quaternions ordinaires est effectué sur des vecteurs donnés en grandeur, direction et sens. L'auteur étudie des opérations analogues que l'on effectue sur des *segments* donnés en grandeur, *position* et sens, et plus généralement sur des dynames données. On a ainsi deux espèces de quaternions, ceux *de rotation* qui sont les ordinaires, et ceux *de translation*. Il en résulte aussi un opérateur nouveau, appelé *quaternion de torsion*. L'auteur étudie aussi le rapport et le produit dont les éléments sont des vecteurs, des segments, des dynames ou des quaternions, ainsi que la somme de deux quaternions de torsion.

Fergola (*E.*). — Sur quelques équations relatives à la théorie des fonctions elliptiques, et théorèmes de Géométrie qui s'y rattachent. (132-133).

Théorèmes (sans les démonstrations) relatifs aux polygones inscrits à un cercle et circonscrits à un autre.

Padelletti (*D.*). — Quelques corollaires d'un théorème du professeur Fergola. (155-157).

Ce travail se rapporte au précédent de M. Fergola. Le théorème est le suivant :

« Si deux cercles sont tels qu'un polygone de *n* côtés puisse être inscrit à l'un et circonscrit à l'autre, le barycentre des points de contact reste fixe sur la droite des centres de quelque manière que l'on fasse varier le polygone. Aux fonctions qui restent constantes lorsque le polygone varie sous les condition énoncées, et qui avaient été indiquées par M. Fergola, l'auteur joint d'autres fonctions ayant cette même propriété. Telle est, par exemple, la somme des carrés des distances des points de contact à un point fixe du plan. »

Trudi (*N.*). — Notices rétrospectives sur les corollaires déduits

par M. Padelletti de quelques récents théorèmes de M. Fergola. (170-172).

Contarino (*F.*) et *Angelitti* (*F.*). — Observations micrométriques de la grande comète de septembre 1892, faites à l'observatoire de Capodimonte. Première communication. (220-222).

Année XXII, 1883.

Padelletti (*D.*). — Sur la forme la plus simple des équations d'équilibre d'un système rigide gêné. (13-15).

L'auteur rattache cette question à la théorie des dynames, et établit une règle générale pour le choix des axes coordonnés propres à donner en chaque cas la forme plus simple aux équations. Il trouve ces équations pour les divers cas qui peuvent se présenter suivant que le système a une liberté de premier, deuxième, ..., cinquième ordre.

Brioschi (*F.*). — Détermination absolue de l'inclinaison magnétique à l'observatoire royal de Capodimonte, disposée par l'astronome professeur F. Brioschi et exécutée par les assistants-docteurs F. Contarino et Angelitti. (23-28).

Padelletti (*D.*). — Sur les analogies entre la théorie de l'astatique et celle des moments d'inertie. (29-48).

La raison de ces analogies peut être indiquée dans le fait suivant. En décomposant chaque force F_i suivant trois directions orthogonales, on peut substituer au système donné trois systèmes de forces parallèles, et, par conséquent, trois résultantes partielles A_1, A_2, A_3 appliquées aux centres P_1, P_2, P_3 de ces systèmes. Si l'on attribue aux points P_1, P_2, P_3 les masses A_1^2, A_2^2, A_3^2 on a un système matériel S qui conserve même masse, même barycentre et même moment d'inertie par rapport à tout plan ou axe de l'espace, indépendamment du choix des directions orthogonales que l'on prend pour décomposer les forces. Le système indiqué a aussi un moment d'inertie constant par rapport à toute droite qui peut devenir axe central. Ce même système est intimement lié à tous les éléments que l'on rencontre dans la théorie des moments d'inertie et dont on peut avoir une interprétation dans la théorie de l'astatique. Parmi les résultats nouveaux de ce travail il faut mentionner la génération du complexe des axes centraux, comme lieu des droites dont on peut conduire des plans tangents orthogonaux à des hyperboloïdes du système triple de quadriques homofocales. L'étude est faite en supposant le système de forces en position tout à fait arbitraire.

Contarino et *Angelitti* (*F.*). — Observations micrométriques de

la grande comète de septembre 1882 faites à l'observatoire royal de Capodimonte. Deuxième communication. (48-50).

Intrigila (*C.*). — Sur le tétraèdre. (69-92).

Une extension au tétraèdre des propriétés du cercle des neuf points est connue depuis un travail de Prouhet (*Nouvelles Annales*, 1863). Il existe une sphère des 12 points. Cette question a été traitée ensuite par M. Bellavitis (*Atti dell' Istituto Veneto*, 3ᵉ série, t. VIII) et d'autres, mais toujours en se bornant au cas du tétraèdre orthogonal, c'est-à-dire dont les hauteurs se rencontrent en un point. L'auteur reprend cette étude pour un tétraèdre quelconque.

Caporali (*E.*). — Sur le système de deux formes binaires cubiques. (95-109).

L'auteur donne les formes fondamentales du système, quelques relations nouvelles entre ses covariants, et la recherche de l'autre involution cubique ayant mêmes éléments doubles avec une involution cubique donnée.

Masoni (*U.*). — Sur les connexes coniques et en particulier sur les systèmes de droites du 2ᵉ ordre. (145-164).

On établit une correspondance algébrique entre les coordonnées d'un point et celles d'une droite dans l'espace. A tout point correspond un complexe. En prenant seulement les éléments correspondants qui *s'appartiennent* l'un à l'autre, on a une variété de quatre dimensions, que l'auteur appelle *connexe conique*. A tout point correspond un cône, dont l'ordre est le *degré* du connexe, et à toute droite correspond un groupe de points dont le nombre est l'*ordre* du connexe. L'auteur, après avoir exposé des généralités, étudie les connexes coniques du premier degré et d'ordre quelconque. Puis il donne quelques résultats nouveaux relatifs aux systèmes de droites du 2ᵉ ordre en les considérant dans leurs rapports avec les connexes coniques.

Amodeo (*F.*). — Sur certaines propriétés du mouvement tautochrone d'un point le long d'une courbe à frottement ou dans un milieu résistant. (175-190).

Extension de quelques propriétés connues au cas d'un point soumis à une force quelconque, centrale ou parallèle à une direction donnée. L'auteur étudie aussi un mouvement qu'il appelle *hypertautochrone* dans lequel le temps n'est pas une constante, mais une fonction donnée de l'arc initial.

Del Pezzo (*P.*). — Sur la courbe hessienne. (203-218).

La hessienne d'une courbe générale n'a pas de points doubles. La démonstration rigoureuse de cette proposition est donnée par l'auteur en faisant voir que l'hypothèse d'un point double dans la hessienne porte à écrire l'équation de la courbe fondamentale sous une forme propre à mettre en évidence le dé-

faut de quelques constantes. C'est bien la méthode suivie par Geiser (*Annali di Matematica*, 2e série, t. IX : *Sulla teoria delle curve del 4e ordine*), mais l'auteur examine plus complètement les diverses espèces de points doubles de la hessienne. Il trouve aussi un cas nouveau, dans lequel les premières polaires des points d'une droite ont en commun un point d'inflexion. Il étudie enfin quelques courbes particulières du 4e ordre dont la hessienne a des points doubles.

De Gasparis (*A.*). — Sur une série pour le calcul numérique des perturbations planétaires. (236-247).

Mollame (*V.*). — Nouvelle série de fonctions substituables avec avantage à celles de Sturm dans les calculs pour déterminer le nombre des racines réelles d'une équation algébrique. (256-267).

De Gasparis (*A.*). — Formules et type numérique pour le calcul de la variation du grand semi-axe de l'orbite de Vesta, produite par l'action de Jupiter. (272-277).

De Gasparis (*A.*). — Sur les déterminations absolues des éléments du magnétisme terrestre à l'observatoire royal de Capodimonte. (295-297).

Fergola (*E.*). — Sur la latitude de l'observatoire royal de Capodimonte. (312-314).

Caporali (*E.*). — Relation sur le Concours au prix académique de 1882. (314-320).

Le thème proposé était la recherche des conditions de périodicité dans une transformation birationnelle entre deux plans superposés. La relation détaillée de M. Caporali se rapporte au travail de Kantor, le seul présenté et à qui le prix fut décerné.

Année XXIII, 1884.

Masoni (*U.*). — Sur le choc des corps et sur le mouvement d'un corps pesant entre deux milieux résistants. (39-47).

L'auteur traite principalement le cas où le choc produit un rebondissement. Puis il suppose qu'un corps pesant rencontre la surface horizontale d'un liquide, et cherche les conditions pour que le corps, après avoir pénétré dans ce liquide, puisse remonter. Ici, il y a une erreur fondamentale, car le corps est censé devoir remonter par effet de la *résistance du liquide* (?) et indépendamment

de tout rapport des poids spécifiques du corps et du liquide. Toutefois les formules donnent une réponse très juste. En effet, l'auteur trouve que le corps doit remonter lorsqu'on a

$$\int_0^{s_1} e^{2\int_0^s f(s)\,ds}\,ds < 0,$$

et cela est bien vrai, car cette intégrale peut aussi bien devenir négative qu'une pierre peut remonter dans l'eau après y avoir été enfoncée ! Cependant l'auteur se borne à reconnaître cette impossibilité dans le cas où $f(s)$ est une constante. Le cas d'un corps qui rebondit sur l'eau est aussi traité par l'auteur d'une manière peu satisfaisante; il suppose, sans aucun fondement, que la réaction *normale* de la surface liquide soit, comme le frottement, proportionnelle au carré de la vitesse.

Padelletti (*D.*). — Sur une extension de la notion de pôle et de caractéristique en Cinématique. (54-55).

En supposant dans l'espace un plan mobile, celui de ses points dont la vitesse est normale au plan est le *pôle*, et ceux qui ont une vitesse dirigée dans le plan forment une droite appelée *caractéristique*. L'auteur étend ces propriétés à une surface quelconque.

Del Pezzo (*P.*). — Sur les systèmes de coniques. (61-73).

La première réponse à la question relative au nombre de coniques qui, dans un système simplement infini, satisfont à une condition donnée, a été celle de De Jonquières, qui trouva ce nombre égal à un produit de deux facteurs dépendant l'un du système et l'autre de la condition. Ensuite Chasles donna à ce nombre la forme bien connue $\alpha\mu + \beta\nu$, et le théorème de Chasles a été étendu par M. Cremona aux systèmes doublement infinis. Halphen montra la nécessité de distinguer trois espèces de systèmes suivant les singularités qu'ils possèdent, et donna un théorème relatif au cas des singularités extraordinaires. L'auteur obtient les résultats de Halphen par une voie différente, et puis détermine à quels systèmes doublement infinis reste applicable le théorème de Cremona. Cette étude est préparée par des recherches remarquables sur les systèmes doublement infinis et sur leurs singularités.

Mollame (*V.*). — [Quelques relations entre des sommes de produits de nombres entiers consécutifs]. (73-74).

Ce n'est pas une Note, mais une courte relation. Nous en faisons mention parce qu'elle renferme trois ou quatre résultats.

Padelletti (*D.*). — Sur le centre des forces dans le plan. (74-78).

Ce Travail se rattache à l'autre du même auteur : *Sur les analogies entre la théorie de l'astatique et celle des moments d'inertie* (*Voir* ci-dessus). L'auteur forme des systèmes analogues au système S de cet autre Mémoire et trouve la relation qui a lieu entre ces systèmes et le *centre des forces*, c'est-

à-dire le point autour duquel tourne la résultante, lorsque les forces tournent toutes d'un même angle autour de leurs points d'application.

De Gasparis (*A.*). — Sur les perturbations planétaires spéciales. (88-92).

Masoni (*U.*). — Sur les forces impulsives ayant même action sur un même point d'un système rigide. (97-105).

Les droites d'action de ces forces forment une congruence linéaire. Après le cas général, l'auteur étudie celui où le mouvement se réduit à une rotation autour d'un axe, et donne la distribution des axes permanents et de percussion, correspondant respectivement à des axes de percussion et à des axes permanents qui passent par un même point. Il y a une objection à faire sur une conclusion que l'auteur donne dans les premières pages. Il trouverait qu'il y a une certaine quadrique (paraboloïde hyperbolique) $\Delta = 0$ telle qu'en appliquant une force finie à l'un quelconque de ses points, un certain point Q du système donné reste fixe. Cela est impossible, car en prenant trois points Q, Q', Q" du système, on trouverait trois paraboloïdes hyperboliques Δ, Δ', Δ'' et toute impulsion donnée à l'un quelconque de leurs points communs aurait pour effet de laisser en repos le système donné.

Masoni (*U.*). — Sur les dérivées d'ordre quelconque de la fonction potentielle, l'attraction étant proportionnelle à l'inverse de la $n^{\text{ième}}$ puissance de la distance. (106-108).

La relation trouvée par l'auteur est applicable à un espace d'un nombre quelconque de dimensions. Pour les dérivées du 2ᵉ ordre, on retrouve comme cas particulier l'équation de Jellett.

Padelletti (*D.*). — Sur les systèmes de forces impulsives. (140-143).

Les propriétés des droites d'action des forces impulsives et autres analogues sont trouvées par l'auteur d'une manière très simple au moyen des notions de *coordonnées d'un système de forces* et de *coordonnées d'un mouvement infiniment petit*.

Fergola (*E.*). — [Notice sur N. Trudi]. (149-150).

Année XXIV, 1885.

Fergola (*E.*). — Sur une série d'observations instituées dans les observatoires de Washington et de Lisbonne suivant un plan recommandé par la Commission géodésique internationale. (59-61).

Govi (*G.*). — Document inédit relatif à la lunette et antérieur à la publication du *Sidereus nuntius* de Galilée. (61-68).

Lettre de Serge Venturini au marquis J.-B. Manso, datée de Rome, 26 février 1610.

Masoni (*U.*). — Quelques considérations sur la dyname sollicitante et sur la torsion engendrée dans le mouvement d'un système rigide. (85-89).

L'auteur recherche les relations qui doivent avoir lieu entre les coordonnées de la torsion lorsque les coordonnées de la dyname satisfont à certaines relations données. Il recherche aussi les conditions pour qu'il y ait une *fonction de dynames*, c'est-à-dire une fonction dont les dérivées par rapport aux coordonnées du système soient les coordonnées de la dyname.

Pittarelli (*G.*). — Sur les courbes du troisième ordre à point double. (111-121).

L'auteur étudie particulièrement la représentation paramétrique. Il donne l'équation symbolique de la courbe, celle des tangentes d'inflexion, la réduction à la forme canonique et quelques propriétés de la hessienne et de la cayleyenne. Par exemple, il démontre que la hessienne et la courbe fondamentale sont homologiques; le point double est le centre, et la droite des inflexions est l'axe de cette homologie.

Grassi (*G.*). — La théorie cinétique des aériformes appliquée à l'étude de l'atmosphère. (145-154).

Pittarelli (*G.*). — Les éléments imaginaires dans les formes binaires cubiques. (162-164).

Construction du groupe hessien d'une cubique binaire représentée par une conique; et construction des deux éléments imaginaires conjugués d'une forme cubique, étant donné l'élément réel et les deux éléments du couple hessien. Autres constructions relatives à la correspondance (1, 2) entre les éléments harmoniques du 1er et du 2e ordre par rapport à la forme cubique.

Del Pezzo (*P.*). — Sur les quadriques polaires réciproques d'elles-mêmes par rapport à une autre. (165-179).

Sturm avait déjà étudié les systèmes de quadriques polaires réciproques d'elles-mêmes par rapport à une autre et touchant cette dernière suivant une conique. L'auteur reprend cette étude en y ajoutant celle de l'autre système de quadriques qui ont la même propriété polaire, et coupent la quadrique fondamentale suivant un quadrilatère gauche. Il appelle *conjointes*, deux quadriques dont l'une est polaire réciproque d'elle-même par rapport à l'autre, et donne la formation d'un système de huit quadriques et d'un autre système de dix quadriques, conjointes deux à deux.

Del Pezzo (*P.*). — Sur les surfaces d'ordre n dans l'espace de $n+1$ dimensions. (212-216).

Il s'agit des surfaces F_2^n (deux dimensions) qui sont dans un espace S_{n+1} sans être renfermées dans un espace d'un nombre moindre de dimensions. Elles sont toutes réglées et rationnelles excepté une surface du 4ᵉ ordre dans S_5. Ces surfaces peuvent toutes être projetées dans l'espace ordinaire S_3 suivant des quadriques.

Pittarelli (*G.*). — Les courbes du troisième ordre et de la quatrième classe. Note I. (217-225). Note II. (225-233).

Les coordonnées d'un point d'une cubique peuvent s'exprimer par des fonctions elliptiques d'un paramètre. Lorsque la courbe a un point double, ou un point isolé, au lieu des fonctions elliptiques interviennent des fonctions circulaires ou hyperboliques. Dans la seconde Note, l'auteur traite cette même question dans l'hypothèse que les coordonnées soient proportionnelles à trois formes cubiques.

De Gasparis (*A.*). — Sur le calcul des perturbations planétaires pour une longue période de temps. (233-245).

Torelli (*G.*). — Sur le système de plusieurs formes binaires cubiques. (258-261).

Relations entre invariants et covariants. Solution du problème suivant :

« Étant U une cubique binaire et V, H ses covariants cubique et quadratique, représenter toute autre cubique par $\lambda U + \mu V + \rho H$, λ et μ étant deux constantes et ρ une forme linéaire. »

Brambilla (*A.*). — Sur quelques cas particuliers de la courbe gauche rationnelle du 4ᵉ ordre. (279-298).

Étude de la courbe double de la développable osculatrice d'une quartique gauche rationnelle dans les cas particuliers suivants : que la quartique ait deux droites osculatrices, qu'elle soit équianharmonique, qu'elle soit harmonique, qu'elle soit harmonico-équianharmonique. Pour le cas de la quartique équianharmonique, la développable a une conique triple, enveloppe des plans qui coupent la quartique équianharmoniquement. L'auteur fait observer l'identité de cette courbe avec la quartique signalée par M. Lie dans ses *Untersuchungen über algebraische Minimalflächen* (*Math. Ann.*, Bd. XV).

Loria (*G.*). — Sur quelques propriétés métriques de la cubique gauche osculatrice au plan de l'infini. (299-309).

Étude analytique faite au moyen de la représentation paramétrique. L'auteur obtient outre les résultats déjà trouvés par Schröter (*Math. Ann.*, Bd. XXV) par voie synthétique, des résultats nouveaux, dont une partie est relative au tétraèdre d'osculation.

Année XXV, 1886.

Amodeo (*F.*). — Sur les coniques bitangentes à deux coniques. (65-68).

Énoncés sans démonstrations.

Torelli (*G.*). — Quelques relations entre les formes invariantives d'un système de formes binaires. (126-134).

Extension du théorème de Clebsch par lequel on exprime le produit des déterminants de deux couples de formes binaires par ces mêmes formes. Au déterminant fonctionnel l'auteur substitue celui des $r^{\text{ièmes}}$ dérivées d'un système de $r+1$ formes. Par l'application à des cas particuliers, il trouve des relations nouvelles entre les formes invariantives du système de deux cubiques ou de deux biquadratiques.

Capelli (*A.*). — Sur la permutabilité des opérations invariantives. (135-141).

Soient $x_i, y_i, \ldots, u_i$ ($i = 1, \ldots, n+1$), k séries de variables. Elles donnent lieu aux k^2 opérations invariantives

$$\begin{matrix} D_{xx}, & D_{xy}, & \ldots, & D_{xu}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ D_{ux}, & D_{uy}, & \ldots, & D_{uu}, \end{matrix}$$

étant

$$D_{pq} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \ldots + q_{n+1} \frac{\partial}{\partial p_{n+1}}.$$

Par ces opérations, on peut former l'opération plus générale

$$\Delta = \Sigma A\, D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \ldots D_{k^2}^{\alpha_{k^2}},$$

les A étant des constantes, et les D_i n'étant autre chose que les D_{pq}. L'auteur démontre que si une opération du type Δ est permutable avec toute autre du même type, elle doit être nécessairement symétrique par rapport aux k séries de variables.

Govi (*G.*). — Sur une lentille pour lunette, travaillée par Evangelista Torricelli et possédée par le Cabinet de Physique de l'Université de Naples. (163-169).

Del Pezzo (*P.*). — Sur les espaces tangents à une surface ou à une variété dans un espace de plusieurs dimensions. (176-180).

Cantone (*A.*). — Théorèmes sur la cubique gauche déduits de

l'étude d'une transformation involutive dans l'espace. (181-190).

La transformation est la correspondance harmonique sur les cordes de la cubique gauche.

Montesano (*D.*). — Sur quelques complexes-Battaglini de droites. (194-204).

Complexes dont les rayons rencontrent deux quadriques en des couples harmoniques de points. Le complexe étant donné, il y a une simple infinité de ces quadriques formant un système du quatrième ordre et de la quatrième classe.

Del Pezzo (*P.*). — Sur les projections d'une surface et d'une variété de l'espace de n dimensions. (205-213).

Dans un espace de n dimensions, les surfaces d'ordre m, n étant constant et m inférieur à une certaine limite, ou bien m étant constant et n supérieur à une certaine limite, sont toutes réglées. L'auteur établit cette proposition générale, et en déduit cette autre : une surface (qui ne soit pas un cône) de l'ordre n et de genre p est renfermée dans un espace de $n-p$ dimensions au plus. Il démontre ensuite qu'une variété de $i+1$ dimensions et d'ordre m, renfermée dans un espace de n dimensions, pour n constant et m inférieur à une certaine limite, ou bien pour m constant et n supérieur à une certaine limite, est toujours constituée par un nombre infini d'espaces S_i de i dimensions.

Pascal (*E.*). — Relations entre les ellipses centrales des aires, et les barycentres des volumes engendrés par celles-ci. (239-242).

Si l'on coupe un solide par des plans enveloppant un cylindre, le barycentre du solide est aussi le barycentre de la courbe décrite par le centre du second degré de la section par rapport à la génératrice, en attribuant à la courbe une densité proportionnelle au produit de l'aire par la distance du barycentre à la génératrice. L'auteur démontre ce théorème, et plusieurs propriétés relatives aux barycentres des solides engendrés par une aire plane dont le plan reste tangent à un cylindre suivant une droite fixe dans le plan de l'aire.

Padelletti (*D.*). — Sur les surfaces qui roulent l'une sur l'autre dans le mouvement d'un corps autour d'un point. (242-244).

Étant donnée une surface liée rigidement au corps, il y un nombre infini de surfaces sur lesquelles elle roule. Toutes ces surfaces passent par une même courbe et sont touchées le long de cette courbe par une même développable.

Pascal (*E.*) — Théorèmes barycentriques. (259-263).

En appliquant les résultats du Travail précédent (*Relations entre les*

ellipses, etc.) l'auteur donne une méthode pour la recherche du barycentre d'un solide engendré par une aire.

Del Re (*A.*). — Nouvelle construction de la surface du 5e ordre douée d'une courbe double du 5e ordre. (272-276).

On obtient cette surface par les intersections des plans d'une étoile avec les droites qui joignent les points correspondants de deux plans homographiques, liés projectivement à l'étoile. L'auteur donne aussi la génération du cône tangent au point triple, la construction et la configuration de ses dix droites, et une classification de ces surfaces fondée sur la configuration de leurs droites.

Fergola (*E.*). — Nouvelle détermination de la différence de longitude entre Naples et Rome. (278-280).

2e série, t. I (Année XXVI), 1887.

Pascal (*E.*). — Sur la construction du polygone régulier de 257 côtés. (33-39).

Construction géométrique par l'application de la méthode employée par Schröter (*Journal de Crelle*, t. LXXV) pour le polygone de 17 côtés, et de quelques résultats analytiques de Richelot (*Ibid.*, t. IX) relatifs au polygone en question.

Del Pezzo (*P.*). — Sur une propriété fondamentale des surfaces et des variétés renfermées dans les espaces de plusieurs dimensions. (40-43).

L'auteur a démontré ailleurs que les variétés d'ordre m, renfermées dans un espace de n dimensions, pour m constant et n inférieur à une certaine limite, ou bien pour n constant et m supérieur à une certaine limite, sont toutes réglées. Ici, il complète ce résultat en déterminant ces limites.

Emery (*G.*). — Sur la position de l'axe central des moments des quantités de mouvement dans un système matériel rigide animé d'un mouvement sphérique. (97-100).

En assimilant à un système de forces le complexe des quantités de mouvement, on peut les composer en les réduisant à une dyname équivalente. L'axe central de celle-ci, ou axe des quantités de mouvement, a des propriétés remarquables.

Capelli (*A.*). — Observations sur les relations qui peuvent avoir lieu identiquement entre les opérations invariantives. (110-115).

Étant D_{xx}, D_{xy}, ..., les opérations élémentaires entre plusieurs séries de variables $\left(D_{pq} = q_1\frac{\partial}{\partial p_1} + q_2\frac{\partial}{\partial p_2} + \ldots\right)$, l'opération la plus générale

$$\Delta = F(D_{xx}, D_{xy}, \ldots),$$

où F est le symbole d'une fonction rationnelle entière à coefficients constants, dépend aussi de l'ordre des D_{pq} en chaque terme du développement. Il s'ensuit de là que certaines propriétés des fonctions rationnelles entières n'ont plus lieu lorsqu'on remplace les variables par les D_{pq}, tandis que certaines autres propriétés sont conservées. De ce dernier nombre est la suivante : Si le produit $\Delta_1\Delta_1$ de deux opérations est identiquement nul, un des facteurs au moins doit l'être aussi.

Pannelli (*M.*). — Sur les transformations multiples involutives de deux espaces. (153-161).

La correspondance est établie en prenant trois faisceaux de surfaces dans l'un des deux espaces, et trois faisceaux dans l'autre, liés projectivement aux premiers.

Del Re (*A.*). — Corrélations qui transforment la quartique gauche à deux inflexions en la développable de ses plans bitangents. (167-172).

Les couples des points de contact des plans bitangents se correspondent homographiquement. Les génératrices de la développable coupent les faces du tétraèdre des tangentes trisécantes et des unisécantes appuyées à ces tangentes, suivant des groupes projectifs de rapport anharmonique donné. Après avoir démontré ces propriétés, l'auteur trouve la représentation paramétrique de la développable bitangente, et il en déduit toutes les corrélations ayant la propriété indiquée dans le titre. Il y en a deux séries. Celles de l'une sont toutes des polarités; dans l'autre, il n'y a que deux polarités.

Pascal (*E.*). — Sur un nouveau symbole dans la théorie des formes binaires à deux séries de variables. (200-206).

L'auteur indique par $\binom{a}{b}$ l'échange de a avec b, et par $\binom{a}{y}$ l'échange de a avec y en un seul facteur a_x combiné avec un seul facteur b_y dans une expression

$$a_x^n b_y^m.$$

Comme on a

$$a_y b_x + (xy)(ab) = a_x b_y,$$

il est

$$\binom{a}{b} + \binom{a}{y} = 1.$$

Au moyen de ce nouveau symbole, la formule de Gordan, qui donne le développement de la forme en une série ordonnée par les puissances de (xy), et dont les coefficients sont des polaires, s'obtient comme une identité numé-

rique entre certaines combinaisons de coefficients binomiaux. L'auteur déduit aussi le théorème relatif aux formes symétriques par rapport aux deux séries de variables, dont le développement ne contient que les puissances paires de (xy), quelques relations entre les coefficients $\alpha_\lambda^{(k)}$ de la formule de Gordan, et enfin un nouveau développement par les puissances de (xy), dont les coefficients ne sont pas des polaires.

Amodeo (*F.*). — Sur un connexe particulier (2, 2). (216-220).

Énoncés sans démonstrations.

Capelli (*A.*). — Détermination des opérations invariantives, entre deux séries de variables, permutables avec toute autre opération de même espèce. (236-242).

Étant, comme dans les autres travaux du même auteur sur ce sujet,

$$D_{pq} = q_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + q_2 \frac{\partial}{\partial p_2} + \ldots,$$

et si l'on pose

$$D_{xx} + D_{yy} = K,$$

et

$$\begin{aligned} D_{yy} D_{xx} + D_{xx} - D_{yx} D_{xy} \\ = D_{xx} D_{yy} + D_{yy} - D_{xy} D_{yx} = H, \end{aligned}$$

on a que l'opération la plus générale entre les deux séries x et y, permutable avec toute autre opération entre les mêmes séries, est exprimée par

$$\Delta = F(K, H),$$

F étant le symbole d'une fonction rationnelle entière à coefficients constants arbitraires.

Pascal (*E.*). — Sur une méthode pour exprimer une forme invariantive quelconque d'une binaire cubique par celles du système complet. (245-251).

L'auteur décompose la forme fondamentale en ses facteurs linéaires, et établit le type des termes dont se compose une forme invariantive de la cubique au moyen des coefficients de ces facteurs, il exprime, par ces mêmes facteurs, les formes du système complet, et introduit ces expressions dans celle de la forme invariantive donnée.

Fergola (*E.*). — Positions apparentes de quelques étoiles de l'*Eridanus* observées au cercle méridien de Repsold à l'observatoire royal de Capodimonte. (251-257).

T. II (Année XXVII), 1888.

Del Re (*A.*). — Sur certains systèmes de quartiques et sextiques développables qui se présentent dans les transformations linéaires d'une certaine quartique gauche en elle-même. (37-45).

C'est la quartique gauche de 2e espèce, dans laquelle les points de contact des plans tangents stationnaires coïncident deux à deux. Trois homographies étant données, qui changent la courbe en elle-même, l'auteur trouve l'enveloppe des plans déterminés par les trois points de la courbe correspondant à un même point dans les trois homographies. Il résout aussi cet autre problème : « Ayant obtenu l'enveloppe précédente, chercher les transformations d'ordre minimum, qui la changent en la courbe. »

Pascal (*E.*). — Sur une application de la méthode pour exprimer une forme invariantive d'une binaire cubique au moyen de celle du système complet. (67-72).

Expression de la résultante d'une cubique et d'une n^{ique} au moyen des composés (Ueberschiebungen) des deux formes entre elles. Application au cas d'une cubique et d'une quartique.

Masoni (*U.*) — Sur une nouvelle formule proposée pour le calcul de la portée dans les bouches à barrage. (73-79).

Marcolongo (*R.*). — Sur la représentation conforme de la pseudo-sphère et ses applications. (111-117).

Nannei (*E.*). — Les surfaces hypercycliques. (119-121).

Montesano (*D.*). — Sur la courbe gauche du 5e ordre et de genre 1. (181-188).

Capelli (*A.*) — Sur une loi de réciprocité pour les opérations invariantives entre deux séries de variables *n*-aires. (189-194).

Del Re (*A.*). — Les surfaces polaires conjointes par rapport à un connexe de plans et de droites et à une surface algébrique fondamentale. (349-362).

Étant donnés un connexe algébrique de plans et de droites, une surface algébrique (*fondamentale*) et un point (*fondamental*), l'auteur cherche le lieu des points tels que le plan polaire de chacun d'eux par rapport à la surface fondamentale soit un des plans tangents de l'enveloppe qui, dans le con-

nexe donnée correspond à la droite joignant le même point au point fondamental.

Marcolongo (*R.*). — Sur l'équilibre d'un fil flexible et inextensible. (363-368).

L'auteur obtient les équations d'équilibre sous une forme tout à fait analogue à la forme hamiltonienne des équations du mouvement. Comme application de ses résultats, l'auteur traite le cas de la chaînette.

Pascal (*E.*). — Sur quelques formes invariantives du système de deux binaires biquadratiques. (402-409).

Étant f, φ les deux formes biquadratiques, et

$$\rho = 4(f,\varphi), \qquad \sigma = \frac{16}{9}(f,\varphi)^2, \qquad g = (\rho,\rho)^4 + \frac{3}{5}(\rho,\sigma)^2 - \frac{9}{25}\sigma^2,$$

l'auteur donne l'expression, au moyen des formes fondamentales, de l'invariant

$$I = (\rho,\rho)^4 - \frac{9}{10}(\sigma,\sigma)^2,$$

et du covariant

$$\Theta = -(\rho,g)^2 - \frac{3}{10}\sigma g + \frac{1}{6}\rho.$$

Marcolongo (*R.*). — Sur le théorème de Poisson. (419-423).

Si dans un problème de Mécanique existe l'intégrale des aires relative à l'un des plans coordonnés et l'intégrale du centre de gravité relative à l'un des axes de ce plan, il existera aussi l'intégrale analogue relative à l'autre axe du même plan.

Del Re (*A.*). — Sur les systèmes polaires réels bitangents à des systèmes polaires réels donnés. (424-429).

L'auteur traite la théorie géométrique des coniques bitangentes à deux coniques données; en représentant les solutions imaginaires suivant les vues de Staudt. Au lieu d'une conique (réelle ou imaginaire), il considère le système polaire correspondant, en se bornant au cas où ce système est réel, c'est-à-dire où tout point réel a une polaire réelle et réciproquement. Deux de ces systèmes sont *bitangents* lorsque l'homographie qui en est le produit est une homologie.

De Gasparis (*A.*). — Observations de la comète 1888, *a* (Sawerthal) faites à l'observatoire royal de Capodimonte. (440-442).

Marcolongo (*R.*). — Sur la variation d'une intégrale définie et

sur la théorie des équations aux dérivées du premier ordre. (500-508).

Étant

$$U = \int_{x_0}^{x_1} V\,dx,$$

on a

$$\delta U = \int_{x_0}^{x_1} \delta V\,dx + \int_{x_0}^{x_1} V\,\delta x.$$

L'auteur applique cette formule à la recherche de la variation de la fonction caractéristique de Hamilton, et établit le théorème de Jacobi, par lequel l'équation aux dérivées partielles du premier ordre, satisfaite par la fonction caractéristique, a une intégrale complète, que l'on peut calculer au moyen d'une intégrale définie, après avoir intégré les équations canoniques du mouvement. Ce procédé de Jacobi présente un cas d'exception lorsque le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial q_1}{\partial p_1^{(0)}} \frac{\partial q_2}{\partial p_2^{(0)}} \cdots \frac{\partial q_\mu}{\partial p_\mu^{(0)}} = 0,$$

les q_i étant les coordonnées du système, et

$$p = \frac{\partial T}{\partial q};$$

dans ce cas, l'auteur obtient la solution sous la forme donnée par Mayer, en additionnant à l'intégrale définie

$$\int_0^t \left(\sum p \frac{\partial H}{\partial p} - H\right) dt,$$

une fonction arbitraire des constantes d'intégration, et en la déterminant d'une manière convenable. Enfin, il résout les problèmes suivants :

« 1° En connaissant deux solutions complètes, déduire l'une de l'autre. »

« 2° D'une solution générale déduire une solution complète donnée. »

T. III (Année XXVIII), 1889.

Del Pezzo (*P.*). — Équation d'une courbe du cinquième ordre douée de cinq rebroussements. (46-49).

Capelli (*A.*). — Sur certains développements de déterminants. (58-63).

De Gasparis (*A.*). — Notices relatives à quelques appareils autorégistrateurs existant dans l'observatoire royal de Capodimonte. (64-69).

Battaglini (*G.*). — Notice nécrologique de A. Genocchi. (79).

Pirondini (*G.*). — Sur la construction des courbes dans l'espace. (87-95).

On peut déterminer une courbe plane en connaissant les coordonnées orthogonales en fonction de l'arc, et une courbe gauche en connaissant les coordonnées en fonction de l'arc de la projection sur l'un des plans coordonnés.

Marcolongo (*R.*). — Quelques théorèmes sur les fonctions cylindriques de première espèce. (96-99).

On a

$$\int_0^1 \frac{J_n(ax)\,J_{n-1}(ax)\,dx}{x} = \frac{J_n(a)\,J_{n+1}(a) - a\,J_{n-1}(a)\,J_{n+1}(a) - a\,J_n^2(a)}{2n-1},$$

puis en supposant

$$J_n(a) = J_n(b) = 0,$$

on a aussi

$$\int_0^1 x\,\frac{d\,J_n(ax)}{dx}\,\frac{d\,J_n(bx)}{dx}\,dx + n^2 \int_0^1 \frac{J_n(ax)\,J_n(bx)}{x}\,dx = 0,$$

et pour $a = b$

$$\int_0^1 x\left[\frac{d\,J_n(ax)}{dx}\right]^2 + n^2 \int_0^1 \frac{J_n^2(ax)}{x}\,dx = \frac{a^2}{2}\,J_{n+1}^2(a).$$

L'auteur généralise aussi ces deux dernières relations en considérant, au lieu des fonctions cylindriques, les fonctions P_n.

Del Re (*A.*). — Sur les réciprocités birationnelles nulles dans le plan. (101-107).

Padelletti. — Sur la composition graphique des forces dans l'espace. (125-127).

Marcolongo (*R.*). — Sur certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. (149-156).

L'auteur donne le développement en série d'une fonction K qui, dans un espace indéfini limité par un plan indéfini, satisfait à l'équation

$$\Delta^2 K = F,$$

et prend des valeurs données arbitrairement sur le plan limite, la fonction F satisfaisant dans le même espace à l'équation $\Delta^2 F = 0$. Il fait aussi dépendre de ce problème celui de l'intégration d'un certain système de trois équations aux dérivées partielles, ainsi que l'intégration d'un autre système rencontré

Soit un cône de révolution circonscrit au paraboloïde elliptique

$$\frac{Y^2}{p} + \frac{Z^2}{q} + 2X = 0 \qquad (p > 0,\ q > 0,\ p > q);$$

son sommet est dans le plan $Y = 0$; désignons par x et z ses deux autres coordonnées, et supposons, par exemple, z positif.

L'aire σ de la calotte du paraboloïde, qui a pour base le plan polaire du sommet du cône, est une fonction entière du troisième degré de z, et elle est donnée par la formule

$$\sigma = \frac{\pi p}{p^{\frac{3}{2}}(p-q)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{3p-q}{3} z^3 - q(p-q)^2 z\right] - \frac{2}{3}\pi pq.$$

Cette formule est bien plus simple que celle qui exprime (à l'aide des fonctions elliptiques) l'aire d'une calotte ellipsoïdale limitée par une conique le long de laquelle le cône circonscrit à l'ellipsoïde est de révolution.

Humbert (*G.*). — Expression de quelques nouvelles aires sur le paraboloïde elliptique. (17-19).

M. Humbert exprime, à l'aide des fonctions elliptiques, l'aire comprise sur un ellipsoïde entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à une sphère, le centre de la sphère étant supposé sur un des axes de la quadrique.

Si l'on applique cette formule au paraboloïde elliptique, les fonctions elliptiques disparaissent.

L'aire s comprise sur le paraboloïde elliptique

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} + 2x = 0,$$

entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite au paraboloïde et à une sphère de rayon R, ayant son centre sur l'axe du paraboloïde à une distance l_0 du sommet, est exprimée, en *fonction rationnelle* de R et de l_0, par la formule

$$s = 2\pi \frac{R}{p^{\frac{3}{2}} q^{\frac{3}{2}}}\left[2p^2q^2 + 2l_0 pq(p+q) + \frac{R^2}{3}(3p^2 + 3q^2 + 2pq)\right].$$

Godefroy. — Sur les courbes de Lamé. (20-25).

La note de M. Godefroy est relative aux rayons de courbure des courbes de Lamé et de leurs développées. Ce sujet, que l'auteur a déjà traité dans le *Journal de l'École Polytechnique* (LXIIe cahier), peut être abordé d'une manière plus simple, et le résultat lui-même, dans le cas des développées, peut être présenté sous une forme nouvelle.

Cellérier (*G.*). — Sur les principes généraux de la Thermodynamique et leur application aux corps élastiques. (26-43).

Les recherches de M. G. Cellérier ont pour but de déterminer les équations

générales qui permettent d'introduire, dans l'étude des corps élastiques, les termes d'ordre supérieur au premier par rapport aux grandeurs des déformations. Les préliminaires sont consacrés à quelques théorèmes relatifs à l'emploi des principes thermiques, en vue de préciser le nombre et le choix des variables indépendantes.

L'auteur cherche ensuite la valeur du travail infinitésimal développé par l'élément de volume d'un corps parfaitement élastique, quand il passe d'un état déjà déformé à un état infiniment voisin.

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées initiales d'un point matériel du système. Les coordonnées actuelles x, y, z dépendent de x_0, y_0, z_0 et d'un certain nombre de paramètres α, β, ...

$$x = F_1(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \ldots),$$
$$y = F_2(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \ldots),$$
$$z = F_3(x_0, y_0, z_0, \alpha, \beta, \ldots).$$

Si, pour abréger, on pose

$$\varphi_x = \frac{\partial F_1}{\partial x_0}, \quad \varphi_y = \frac{\partial F_1}{\partial y_0}, \quad \varphi_z = \frac{\partial F_1}{\partial z_0},$$
$$\psi_x = \frac{\partial F_2}{\partial x_0}, \quad \psi_y = \frac{\partial F_2}{\partial y_0}, \quad \psi_z = \frac{\partial F_2}{\partial z_0},$$
$$\chi_x = \frac{\partial F_3}{\partial x_0}, \quad \chi_y = \frac{\partial F_3}{\partial y_0}, \quad \chi_z = \frac{\partial F_3}{\partial z_0},$$
$$\Delta = \varphi_x\psi_y\chi_z + \varphi_y\psi_z\chi_x + \varphi_z\psi_x\chi_y - \varphi_x\psi_z\chi_y - \varphi_y\psi_x\chi_z - \varphi_z\psi_y\chi_x,$$

on aura pour expression du travail élémentaire $d\mathrm{L}$,

$$d\mathrm{L} = \upsilon_0\left[\left(p_{xx}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_x} + p_{xy}\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_x} + p_{xz}\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_x}\right)\delta\varphi_x + \ldots + \left(p_{xz}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_z} + p_{yz}\frac{\partial\Delta}{\partial\psi_z} + p_{zz}\frac{\partial\Delta}{\partial\chi_z}\right)\delta\chi_z\right],$$

υ_0 désignant le volume spécifique initial au point x_0, y_0, z_0, et p_{xx}, ... les pressions élastiques.

En appliquant à cette expression les considérations préliminaires, on peut déterminer la forme la plus générale de la fonction caractéristique, celle des pressions, et, par suite, celle des équations de l'équilibre intérieur d'un corps élastique homogène inégalement déformé en ses divers points, sans restriction aucune sur l'ordre de grandeur des déformations.

Mangeot. — De quelques propriétés des cubiques planes et gauches. (44-48).

Si l'on prend comme triangle de référence le triangle formé par trois droites parallèles aux trois asymptotes, l'équation de la courbe peut s'écrire

$$xyz + \varphi = 0,$$

φ étant une fonction du second degré où figurent les trois paramètres qui fixent la position du triangle de référence par rapport à celui des asymptotes.

On peut disposer de ces trois paramètres de manière à faire disparaître trois termes de la fonction φ. Parmi les formes auxquelles cette opération ramènent, les trois plus intéressantes sont

$$lyz + mzx + nxy, \quad lx^2 + my^2 + nz^2, \quad lx^2 + my^2 + n,$$

qui peuvent être obtenues respectivement de 3, 12 et 4 manières. Les diverses formes que l'on peut ainsi donner à l'équation d'une cubique plane mettent en évidence diverses propriétés de ces courbes, propriétés qui peuvent être étendues aux cubiques gauches.

Schlegel. — Sur le théorème de M. Haton de la Goupillière relatif au centre des moyennes distances. (49-51).

Bioche. — Sur les normalies des courbes. (51-52).

Si deux *normalies* (surfaces engendrées par des normales à une courbe) ont même courbure tout le long de leur directrice, elles se coupent sous un angle constant (c'est la propriété bien connue des normalies développables), ou bien elles admettent pour bissectrices des normalies développables.

Si deux normalies se coupent sous un angle constant, elles ont même courbure tout le long de leur directrice.

En particulier, si l'une est développable, l'autre, comme on le sait, l'est aussi.

Genty (*Max*). — Sur les involutions linéaires. (52-55).

L'auteur établit un théorème qui résout dans toute sa généralité le problème des points multiples d'une involution linéaire.

Carvallo. — Théorie du pied équilibriste du gyroscope Gervat. (55-61).

Le pied équilibriste est formé d'un fil métallique de $1^{mm},5$ de diamètre environ. Il se compose d'un demi-cercle vertical muni, au bas, d'un appendice qui a pour but de le faire reposer, sur le plan horizontal, par une partie rectiligne et perpendiculaire au plan du demi-cercle. Aux deux extrémités de la demi-circonférence, le fil est doublement recourbé de façon à former deux coussinets qui reçoivent les extrémités de l'axe de la toupie gyroscopique. Dans cette position, le plan moyen du tore de la toupie passe par la partie rectiligne du pied.

Si la toupie tourne sur elle-même avec une grande vitesse (environ 50 tours par seconde), le système semble être en équilibre stable; de là le nom de *pied équilibriste*. En réalité le pied exécute autour de la position apparente d'équilibre des oscillations manifestées par un son.

Tels sont les faits que M. Carvallo explique par la théorie en négligeant les frottements.

De son analyse il résulte que le mouvement apparent est une rotation autour

de la verticale. Cette rotation, insensible quand le pied est presque vertical, est accompagnée de deux vibrations l'une autour de la verticale, l'autre autour de la partie rectiligne du pied. Ce sont ces vibrations qui, par le jeu des forces centrifuges composées, maintiennent l'équilibre apparent.

Perott. — Sur les groupes de Galois. (61-65).

M. Perott montre comment il est possible d'engendrer chacun des trois groupes de Galois au moyen de trois opérations appartenant à l'exposant 2, ou opérations *réciproques*, comme les appelle Listing. L'auteur s'appuie sur les deux lemmes suivants :

1° Deux opérations réciproques commutatives non identiques, faisant partie d'un groupe associatif quelconque, engendrent un sous-groupe d'ordre 4;

2° Deux opérations réciproques non commutatives a et b, faisant partie d'un groupe associatif quelconque, engendrent un sous-groupe dont l'ordre est le double de l'exposant toujours supérieur à 2 auquel ab appartient.

Lucas (F.). — Sur la nature des grandeurs magnétiques et électriques. (67-69).

Raffy. — Sur une nouvelle classe de surfaces isothermiques et sur les surfaces déformables sans altération des courbures principales. (70-71).

Parmi les surfaces déformables sans altération des courbures principales, surfaces dont O. Bonnet a donné l'énumération complète, figure une classe étendue dont l'élément linéaire dépend de deux fonctions arbitraires, l'une X de x, l'autre Y de y,

$$ds^2 = -(x+y)^2 \frac{X'Y'}{(X+Y)^2} dx\, dy.$$

M. Raffy montre que ces surfaces ont leurs lignes de courbure isothermes et conservent cette propriété dans toutes les déformations qui n'altèrent pas leurs courbures principales.

Il étend cette propriété à toutes les surfaces admettant une série de déformations qui n'altèrent pas ces courbures.

Touche. — Transformation des équations générales du mouvement des fluides. (72-75).

Aux trois équations classiques de l'Hydrodynamique l'auteur substitue les suivantes

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = U - \frac{dv_1}{dt} - v_1 \frac{dv_1}{ds},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds'} = U' + v_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + v_1^2 \frac{d\alpha}{ds},$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds''} = U'' + v_1 \frac{d\alpha_1}{dt},$$

où ρ est la densité en un point du fluide, p la pression, t le temps, ds un élément de trajectoire, ds' un élément pris sur la normale et ds'' un élément pris sur la binormale à la trajectoire; U, U', U'' les projections des forces extérieures sur ces trois directions; v_1 la vitesse. Quant aux infiniments petits $d\alpha$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ voici leur signification. On considère l'élément de trajectoire $d\sigma$ qui au bout du temps dt passe par le point considéré A; si l'on projette $d\sigma$ sur le plan osculateur de la trajectoire au commencement du temps dt, $d\alpha_1$ sera l'angle de cette projection avec l'élément ds et $d\alpha_2$ l'angle de l'élément $d\sigma$ avec sa projection sur le plan osculateur. Si, à partir du point A, on porte sur la trajectoire la longueur ds, la tangente à la trajectoire, qui part de l'extrémité de cet axe fait, avec la tangente à la trajectoire en A, l'angle infiniment petit $d\alpha$.

Kobb. — Sur un point de la théorie des fonctions algébriques de deux variables. (76-80).

Chailan. — Sur le mouvement d'un système à liaisons complètes. (81-82).

Lorsqu'un système à liaisons complètes admet une position d'équilibre instable, s'il y a une fonction des forces, le système ne peut se fixer dans cette position au bout d'un temps fini.

Ce théorème suppose toutefois que la fonction des forces soit développable en série entière suivant les puissances de la variable unique dont elle dépend.

Demoulin. — Sur la relation qui existe entre les courbures totales de deux surfaces polaires réciproques par rapport à un paraboloïde de révolution. (83-84).

Soient S et S' deux surfaces polaires réciproques par rapport au paraboloïde de révolution

$$z = \frac{x^2+y^2}{2}.$$

A un point quelconque M de S correspond sur S' un point M' pôle du plan tangent en M par rapport au paraboloïde. Par les points M et M' menons, parallèlement à l'axe du paraboloïde, deux droites rencontrant cette surface aux points A et A'. Cela posé, on a entre les courbures totales $\frac{1}{R_1 R_2}$, $\frac{1}{R'_1 R'_2}$ des surfaces S, S' aux points M, M' la relation très simple

$$R_1 R_2 . R'_1 R'_2 = 16 \overline{FA}^2 \overline{FA'}^2,$$

F étant le foyer commun à toutes les sections méridiennes.

D'Ocagne. — Remarque sur la déformation des surfaces de révolution. (85-86).

Parmi les cas d'applicabilité énumérés par M. d'Ocagne, nous citons le suivant :

Si une courbe plane, en tournant autour d'une droite D, située dans son

plan, engendre une surface applicable sur la sphère, cette courbe, en tournant autour de toute droite parallèle à D et aussi située dans son plan, engendrera une surface applicable sur un tore.

Arnoux. — Technologie graphique; appareil pour la décomposition d'un polynome en facteurs. (87-92).

Demoulin. — Sur la congruence des axes centraux des complexes linéaires passant par trois droites données. (92-96).

Cette congruence jouit d'un grand nombre de propriétés intéressantes qui ont été mises en évidence par MM. Ball, Stahl, Waelsch. M. Demoulin en indique une nouvelle :

Jointe à une congruence du premier ordre et de la première classe, la congruence en question constitue l'intersection complète des complexes de Painvin relatifs à deux quadriques dégénérées.

Sélivanoff. — Quelques remarques sur les équations du cinquième degré. (97-109).

Parmi les résultats particuliers obtenus par l'auteur, signalons les suivants : Les équations du cinquième degré de la forme

$$x^5 \pm x + v = 0,$$

où v est un entier positif, ne sont pas résolubles par radicaux, quand elles sont irréductibles.

Les équations de la forme

$$x^5 + x - v = 0 \qquad (0 < v < 7770)$$

ne sont résolubles par radicaux que pour

$$v = 1,\ 2,\ 6,\ 34,\ 246,\ 1028,\ 3130.$$

L'équation

$$x^5 - x - v = 0$$

n'est pas résoluble par radicaux si v n'est pas multiple de 15.

Si v est un entier compris entre 0 et 7770, elles ne sont résolubles que pour

$$v = 15,\ 30,\ 240,\ 1020,\ 3120.$$

Lucas (*F.*). — Propriétés d'un système de points dans un plan. (109-112).

L'auteur considère dans le plan un système quelconque de p points M ayant pour affixes les racines de l'équation

$$F(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p) = 0.$$

Les *points centraux* C sont définis par la propriété qu'aurait chacun d'eux

de rester en équilibre en présence d'attractions inversement proportionnelles aux distances exercées par les points M doués de l'unité de masse.

M. F. Lucas montre que le produit des carrés des distances mutuelles d'un système de p points M est égal à p^p fois le produit des distances de ces points M à leurs points centraux C.

En plaçant les points M aux sommets d'un polygone régulier de rayon R, on voit aisément que le produit des carrés des distances mutuelles des p sommets est égal à $p^p R^{p(p-1)}$.

Frolov. — Sur les racines primitives. (113-128).

Euler croyait qu'on ne pouvait découvrir que par tâtonnements, c'est-à-dire en essayant différents nombres, les racines primitives de module premier. Gauss a donné une méthode très ingénieuse pour les trouver sans tâtonnement; mais cette méthode est tellement compliquée qu'on ne l'emploie guère. Poinsot proposa de déterminer les racines primitives d'un module premier m par l'exclusion des résidus des puissances dont les exposants sont les facteurs premiers du nombre $m - 1$. Mais cette méthode est impraticable dès que le module est un peu considérable.

M. Frolov expose un procédé qui permet de découvrir rapidement, sans aucun essai, les racines primitives de la plupart des nombres.

Touche. — Transformation de l'équation de continuité en Hydraulique. (129-131).

Genty (Max). — Sur les système collinéaires. (131-134).

Caronnet. — Sur des couples de surfaces applicables. (135-140).

Étant données deux surfaces applicables l'une sur l'autre, la distance M_1M_2 des points correspondants varie en général avec la position de ces points sur les surfaces auxquelles ils appartiennent.

M. Caronnet s'est demandé s'il existait des couples de surfaces applicables pour lesquelles cette distance fût constante. Il existe effectivement de telles surfaces; elles peuvent se diviser en deux groupes :

Le premier groupe est tel que les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque d'une surface de ce groupe dépendent de deux fonctions arbitraires d'arguments différents.

Les surfaces du second groupe sont réglées et se correspondent par génératrices parallèles et de même sens; elles dépendent de deux fonctions arbitraires d'un même argument. Ces surfaces avaient d'ailleurs été signalées déjà par M. Beltrami.

Guyou. — Sur les équations du clapotis. (140-144).

Dans le clapotis comme dans la houle, les molécules appartenant à une même couche horizontale d'équilibre sont réparties à chaque instant sur le contour d'une trochoïde d'autant plus aplatie que la couche est plus profonde et celles qui appartiennent à une même ligne verticale sont situées à l'extrémité de rayons parallèles des cercles générateurs.

Dans la houle, chaque molécule décrit son cercle d'un mouvement uniforme, de sorte que les ondes trochoïdales conservent la même forme et se propagent avec une vitesse constante.

Dans le clapotis, le rayon sur lequel se trouve chaque molécule reste parallèle à lui-même et la molécule est animée sur la direction de ce rayon d'un mouvement pendulaire. Il en résulte que, dans une demi-période, les couches primitivement horizontales prennent la forme de trochoïdes de plus en plus aplaties; dans la demi-période suivante, les trochoïdes se renversent, présentent leurs crêtes aux points où se trouvaient précédemment les creux et réciproquement.

Les rayons sur lesquels oscillent les molécules ne restent pas immobiles. Il faut, en effet, que chaque trochoïde limite au-dessous d'elle un volume constant et, par suite, que le centre du cercle générateur reste situé au-dessus de la couche de repos à une hauteur égale au quotient de la surface du cercle par la longueur de l'onde, c'est-à-dire à une hauteur proportionnelle au carré du rayon. De là résulte que, par rapport à des axes ayant pour origine la position de repos et dirigés l'un verticalement et l'autre parallèlement au rayon de la molécule considérée, l'abscisse, c'est-à-dire le rayon, est proportionnelle à la racine carrée de l'ordonnée : la trajectoire est donc une parabole dont l'axe est vertical.

M. Boussinesq avait étudié ce phénomène dans le cas où la hauteur des ondes est petite relativement à leur longueur et avait donné des équations qui satisfont avec une grande approximation à la condition de continuité et à celle de la surface libre.

M. Guyou montre qu'en substituant une fonction elliptique à la fonction circulaire qui exprime, suivant M. Boussinesq, le mouvement oscillatoire des molécules sur leur rayon respectif, on satisfait rigoureusement aux conditions du problème. Traduit géométriquement, le mouvement rectiligne, au lieu d'être celui d'un point qui décrit un cercle uniformément, est celui d'un point qui circule le long d'une ellipse avec une vitesse linéaire constante.

On appréciera l'importance de la solution de M. Guyou, si l'on se rappelle combien est petit le nombre des problème d'Hydrodynamique que l'on sait traiter en toute rigueur, en dehors de ceux qui concernent les petits mouvements. Le seul mouvement oscillatoire des liquides dont on connaissait exactement les lois était celui de la houle dans des eaux de profondeur infinie.

Genty (*Max*). — Sur un théorème de Laguerre. (145-146).

Solution élémentaire de ce problème autrefois proposé par Laguerre :

« On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' et b, b', b'' qui font partie d'une division homographique. Sur ab comme diamètre on décrit un cercle C, dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de a en b; les segments $a'b'$ et $a''b''$ déterminent de même deux autres cycles C' et C''. Si l'on trace un cycle tangent à C, C' et C'', démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles de la division homographique. »

Mangeot. — Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique. (146-147).

Les seules surfaces qui soient symétriques par rapport à chacune des surfaces de l'une des classes

$$\varphi\left(\frac{x^a}{z^c}, \frac{y^b}{z^c}\right) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{x^a}{e^z}, \frac{y^b}{e^z}\right) = 0,$$

$$\varphi\left(x, \frac{y^b}{z^c}\right) = 0, \qquad \varphi\left(x, \frac{y^b}{e^z}\right) = 0,$$

sont respectivement les quadriques

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \lambda, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2z = \lambda,$$

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \lambda, \qquad \frac{y^2}{b} + 2z = \lambda,$$

a, b, c désignant trois nombres donnés, λ un paramètre et φ une fonction arbitraire.

Genty (*Max*). — Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce. (148-150).

Laisant. — Un théorème général de Mécanique. (151-154).

Soit un système matériel en mouvement depuis le temps t_0 jusqu'au temps t. Si m représente la masse d'un quelconque des points qui composent ce système; v_0 et v les vitesses de ce point au commencement et à la fin de la période considérée; F la force qui agit sur le point M; F_1 une force de même direction appliquée au même point, mais dont la grandeur a pour expression $F\frac{f'(v)}{v}$, $f(v)$ étant une fonction arbitraire de la vitesse; si enfin T_1 représente le travail total des forces F_1 pendant la période considérée, l'accroissement de la fonction $\Sigma mf(v)$ sera égal au travail T_1, c'est-à-dire que l'on aura

$$\Sigma mf(v) - \Sigma mf(v_0) = T_1.$$

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XIX.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XIX; 1895. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MÉLANGES.

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XIX.

21661 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XIX; 1895. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.



TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.



FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XIX.

[illegible] Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.








570
510.5
B936
Ser. 2
v. 19
1895
DATE DUE
RETURN
MATH. S

